

# O řešení algebraických rovnic

---

## II. Řešení některých speciálních typů algebraických rovnic

In: Miroslav Šisler (author): O řešení algebraických rovnic. (Czech).  
Praha: Mladá fronta, 1966. pp. 21–103.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/403556>

### **Terms of use:**

© Josef Andrys, Miroslav Šisler, 1966

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## 2. kapitola

# ŘEŠENÍ NĚKTERÝCH SPECIÁLNÍCH TYPŮ ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

### 1. Kvadratické rovnice s reálnými koeficienty

V tomto odstavci si zopakujeme některé školní vědomosti. Je-li dána kvadratická rovnice tvaru

$$(16) \quad ax^2 + bx + c = 0,$$

kde  $a, b, c$  jsou reálná čísla, pak kořeny se vypočtou ze známého vzorce

$$(17) \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Podobně v případě normované kvadratické rovnice

$$(18) \quad x^2 + px + q = 0,$$

kde  $p, q$  jsou reálná čísla, se kořeny vypočtou ze vzorce

$$(19) \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

který je důsledkem vzorce (16) pro  $a = 1, b = p, c = q$ . Výraz pod odmocninou ve vzorci (17)  $D = b^2 - 4ac$  se nazývá *diskriminantem* kvadratické rovnice (16). Protože je diskriminant rovnice (18) roven číslu  $p^2 - 4q$ , je číslo pod odmocninou ve vzorci (19) čtvrtinou diskriminantu rovnice (18).

Je třeba si dobře uvědomit, jaký vlastně mají vzorce (17) a (18) smysl. Uvažujme např. vzorec (19) pro nor-

movanou rovnicí (18). Předně si musíme uvědomit, že vzorec (19) zastupuje vlastně dva vzorce pro dva kořeny  $x_1, x_2$ :

$$(20) \quad x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{a} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Tyto vzorce mají zcela jasný smysl, pokud je číslo  $\frac{p^2}{4} - q$  pod odmocninou kladné nebo nula (tj. je-li diskriminant kladný nebo nulový). Je-li diskriminant kladný, dostáváme ze vzorců (20) pro kořeny  $x_1, x_2$  dvě různá čísla. Věc je také jasná v případě nulového diskriminantu.

Pak je  $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = 0$  a  $x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$ .

Složitější situace nastává v případě, kdy diskriminant je záporný, tj. kdy  $\frac{p^2}{4} - q < 0$ . V tom případě nemá číslo  $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$  v reálném oboru smysl. Kvadratická rovnice má pak dva komplexně sdružené kořeny

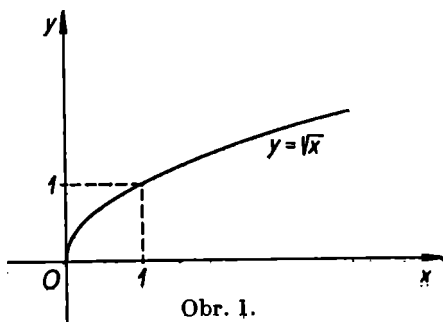
$$x_1 = -\frac{p}{2} + i \sqrt{\left| \frac{p^2}{4} - q \right|} \quad \text{a} \quad x_2 = -\frac{p}{2} - i \sqrt{\left| \frac{p^2}{4} - q \right|}.$$

Zde narážíme na pojem odmocniny ze záporného čísla, který je předmětem následujícího odstavce.

## 2. Druhá odmocnina komplexního čísla

Ze školy už známe, že druhá odmocnina kladného čísla  $x$  je kladné číslo  $y$ , pro které platí  $y^2 = x$ . Takové kladné číslo  $y$  existuje právě jedno a značíme je  $y = \sqrt{x}$ . Dále definujeme  $\sqrt{0} = 0$ .

Protože ke každému nezápornému číslu  $x$  je přiřazena právě jedna nezáporná hodnota  $y = \sqrt{x}$ , můžeme odmocninu považovat za reálnou funkci reálné proměnné s definičním oborem  $(0, \infty)$ . Její graf vidíme na obr. 1.



Poznamenejme ještě, že je-li dáno číslo  $x > 0$  a je-li  $y = \sqrt{x}$  (tj. platí-li, že  $y > 0$  a  $y^2 = x$ ), pak může vzniknout otázka, proč za druhou odmocninu nepovažujeme také záporné číslo  $-y$ , když i čtverec čísla  $-y$  je roven  $x$ , neboť je  $(-y)^2 = y^2 = x$ . V tomto smyslu by na rozdíl od naší definice měla druhá odmocnina kladného čísla dvě hodnoty lišící se znaménkem a nebyla by tedy funkcí  $x$  jako při naší definici (funkční hodnota by nebyla definována jednoznačně). To je jedním z důvodů, proč při počítání s čísly v reálném oboru definujeme odmocninu jako výše, tj. bereme odmocninu vždy kladně.

Podívejme se nyní na pojem odmocniny v komplexním oboru. Zde již není možno definovat odmocninu z daného komplexního čísla  $x$  jako funkci tohoto čísla  $x$ , tj. jednoznačně. Zde prostě *definujeme druhou odmocninu*

komplexního čísla  $x$  jako každé komplexní číslo  $y$ , pro něž je  $y^2 = x$ . Ukažme některé příklady.

