O dělitelnosti čísel celých

6. kapitola. Nejmenší společný násobek

In: František Veselý (author): O dělitelnosti čísel celých. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1966. pp. 73–79.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403569

6. kapitola

NEJMENŠÍ SPOLEČNÝ NÁSOBEK

D$_{15}$ *Společný násobek celých čísel* $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k$ $(k \geqq 2)$ *nazýváme každé celé číslo* a, *pro něž platí zároveň vztahy* $b_1 \mid a, b_2 \mid a, b_3 \mid a, \ldots, b_k \mid a$.

Existuje vždy aspoň jeden společný násobek čísel b_1, $b_2, b_3, \ldots, b_k$. Je-li jedno z těchto čísel, např. $b_k = 0$, pak b_k je dělitelem čísla a, jen když $a = 0$; v tom případě existuje jen jediný společný násobek $a = 0$. Jsou-li všechna čísla $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k$ různá od nuly, pak existuje nekonečně mnoho společných násobků daných čísel. Patří k nim jejich součin $b_1 b_2 b_3 \ldots b_k$ a každý jeho násobek $cb_1 b_2 b_3 \ldots b_k$, kde c je libovolné celé číslo. Již z věty **T**$_6$ plyne, že množina všech společných násobků celých čísel $|b_1|, |b_2|, |b_3|, \ldots |b_k|$ je totožná s množinou všech společných násobků čísel $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k$, a proto budeme řešit úlohy o společném násobku zpravidla jen v těch případech, kdy daná čísla jsou celá nezáporná nebo celá kladná, tj. přirozená. Přitom se budeme zajímat skoro výlučně jen o přirozená čísla, která jsou společným násobkem daných čísel, ale budeme si přitom vědomi toho, že v množině všech společných násobků daných čísel se vyskytuje s každým číslem a i číslo opačné $-a$.

D$_{16}$ *Nejmenší společný násobek celých čísel* $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k$, *jež jsou všechna různá od nuly, nazýváme nejmenší přirozené číslo* m, *pro které platí* $b_1 \mid m, b_2 \mid m, b_3 \mid m, \ldots, b_k \mid m$; *označujeme je zpravidla* $[b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k]$.

Příklad 31. Jsou dána čísla $b_1 = 12$, $b_2 = 15$, $b_3 = 30$. Vyhledejme: a) množiny všech přirozených čísel, která jsou násobky daných čísel; b) $[b_1, b_2]$; c) $[b_1, b_2, b_3]$.

a) Hledané množiny přirozených čísel, která jsou násobky daných čísel, jsou:

$M_1 = \{12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, \ldots\}$,
$M_2 = \{15, 30, 45, 60, 75, 90, \ldots\}$,
$M_3 = \{30, 60, 90, 120, \ldots\}$. Kdybychom ovšem měli najít množiny všech násobků daných čísel, bylo by nutné prvky každé z množin M_1, M_2, M_3 rozmnožit o čísla k nim opačná a o číslo 0.

b) Množina všech přirozených čísel, která jsou společnými násobky čísel b_1, b_2, je $P = \{60, 120, 180, \ldots\}$, která je průnikem množin M_1, M_2. Její nejmenší prvek je 60 a proto $[b_1, b_2] = 60$.

c) Množina všech přirozených čísel, která jsou společnými násobky čísel b_1, b_2, b_3 je $Q = \{60, 120, 180, \ldots\}$ a dostaneme ji jako průnik množin M_1, M_2, M_3; ten ovšem můžeme vyhledat tak, že určíme průnik množin P, M_3. Nejmenší prvek množiny Q je 60 a proto $[b_1, b_2, b_3] = 60$. Postup při jeho určení je možno naznačit $[b_1, b_2, b_3] = [[b_1, b_2], b_3]$. Snadno se přesvědčíme, že ke stejnému výsledku dojdeme cestou $[b_1, b_2, b_3] = [b_1, [b_2, b_3]]$ nebo též $[b_1, b_2, b_3] = [[b_1, b_3], b_2]$.