**Příklad 4.** Umocněním čísel  $y_1 = 2 + 3i$  a  $y_2 = -2 - 3i$  na druhou dostáváme v obou případech číslo  $x = -5 + 12i$ . Čísla  $y_1$  a  $y_2$  jsou tedy druhými odmocninami čísla  $x = -5 + 12i$ .

**Příklad 5.** Umocněním čísel  $y_1 = 2i$  a  $y_2 = -2i$  na druhou dostáváme v obou případech číslo  $-4$ . Čísla  $2i$  a  $-2i$  jsou tedy druhými odmocninami čísla  $-4$ .

**Příklad 6.** Číslo  $x = 3^*$  má zřejmě dvě druhé odmocniny  $y_1 = \sqrt{3}$ ,  $y_2 = -\sqrt{3}$  (zde symbol  $\sqrt{3}$  značí hodnotu druhé odmocniny z čísla 3 v reálném oboru, tj. kladné číslo, jehož čtvercem je číslo 3). Na tomto příkladě je patrný rozdíl definic odmocniny v reálném a komplexním oboru.

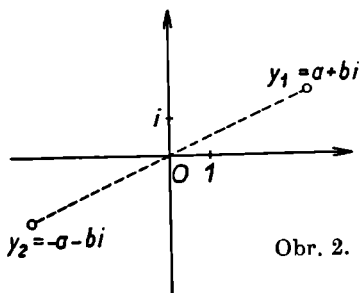
**Příklad 7.** Druhými odmocninami čísla  $i$  jsou čísla  $y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$  a  $y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Druhými odmocninami čísla  $-1$  jsou zřejmě čísla  $y_1 = i$ ,  $y_2 = -i$ .

Ve všech těchto příkladech byly ke každému komplexnímu číslu uvedeny dvě druhé odmocniny a byla to vždy čísla opačná. To nás vede k domněnce, že lze očekávat správnost tohoto tvrzení:

**Věta 7.** Ke každému komplexnímu číslu  $x \neq 0$  existují právě dvě různá komplexní, vzájemně opačná čísla  $y_1$ ,  $y_2$  taková, že  $y_1^2 = y_2^2 = x$ .

*\**) Uvědomte si, že reálná čísla jsou speciálním případem čísel komplexních (jejich imaginární část je rovna nule)!

Toto tvrzení můžeme vyslovit také takto: Každé komplexní číslo  $x \neq 0$  má v komplexním oboru právě dvě druhé odmocniny  $y_1$  a  $y_2$ . Čísla  $y_1$  a  $y_2$  jsou přitom vzájemně opačná, tj. platí  $y_1 = -y_2$ . (V Gaussově rovině jsou tedy čísla  $y_1$  a  $y_2$  souměrná vzhledem k počátku — viz obr. 2.)



Obr. 2.

Tuto větu nyní dokážeme. Důkaz provedeme v několika krocích. Dokažme nejprve, že ke každému komplexnímu číslu  $x = a + bi$  existuje alespoň jedno číslo  $y = c + di$  takové, že  $y^2 = x$ . Pokusme se takové číslo  $y$  nalézt. Hledáme tedy čísla  $c$  a  $d$  taková, že platí rovnost

$$(c + di)^2 = a + bi.$$

Odtud plyne

$$(c^2 - d^2) + 2cdi = a + bi.$$

Dvě komplexní čísla jsou si rovna, rovnají-li se jejich reálné a imaginární části, tj. platí-li

$$(21) \quad \begin{aligned} c^2 - d^2 &= a, \\ 2cd &= b. \end{aligned}$$

Z těchto dvou rovnic vypočteme hledaná čísla  $c$  a  $d$ .

Umocněním obou rovnic na druhou dostaneme vztahy

$$(c^2 - d^2)^2 = a^2,$$

$$4c^2d^2 = b^2.$$

Sečtením obou rovnic dostaneme postupně rovnice

$$(c^2 - d^2)^2 + 4c^2d^2 = a^2 + b^2,$$

$$c^4 - 2c^2d^2 + d^4 + 4c^2d^2 = a^2 + b^2,$$

$$c^4 + 2c^2d^2 + d^4 = a^2 + b^2,$$

$$(c^2 + d^2)^2 = a^2 + b^2$$

a tedy

$$|c^2 + d^2| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Protože jak  $c^2 + d^2$  tak i  $\sqrt{a^2 + b^2}$  je kladné číslo, máme

$$(22) \quad c^2 + d^2 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Sečtením vztahů (22) a (21) dostáváme

$$2c^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2}$$

čili

$$(23) \quad c^2 = \frac{1}{2} (a + \sqrt{a^2 + b^2}).$$

Odečtením (21) od (22) dostáváme

$$2d^2 = -a + \sqrt{a^2 + b^2}.$$

čili

$$(24) \quad d^2 = \frac{1}{2} (-a + \sqrt{a^2 + b^2}).$$

Dokažme nyní, že výrazy  $a + \sqrt{a^2 + b^2}$  a  $-a + \sqrt{a^2 + b^2}$  stojící v (23) a (24) v závorce jsou nezáporné.

Platí totiž pro libovolná reálná čísla  $a, b$  tato nerovnost:

$$a^2 + b^2 \geq a^2$$

a tedy i

$$(25) \quad \sqrt{a^2 + b^2} \geq |a|.$$

Protože je dále

$$|a| \geq a,$$

plyne z nerovnosti (25) nerovnost

$$\sqrt{a^2 + b^2} \geq a$$

čili nerovnost

$$-a + \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0.$$

Protože je však také

$$|a| \geq -a,$$

dostáváme z nerovnosti (25) nerovnost

$$\sqrt{a^2 + b^2} \geq -a$$

čili nerovnost

$$a + \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0.$$

Tím je dokázáno, že oba výrazy jsou nezáporné.

Protože jsou tedy na pravých stranách rovností (23) a (24) nezáporná čísla, dostaneme odmocněním

$$(26) \quad |c| = \sqrt{\frac{1}{2} (a + \sqrt{a^2 + b^2})},$$

$$(27) \quad |d| = \sqrt{\frac{1}{2} (-a + \sqrt{a^2 + b^2})}.$$

Vzorce (26) a (27) nám dávají hodnoty čísel  $c$  a  $d$  až na znaménko. Snadno se můžeme přesvědčit, že lze vždy

$$\text{položit } c = \sqrt{\frac{1}{2} (a + \sqrt{a^2 + b^2})} \text{ a } d = \pm$$



$\pm \sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})}$ , přičemž znaménko  $+$  volíme v případě, kdy  $b \geq 0$  a znaménko  $-$  v případě, že  $b < 0$ . Je tedy odmocninou čísla  $a + bi$  číslo

$$(28) \sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} \pm i \sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})},$$

kde bereme znaménko  $+$  je-li  $b \geq 0$  a znaménko  $-$  je-li  $b < 0$ . Je-li totiž  $b \geq 0$ , pak je

$$\begin{aligned} & \left( \sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} + i \sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})} \right)^2 = \\ & = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2}) - \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2}) + \\ & + 2i \sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})} = \\ & = a + i \sqrt{(a + \sqrt{a^2 + b^2})(-a + \sqrt{a^2 + b^2})} = \\ & = a + i \sqrt{a^2 + b^2 - a^2} = a + i \sqrt{b^2} = a + bi. \end{aligned}$$

Podobně je-li  $b < 0$ , pak je

$$\begin{aligned} & \left( \sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} - i \sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})} \right)^2 = \\ & = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2}) - \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2}) - \\ & - 2i \sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})} = \\ & = a - i \sqrt{(a + \sqrt{a^2 + b^2})(-a + \sqrt{a^2 + b^2})} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= a - i\sqrt{a^2 + b^2 - a^2} = a - i\sqrt{b^2} = \\
 &= a - i(-b) = a + bi.
 \end{aligned}$$

Tím je hotova prvá část důkazu, ve které jsme nejen dokázali existenci alespoň jedné druhé odmocniny k danému komplexnímu číslu, ale i udali vzorec (28), který nám umožňuje snadno tuto odmocninu vypočítat.

Dokažme nyní druhou část našeho tvrzení. Označme odmocninu čísla  $x$  stanovenou vzorcem (28) symbolem  $y_1$ . Označme dále  $y_2 = -y_1$ , tj.  $y_2$  je opačné číslo k číslu  $y_1$ . Pokud je  $y_1 \neq 0$ , je vždy  $y_2 \neq y_1$  a snadno se dokáže, že i číslo  $y_2$  je odmocninou čísla  $x$ . Je totiž  $(y_2)^2 = (-y_1)^2 = y_1^2 = x$ . Tím je dokázáno, že vždy existují alespoň dvě různé, vzájemně opačné druhé odmocniny daného nenulového komplexního čísla.

Důkaz bude ukončen, dokážeme-li ještě, že tyto druhé odmocniny jsou právě dvě. Předpokládejme, že ze vzorce (24) jsme pro odmocninu  $z$  čísla  $x = a + bi \neq 0$  dostali číslo  $y_1 = m + ni$ . Potom je i číslo  $y_2 = -y_1 = -m - ni$  druhou odmocninou čísla  $x$ . Předpokládejme dále, že by existovalo ještě číslo  $z = p + qi$  takové, že  $z \neq y_1$ ,  $z \neq y_2$  a  $z^2 = x$  (tj.  $z$  by bylo další druhou odmocninou různou od  $y_1$  a  $y_2$ ). Z rovností

$$y_1^2 = x, \quad z^2 = x$$

nyní plyne, že  $y_1^2 = z^2$ , tj.

$$(m + ni)^2 = (p + qi)^2.$$

Umocněním dostaneme rovnost

$$(m^2 - n^2) + 2mni = (p^2 - q^2) + 2pqi.$$

Z rovnosti těchto dvou komplexních čísel tedy plynou tyto rovnice:

$$(29) \quad m^2 - n^2 = p^2 - q^2,$$

$$(30) \quad 2mn = 2pq.$$

Z rovnosti  $y_1^2 = z^2$  plyne dále rovnost

$$|y_1^2| = |z^2|$$

čili

$$|y_1|^2 = |z|^2.$$

Odtud plyne rovnost

$$(31) \quad m^2 + n^2 = p^2 + q^2.$$

Sečtením (29) a (31) dostáváme rovnost

$$2m^2 = 2p^2$$

čili

$$m^2 = p^2.$$

Je tedy

$$(32) \quad |m| = |p|.$$

Z rovnosti (32) plyne, že je buď  $m = p$ , nebo  $m = -p$ .