Sami si jistě dovedete zdůvodnit vztah $[b_1, b_2, b_3, b_4] = [[b_1, b_2, b_3], b_4]$ nebo obecně $[b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k, b_{k+1}] = [[b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k], b_{k+1}]$ a využít ho při hledání nejmenšího společného násobku daných čísel.

Příklad 32. Najděte nejmenší takové přirozené číslo, že po přičtení čísel 20, 25, 30 dostanete taková tři čísla, z nichž první je dělitelné čtyřmi, druhé pěti, třetí šesti.

Označíme-li hledané číslo x, pak musí zřejmě platit zároveň vztahy:

$$4 \mid x + 20;\ 5 \mid x + 25;\ 6 \mid x + 30.$$

Poněvadž $4 \mid 20$, bude platit $4 \mid x + 20$ právě tehdy, když bude platit $4 \mid x$ (podle věty $\mathbf{T}_{10}$). Obdobně zjistíme, že musí platit též $5 \mid x$, $6 \mid x$. Číslo x, které vyhovuje zároveň třem podmínkám $4 \mid x$, $5 \mid x$, $6 \mid x$, je společným násobkem čísel 4, 5, 6. Úloha vyžaduje, abychom našli nejmenší přirozené číslo x dané vlastnosti, tj. číslo $[4, 5, 6]$. Číslo $[4, 5] = 20$ snadno zpaměti najdeme na základě znalosti malé násobilky. Proto $[4, 5, 6] = [[4, 5], 6] = [20, 6] = 60$, přičemž poslední krok učiníme tak, že z přirozených násobků čísla 20, tj. 20, 40, 60, 80, ... najdeme ten nejmenší, který je dělitelný 6. Zjistili jsme tedy, že hledané číslo je 60.

$\mathbf{T}_{30}$ *Nejmenší společný násobek čísel $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k$ je dělitelem každého společného násobku čísel $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k$.*

Označme n libovolný společný násobek přirozených čísel $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k$ a $m = [b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k]$, což podle definice $\mathbf{D}_{12}$ je nejmenší (minimální) prvek množiny N všech přirozených čísel, která jsou společnými násobky čísel $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k$. Avšak podle věty $\mathbf{T}_{11}$ můžeme k číslům n, m vyhledat taková celá čísla q, r, že platí vztahy

$$n = mq + r,\ 0 \leqq r < m.$$

Dokážeme-li, že $r = 0$ čili $n = mq$, znamená to $m \mid n$, což je tvrzení věty $\mathbf{T}_{30}$. To však dokážeme tím, že z předpokladu

$$n = mq + r,\ 0 < r < m \tag{6,1}$$

odvodíme spor. Ze vztahů (6,1) však plyne

$$r = n - mq,\ 0 < r < m. \tag{6,2}$$

Poněvadž n je společný násobek čísel $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k$, existují taková celá čísla $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_k$, že

$$n = b_1 q_1 = b_2 q_2 = b_3 q_3 = \ldots = b_k q_k; \qquad (6,3)$$

poněvadž m je též společným násobkem čísel $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k$, existují celá čísla $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_k$, že platí

$$m = b_1 s_1 = b_2 s_2 = b_3 s_3 = \ldots = b_k s_k. \qquad (6,4)$$

Užitím rovností (6,3) a (6,4) dostaneme po dosazení do (6,2) tyto rovnosti: $r = b_1 q_1 - b_1 s_1 q = b_1 (q_1 - s_1 q)$,
$r = b_2 q_2 - b_2 s_2 q = b_2 (q_2 - s_2 q), \ldots,$
$r = b_k q_k - b_k s_k q = b_k (q_k - s_k q)$.
Z těchto rovností však plyne, že přirozené číslo r je též společným násobkem čísel $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k$, o němž však platí $r < m$, což je ve sporu s předpokladem, že číslo m je nejmenší společný násobek čísel $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k$. Tento spor dokazuje, že musí platit $r = 0$, a tedy $m \mid n$, což jsme měli dokázat.