Je-li  $m = p$ , plyne z rovnosti (30), že  $n = q$  a je tedy  $z = p + qi = m + ni = y_1$ . To je však spor s předpokladem, že je  $z \neq y_1$ .

Je-li  $m = -p$ , plyne z rovnosti (30), že  $n = -q$  a je tedy  $z = p + qi = -m - ni = -y_1 = y_2$ . To je spor s předpokladem, že  $z \neq y_2$ .

Tím je dokázáno, že k číslu  $x \neq 0$  neexistují kromě čísel  $y_1$  a  $y_2 = -y_1$  žádné jiné komplexní odmocniny. Důkaz našeho tvrzení je hotov.

Důkaz jsme mohli udělat i mnohem jednodušeji, s použitím základní věty algebry. Tato věta však nebyla dokázána, a proto jsme raději dali přednost elementárnímu důkazu našeho tvrzení. Důkaz by se prováděl takto: Podle definice je druhou odmocninou komplexního čísla  $x \neq 0$  takové komplexní číslo  $y$ , že platí  $y^2 = x$ . Je tedy každý kořen rovnice

$$y^2 - x = 0$$

druhou odmocninou komplexního čísla  $x$ . To je však algebraická rovnice druhého stupně a podle základní věty algebry má tato rovnice alespoň jeden kořen  $y_1 = c + di$ . Zřejmě je  $y_1 \neq 0$ , neboť jinak by bylo  $0 = y_1^2 = x$ , což není pravda. Položíme-li  $y_2 = -c - di$ , je  $y_2 \neq y_1$  a platí  $y_1^2 = c^2 - d^2 + 2cdi$ ,  $y_2^2 = c^2 - d^2 + 2cdi$  čili  $y_1^2 = y_2^2 = x$ . Nalezli jsme tak dva různé kořeny rovnice  $y^2 - x = 0$ . Protože tato rovnice je druhého stupně, může mít podle věty 4 nejvýše dva kořeny. Odtud plyne naše tvrzení, že ke každému komplexnímu číslu  $x \neq 0$  existují dvě různé, vzájemně opačné druhé odmocniny.

Nyní vypočteme několik příkladů na výpočet druhých odmocnin komplexního čísla.

**Příklad 8.** Vezměme číslo  $x = -5 + 12i$  z příkladu 4. Protože je  $b = 12 > 0$ , dostáváme ze vzorce (28) se znaménkem  $+$  toto číslo:

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{\frac{1}{2}(-5 + \sqrt{25 + 144})} + i \sqrt{\frac{1}{2}(5 + \sqrt{25 + 144})} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}(-5 + \sqrt{169})} + i \sqrt{\frac{1}{2}(5 + \sqrt{169})} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}(-5 + 13)} + i \sqrt{\frac{1}{2}(5 + 13)} = \\ &= \sqrt{4} + i \sqrt{9} = 2 + 3i. \end{aligned}$$

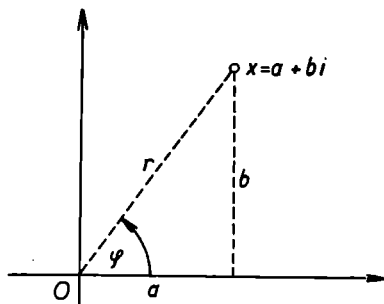
Pro druhou hodnotu odmocniny  $y_2$  dostáváme číslo  $y_2 = -y_1 = -2 - 3i$ . Dospíváme tak k výsledku příkladu 4.

**Příklad 9.** Vypočteme druhé odmocniny ze záporného čísla  $x = -4 = -4 + 0i$ .

Protože je  $b = 0$ , vezmeme ve vzorci (28) znaménko  $+$ . Je tedy

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{\frac{1}{2}(-4 + \sqrt{16})} + i \sqrt{\frac{1}{2}(4 + \sqrt{16})} = \\ &= \sqrt{0} + i \cdot 2 = 2i. \end{aligned}$$

Dále je  $y_2 = -y_1 = -2i$ .



Obr. 3.

Druhé odmocniny z komplexního čísla můžeme počítat i jiným způsobem. Využijeme k tomu tzv. *goniometrického vyjádření komplexního čísla*. Je-li dáno komplexní číslo  $x = a + bi$ ,  $x \neq 0$  (viz obr. 3), lze jeho polohu v Gaussově rovině jednoznačně charakterizovat pomocí jeho vzdálenosti od počátku  $r$  a pomocí úhlu  $\varphi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , který svírá jeho průvodič s reálnou osou. Platí pak vzorce

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi,$$

kde  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Pokud  $a \neq 0$ , tj. pokud je  $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$  à  $\varphi \neq \frac{3\pi}{2}$  (je-li  $a = 0$ , jedná se o ryze imaginární číslo),

lze  $\varphi$  snadno určit z goniometrické rovnice  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ .

Je ovšem třeba si uvědomit, ve kterém kvadrantu Gaussovy roviny číslo  $a + bi$  leží. Je tedy

$$a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

**Příklad 10.** Vyjádřeme goniometricky číslo  $3 + 4i$ .

Jest  $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5,$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4}{3}.$$

V logaritmických tabulkách nalezneme, že  $\varphi = 53^\circ 08'$ .  
Je tedy

$$3 + 4i = 5(\cos 53^\circ 08' + i \sin 53^\circ 08').$$

Pomocí goniometrického vyjádření

$$x = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

daného komplexního čísla  $x$  pak obě druhé odmocniny ihned dostaneme ze vzorců

$$(32) \quad \begin{cases} y_1 = \sqrt{r} \left( \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right), \\ y_2 = \sqrt{r} \cos \frac{\varphi + 2\pi}{2} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi}{2}. \end{cases}$$

Důkaz, že čísla (32) jsou hledanými druhými odmocninami, se snadno provede umocněním čísel  $y_1$  a  $y_2$  na druhou pomocí vzorců pro funkce dvojnásobného úhlu. Provedeme ho např. pro  $y_1$ . Platí

$$\begin{aligned} y_1^2 &= r \left( \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)^2 = r \left[ \left( \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + i \left( 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \right) \right] = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = x. \end{aligned}$$

**Příklad 11.** Vypočtěme opět druhé odmocniny čísla  $x$  z příkladu 4. Je tedy  $x = -5 + 12i$ , takže

$$r = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

a 
$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{12}{5} = -2,4.$$

Protože je číslo  $-5 + 12i$  v druhém kvadrantu, dostaneme z tabulek  $\varphi = 112^\circ 37'$ . Je tedy

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{13} \left( \cos \frac{112^\circ 37'}{2} + i \sin \frac{112^\circ 37'}{2} \right) = \\ &= \sqrt{13} (\cos 56^\circ 18' + i \sin 56^\circ 18') = \\ &= 3,60555(0,55484 + i 0,83196) \doteq 2 + 3i. \end{aligned}$$

### 3. Kvadratické rovnice s komplexními koeficienty

Se znalostmi, které jsme nabyli v odstavci 2 již snadno můžeme řešit kvadratické rovnice s komplexními koeficienty. Mějme dánu kvadratickou rovnici

$$(33) \quad ax^2 + bx + c = 0,$$

kde  $a, b, c$  jsou komplexní čísla,  $a \neq 0$ . Rovnici (33) napíšeme ve tvaru

$$(34) \quad ax^2 + bx = -c.$$

Obě strany rovnice (34) násobme číslem  $4a$  a přičtěme k nim  $b^2$ . Dostaneme rovnost

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

čili rovnost

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Čtenář si zajisté všiml, že všechny úpravy, které jsme dosud udělali, jsou v oboru komplexních čísel přípustné. Dále vidíme, že v poslední rovnici stojí na pravé straně komplexní číslo. Chceme nyní najít takové komplexní číslo  $y$ , jehož čtverec je roven číslu  $b^2 - 4ac$ . Taková čísla — druhé odmocniny čísla  $b^2 - 4ac$  — existují dvě, pokud  $b^2 - 4ac \neq 0$ . Pro  $b^2 - 4ac = 0$  je  $y = 0$ . Je-li  $y$  jednou z odmocnin, je číslo  $-y$  odmocninou druhou. Položíme-li nyní

$$2ax_1 + b = y,$$

dostaneme jeden kořen kvadratické rovnice

$$(35) \quad x_1 = \frac{-b + y}{2a}.$$

Položíme-li

$$2ax_2 + b = -y,$$

dospíváme k druhému kořenu

$$(36) \quad x_2 = \frac{-b - y}{2a}$$

kvadratické rovnice (33).

Vzorce (35) a (36) pro kořeny  $x_1, x_2$  můžeme stručně zapsat vzorcem

$$(37) \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm y}{2a},$$

kde  $y$  značí jednu z obou hodnot druhé odmocniny z čísla  $b^2 - 4ac$ . Označíme-li  $y = \sqrt{b^2 - 4ac}$ , pak lze vzorec (37) psát ve tvaru

$$(38) \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

což je vzorec zcela totožný se vzorcem (17) pro kořeny



kvadratické rovnice s reálnými koeficienty. Je třeba však dát pozor na jiný význam symbolu  $\sqrt{\quad}$ .