Příklad 33. Najděte největší trojciferné číslo x, z něhož po přičtení čísel 20, 25, 30 dostaneme 3 čísla taková, že první je dělitelné 4, druhé 5, třetí 6.

Z řešení příkladu 29 již víme, že číslo x musí být společným násobkem čísel 4, 5, 6 a že $[4, 5, 6] = 60$. Avšak z věty $\mathbf{T}_{30}$ plyne, že každý společný násobek daných čísel je násobkem jejich nejmenšího společného násobku, tj. v našem případě je tvaru $60k$, kde k je libovolné číslo celé. Z podmínek uvedených v dané úloze plyne, že je třeba najít největší celé číslo k, aby platilo $60k < 1000$, má-li být číslo $x = 60k$ trojciferné. Snadno pak najdeme, že
$k < \dfrac{1000}{60} = 16\dfrac{2}{3}$. Proto hledané číslo $x = 60.16 = 960$.

Příklad 34. Je-li $d = (a_1, a_2)$ největší společný dělitel přirozených čísel a_1, a_2, pak $a_1 = dq_1$, $a_2 = dq_2$, kde q_1, q_2

jsou (nesoudělná) čísla přirozená a nejmenší společný násobek je $m = [a_1, a_2] = dq_1\, q_2$. Dokažte toto tvrzení.

Číslo $n = dq_1 q_2$ je jistě společným násobkem čísel a_1, a_2, neboť $n = dq_1 q_2 = (dq_1)q_2 = a_1 q_2$, $n = dq_1 q_2 = (dq_2)q_1 = a_2 q_1$. Je však ještě třeba dokázat, že číslo n má vlastnosti čísla $m = [a_1, a_2]$, k čemuž použijeme věty $\mathbf{T}_{30}$, podle níž číslo m je dělitelem čísla n, čili $n = cm$, kde $c \geqq 1$.

Užitím daných rovností $a_1 = dq_1$, $a_2 = dq_2$ dostaneme $a_1 a_2 = dq_1 . dq_2 = (dq_1 q_2)d = nd = cmd$. Avšak z rovnosti

$$a_1\, a_2 = cmd \tag{6,5}$$

plynou vztahy

$$a_1 = \frac{m}{a_2} . cd = k_2 cd,\ a_2 = \frac{m}{a_1} . cd = k_1 cd, \tag{6,6}$$

kde $k_1 = \dfrac{m}{a_1}$, $k_2 = \dfrac{m}{a_2}$ jsou zřejmě přirozená čísla. Avšak z rovností (6,6) plyne, že čísla a_1, a_2 mají společného dělitele cd; přitom však víme, že každý společný dělitel je nejvýš rovný největšímu společnému děliteli, tj. $cd \leqq d$, odkud plyne $c \leqq 1$. Má-li však platit zároveň $c \geqq 1$, $c \leqq 1$, pak je nutně $c = 1$.

Dosadíme-li do rovnosti (6,5) $c = 1$, dostaneme vztah $md = a_1\, a_2$, který vyjádříme následující větou $\mathbf{T}_{31}$.

$\mathbf{T}_{31}$ *Jsou-li a_1, a_2 přirozená čísla, pak platí* $[a_1, a_2].(a_1, a_2) = a_1 a_2$.

Důsledek I. *Nejmenší společný násobek dvou nesoudělných přirozených čísel a_1, a_2 se rovná jejich součinu $a_1 a_2$.*

Tento důsledek plyne z věty $\mathbf{T}_{31}$, když uvážíme, že pro nesoudělná čísla a_1, a_2 platí $(a_1, a_2) = 1$.

Důsledek II. *Nejmenší společný násobek přirozených čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$, která jsou po dvou nesoudělná, se rovná jejich součinu $a_1 a_2 a_3 \ldots a_k$.*

Tato věta je zobecněním předcházející věty a dokáže se užitím matematické indukce. Při užívání této věty v praxi musíme si dobře všimnout, zda pro daná přirozená čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ je splněna podmínka, aby byla po dvou nesoudělná, když $k > 2$. Slabší podmínka $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k) = 1$ není při $k > 2$ postačující k tomu, aby součin daných přirozených čísel byl zároveň jejich nejmenším společným násobkem.