Protože reálná čísla jsou jen speciálním případem komplexních čísel, můžeme již snadno odpovědět na zbývající otázku, jaké je řešení kvadratické rovnice s reálnými koeficienty v případě záporného diskriminantu. Jedná se totiž jen o speciální případ řešení rovnice s komplexními koeficienty. V tomto případě jde o nalezení druhých odmocnin reálného záporného čísla  $b^2 - 4ac$ . Buď  $x$  reálné záporné číslo, tj.  $x = x + 0i$  a  $|x| = -x$ . Podle vzorce (28) dostaneme pro odmocninu čísla  $x$  výraz

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2})} + i \sqrt{\frac{1}{2}(-x + \sqrt{x^2})} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}(x + |x|)} + i \sqrt{\frac{1}{2}(-x + |x|)} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}(-|x| + |x|)} + i \sqrt{\frac{1}{2}(|x| + |x|)} = \\ &= 0 + i\sqrt{|x|} = i\sqrt{|x|}. \end{aligned}$$

Reálné záporné číslo  $x$  má tedy tyto dvě odmocniny:

$$i\sqrt{|x|} \text{ a } -i\sqrt{|x|}.$$

Pro kořeny kvadratické rovnice tedy v případě záporného diskriminantu dostáváme podle (38) vzorce

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{2a}.$$

Celkem lze tedy udělat pro kvadratickou rovnici (33) tento závěr:

a) Pro kořeny kvadratické rovnice s komplexními koeficienty platí vzorec

$$(38) \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

kde symbol  $\sqrt{b^2 - 4ac}$  znamená některou z obou komplexních odmocnin komplexního čísla  $b^2 - 4ac$ .

b) Ve speciálním případě kvadratické rovnice s reálnými koeficienty plynou z (38) pro kořeny vzorce

$$(39) \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

pokud diskriminant  $D = b^2 - 4ac \geq 0$ . Je-li  $D < 0$ , je

$$(40) \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{2a}.$$

V obou případech stojí pod odmocninou nezáporné číslo.

Speciálním případem kvadratické rovnice je tzv. ryze kvadratická rovnice tvaru

$$(39) \quad ax^2 + c = 0, \quad a \neq 0.$$

(Zde je tedy  $b = 0$ , takže chybí lineární člen.)

Vzorce pro kořeny této rovnice lze odvodit jako důsledek vzorců pro kořeny kvadratické rovnice pro  $b = 0$ , nebo je lze odvodit přímo takto: Z rovnice (39) plyne ihned

$$x^2 = -\frac{c}{a}.$$

Řešením ryze kvadratické rovnice jsou tedy taková komplexní čísla, jejichž čtverec je roven číslu  $-\frac{c}{a}$ . Jsou možné tyto případy:

a) V případě, že číslo  $-\frac{c}{a}$  je reálné a je  $-\frac{c}{a} > 0$ , je

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

b) V případě, že číslo  $-\frac{c}{a}$  je reálné a je  $-\frac{c}{a} < 0$ , je

$$x_{1,2} = \pm i \sqrt{\left| \frac{c}{a} \right|}.$$

c) V případě, že číslo  $-\frac{c}{a}$  je komplexní nikoliv reálné, pak, označíme-li symbolem  $\sqrt{-\frac{c}{a}}$  jednu z druhých odmocnin čísla  $-\frac{c}{a}$ , dostáváme pro kořeny vzorec

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Dostáváme formálně stejný vzorec, jako v případě reálného a kladného  $-\frac{c}{a}$ , avšak odmocnina má odlišný význam. Uvědomte si, že z posledního vzorce plynou jako speciální případy vzorce uvedené v bodech a) a b).

Třetím speciálním případem kvadratické rovnice je rovnice tvaru

$$ax^2 + bx = 0, \quad a \neq 0,$$

tj. rovnice bez absolutního členu. Její řešení je velmi snadné jak v reálném, tak i komplexním oboru. Napíšeme-li rovnici ve tvaru

$$x(ax + b) = 0,$$

je ihned vidět, že jedním kořenem je  $x_1 = 0$  a druhým kořenem je kořen rovnice  $ax + b = 0$ , tj. číslo  $x_2 = -\frac{b}{a}$ .

Uvedme nyní několik příkladů.

**Příklad 12.** Řešme reálnou kvadratickou rovnici

$$3x^2 - 5x + 2 = 0.$$

Zde je  $D = 25 - 24 = 1 > 0$ , takže dostáváme dva reálné různé kořeny

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6},$$

tj.

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{2}{3}.$$

**Příklad 13.** Řešme reálnou kvadratickou rovnici

$$9x^2 - 6x + 1 = 0.$$

Zde je  $D = 36 - 36 = 0$ , takže rovnice má jeden dvojnásobný kořen

$$x = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

**Příklad 14.** Řešme rovnici

$$x^2 - 4x + 13 = 0.$$

Zde je  $D = 16 - 52 = -36 < 0$ , takže rovnice má dva komplexně sdružené kořeny

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm i\sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2}.$$

Je tedy  $x_1 = 2 + 3i$  a  $x_2 = 2 - 3i$ . Poznamenejme, že v tomto případě by bylo lépe užít vzorce pro řešení normované kvadratické rovnice  $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ , který je důsledkem vzorců (38), (39), (40) pro  $a = 1$ .

**Příklad 15.** Řešme rovnici

$$x^2 + (2 - 3i)x - 5(1 + i) = 0.$$

Zde je  $D = (2 - 3i)^2 - 20(1 + i) = 15 + 8i$ . Podle vzorce (28) dostaneme pro odmocninu čísla  $15 + 8i$  číslo

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{2}(15 + \sqrt{15^2 + 8^2})} + i \sqrt{\frac{1}{2}(-15 + \sqrt{15^2 + 8^2})} &= \\ = \sqrt{\frac{1}{2}(15 + 17)} + i \sqrt{\frac{1}{2}(-15 + 17)} &= \\ = \sqrt{16} + i\sqrt{1} &= 4 + i. \end{aligned}$$

Číslo  $D$  má tedy dvě druhé odmocniny  $4 + i$  a  $-4 - i$ . Pro kořeny tedy dostáváme

$$x_1 = \frac{1}{2}(-2 + 3i + 4 + i) = 1 + 2i,$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(-2 + 3i - 4 - i) = -3 + i.$$

Naše rovnice má tedy dva různé komplexní kořeny  $x_1 = 1 + 2i$  a  $x_2 = -3 + i$ . (Všimněte si, že komplexní kořeny nejsou u rovnice s komplexními koeficienty obecně komplexně sdružená čísla!)

**Příklad 16.** Řešme rovnici

$$ix^2 - (2 + 2i) = 0.$$

Rovnici upravíme na tvar

$$x^2 = \frac{2 + 2i}{i}$$

a nalezneme odmocniny z čísla  $\frac{2 + 2i}{i} = \frac{(2 + 2i)i}{i^2} = 2 - 2i$ . Podle vzorce (28) je jedna z odmocnin rovna číslu

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{2}(2 + \sqrt{8}) - i} &= \sqrt{\frac{1}{2}(2 + \sqrt{8}) - i} \\ &= \sqrt{1 + \sqrt{2}} - i \sqrt{-1 + \sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Daná rovnice má tedy dva kořeny

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{1 + \sqrt{2}} - i \sqrt{-1 + \sqrt{2}} \\ \text{a } x_2 &= -\sqrt{1 + \sqrt{2}} + i \sqrt{-1 + \sqrt{2}}. \end{aligned}$$

**Cvičení 12.** Řešte tyto kvadratické rovnice:

- $6ax^2 - ab - b^2 = 0$ , kde  $a \neq 0$ ;
- $a^2x^2 - abx + \frac{b^2}{4} = 0$ , kde  $a \neq 0$ ;
- $ax^2 - 2x\sqrt{2} - 2 = 0$ , kde  $a \neq 0$ .

**13.** Pomocí diskriminantu rozhodněte, jakého druhu je řešení těchto rovnic:

- $2x^2 + 4x + 11 = 0$ ;
- $3x^2 - 2x\sqrt{3} - 1 = 0$ ;
- $3x^2 - 2x\sqrt{3} + 1 = 0$ ;
- $a^2x^2 - abx + \frac{b^2}{4} = 0$ .

V případě d) proveďte diskusi řešení.

14. Řešte tyto kvadratické rovnice:

a)  $x^2 = 9 - 40i$ ;

b)  $x^2 = i$ ;

c)  $x^2 - 1 - i = 0$ ;

d)  $2x^2 - 1 - 4i\sqrt{3} = 0$ ;

e)  $(1 + i)x^2 + 7 + 3i = 0$ ;

f)  $x^2 - 4i\sqrt{5} = -1$ .

15. Řešte tyto kvadratické rovnice:

a)  $x^2 - ix + 2 = 0$ ;

b)  $x^2 - 3x + 3 + i = 0$ ;

c)  $x^2 + 3x = -10i$ ;

d)  $x^2 + 3(3 + 2i) = 2x$ ;

e)  $(2 - i)x^2 - (4 - 2i)x + 21 + 3i = 0$ .

#### 4. Řešení některých rovnic převedením na kvadratickou rovnici

Často se setkáváme (zvláště při slovních úlohách) s rovnicemi, které nejsou algebraické podle naší definice, tj. na levé straně není mnohočlen, ale lze je různými úpravami na kvadratickou rovnici převést. Vezměme např. rovnici

$$\frac{x}{x+4} = \frac{16}{x-14}.$$

Předpokládáme-li  $x \neq -4$ ,  $x \neq 14$ , lze tuto rovnici vynásobením obou stran činitelem  $(x+4)(x-14)$  převést na tvar

$$x(x-14) = 16(x+4).$$

Úpravami dostáváme postupně tyto rovnice:

$$x^2 - 14x - 16x - 48 = 0,$$

$$x^2 - 30x - 48 = 0.$$

To však už je kvadratická rovnice, která má kořeny

$$x_1 = 15 + \sqrt{273} \doteq 31,5, \quad x_2 = 15 - \sqrt{273} \doteq -1,5.$$

Zkouškou se můžeme přesvědčit, že nalezená čísla  $x_1, x_2$  vyhovují dané rovnici.