Příklad 35. Vypočtěte: a) (63, 147), [63, 147]; b) (5, 36, 54), [5, 36, 54]; c) (4, 11, 15), [4, 11, 15].

a) $(63, 147) = (63, 147 - 63.2) = (63, 21) = (63 - 21.3, 21) = (0,21) = 21$; $[63, 147] = \frac{63.147}{(63; 147)} = \frac{63.147}{21} = 3.147 = 441.$

b) $(5, 36) = (5, 1) = 1, (5, 36, 54) = ((5, 36), 54) = (1,54) = 1.$
Jsou tedy daná čísla 5, 36, 54 nesoudělná; nejsou však po dvou nesoudělná, neboť $(36, 54) = (36, 18) = (0, 18) = 18$. Dále je $[5, 36] = 5.36 = 180$ (viz důsledek I) a $[5, 36, 54] = [[5, 36], 54] = [180, 54]$. Snadno se určí $(180,54) = (18, 54) = (18, 0) = 18.$

Proto $[180, 54] = \frac{180.54}{18} = 540.$

c) $(4, 11, 15) = ((4, 11), 15) = (1, 15) = 1$. Poněvadž zřejmě platí $(4, 11) = 1, (4, 15) = 1, (11, 15) = 1$, jsou daná čísla 4, 11, 15 po dvou nesoudělná a proto (viz důsledek II) platí: $[4, 11, 15] = 4.11.15 = 660.$

T_{32} *Jsou-li celá čísla $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k$ děliteli celého čísla a, pak také jejich nejmenší společný násobek je dělitelem čísla a, tj. $[b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k] \mid a$.*

Z předpokladu věty plyne, že číslo a je společným násobkem čísel $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k$, který podle věty $\mathbf{T}_{30}$ je dělitelný číslem $[b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k]$.

Této věty často používáme při vyšetřování dělitelnosti daných čísel. Tak např. při řešení příkladu 4 jsme našli $3 \mid a$, $4 \mid a$, $13 \mid a$, odkud podle věty $\mathbf{T}_{32}$ ihned plyne $156 \mid a$. Při vyšetřování dělitelnosti téhož čísla a v příkladě 15 jsme našli $3 \mid a$, $4 \mid a$, $5 \mid a$, odkud podle věty $\mathbf{T}_{32}$ plyne $60 \mid a$. Z těchto dvou výsledků $156 \mid a$, $60 \mid a$ plyne ovšem $[156, 60] \mid a$, tj. $780 \mid a$, neboť $[156, 60] = \dfrac{156 . 60}{(156,60)} = \dfrac{156 . 60}{12} =$ $= 780$.

V kap. 7 poznáme ještě jiný způsob výpočtu nejmenšího společného násobku daných čísel.

Cvičení

6,1. Najděte nejmenší trojciferné číslo, které při dělení čísly 12 a 18 dává zbytek 5.

6,2. Běžec, který oběhne uzavřenou závodní dráhu za 7 minut, startoval k běhu v témže okamžiku jako motocyklista, který tutéž závodní dráhu objede za 80 vteřin. Vypočtěte dobu, po které se běžec poprvé setká s motocyklistou opět na místě startu, kolik kol v té době uběhl běžec a kolik kol ujel motocyklista.

6,3. Vyhledejte takové nejmenší přirozené číslo, že při jeho dělení čísly 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (v tomto pořadí) dostanete vždy neúplný podíl se zbytkem, který je v každém případě o 1 menší než dělitel, tj. tedy při dělení dvěma zbytek 1, při dělení třemi zbytek 2, při dělení čtyřmi zbytek 3 atd.

6,4. Dokažte, že pro každé celé číslo x polynom $x^5 - 5x^3 + 4x$ nabývá celočíselných funkčních hodnot, které jsou násobky čísla 120.