Je velmi důležité si uvědomit, že v případech, kdy provádíme s rovnicí jiné úpravy než ekvivalentní\*), je zkouška nutná, neboť se může stát, že upravená rovnice má navíc některé kořeny, jež nevyhovují rovnici původní. Podobně může nastat situace, že upravená rovnice nemá za kořen číslo, které je kořenem rovnice původní (to znamená, že během úprav můžeme nějaký kořen ztratit). Takovým úpravám, při nichž kořeny ztrácíme, se musíme vyhybat. Nelze např. dělit obě strany rovnice dělencem obsahujícím neznámou, aniž jsme se přesvědčili, že nulové body dělence nejsou kořeny původní rovnice. Je to zřejmé z tohoto příkladu: Kdybychom bezmyšlenkovitě dělili rovnici

$$(x - 4)(x + 3) = (x + 3)(2x + 5)$$

výrazem  $x + 3$  stojícím na obou stranách rovnice, dostali bychom rovnici

$$x - 4 = 2x + 5,$$

\*) Dvě rovnice jsou, jak víme, *ekvivalentní*, mají-li tytéž kořeny. Algebraické úpravy, které převádějí rovnici na rovnici s ní ekvivalentní, nazýváme ekvivalentními úpravami. Tak např. násobení (dělení) obou stran rovnice číslem různým od nuly je ekvivalentní úprava. Podobně přičtení (odečtení) stejného čísla k oběma stranám je úprava ekvivalentní.



tj.  $x = -9$ . Obdrželi bychom tak jen jeden kořen původní rovnice a ztratili bychom přitom druhý kořen  $x = -3$ , pro který nabývá výraz  $x + 3$  nulové hodnoty. To by se nemohlo bývalo stát, kdybychom se ještě před dělením přesvědčili, zda číslo  $x = -3$  je kořenem dané rovnice.

V příkladu uvedeném na začátku tohoto odstavce jsme obě strany dané rovnice násobili činiteli obsahujícími neznámou. Zde však čísla  $x$ , pro která nabývali tyto činitelé  $x + 4$  a  $x - 14$  nulové hodnoty, nebyla kořeny dané rovnice, takže jsme mohli předpokládat, že je  $x \neq -4$  a  $x \neq 14$ . Za tohoto předpokladu byly provedené úpravy ekvivalentní.

Příkladem úpravy rovnice, která není ekvivalentní, je kromě právě zmíněného násobení či dělení rovnice činitelem obsahujícím neznámou, též umocnění a odmocnění obou stran rovnice.

Výše uvedenou úvahu si ověřme ještě na dalším příkladě.

### **Příklad 17. Řešme rovnici**

$$9(x - 5)^2 - 16(x + 2)^2 = 0.$$

Rovnici upravme na tvar

$$9(x - 5)^2 = 16(x + 2)^2.$$

Obě strany této rovnice odmocníme. Dostáváme tak rovnici

$$|3(x - 5)| = |4(x + 2)|.$$

Odtud plyne, že je buď

$$3(x - 5) = 4(x + 2),$$

nebo

$$3(x - 5) = -4(x + 2).$$

Z prvé rovnice dostaneme úpravou lineární rovnici

$$x + 23 = 0$$

mající kořen  $x_1 = -23$  a z druhé rovnice dostáváme úpravou lineární rovnici

$$7x - 7 = 0$$

mající kořen  $x_2 = 1$ . Zkouškou se přesvědčíme, že oba kořeny  $x_1 = -23$  a  $x_2 = 1$  vyhovují dané rovnici. Viděli jsme, že při neopatrném odmocňování by se mohlo stát, že bychom uvažovali jen rovnici  $3(x - 5) = 4(x + 2)$ , čímž bychom ztratili kořen  $x_2 = 1$ . (Pamatujte, že pro reálné  $a$  je vždy  $\sqrt{a^2} = |a|$ !)

Danou rovnici bychom však mohli řešit i tak, že bychom ji umocněním obou závorek a jednoduchou úpravou převedli na ekvivalentní kvadratickou rovnici

$$7x^2 + 154x - 161 = 0,$$

jejíž kořeny jsou právě čísla  $x_1 = -23$  a  $x_2 = 1$ .

**Cvičení 16.** Řešte tyto rovnice:

a)  $\frac{2x + 8}{x - 11} + \frac{x + 34}{3x - 48} = 6;$

b)  $\frac{x - 10}{5} : \frac{x + 10}{4} = (x + 10) : 5(x - 10);$

c)  $\frac{4x + 9}{2x - 3} = \frac{3x + 8}{4 - x};$

d)  $\frac{x + 2}{x - 2} + \frac{x - 2}{x + 2} = 3;$

e)  $\frac{2x - 3}{x} + \frac{x}{2x - 3} = \frac{34}{15}.$

Zvláštním typem rovnic, které nejsou algebraické, ale lze je někdy převést na kvadratickou rovnici, jsou tzv. *rovnice iracionální*. Jsou to takové rovnice, v nichž je neznámá pod odmocninou. Příkladem takové rovnice je rovnice

$$(41) \quad \sqrt{2x + 7} + \sqrt{3x - 18} = \sqrt{7x + 1}.$$

Řešíme ji umocněním obou stran, tj. užíváme neekvivalentní úpravy, a proto platí to, co bylo řečeno na začátku tohoto odstavce. Poznamenejme ještě výslovně, že u iracionálních rovnic se omezíme pouze na ty reálné hodnoty neznámé, pro něž jsou výrazy pod odmocninami nezáporné. Jinak zde totiž nastávají některé potíže s komplexní odmocninou.

**Příklad 18.** Řešme výše uvedenou rovnici (41). Umocněním obou stran dostaneme rovnici

$$2x + 7 + 3x - 18 + 2\sqrt{(2x + 7)(3x - 18)} = \\ = 7x + 1.$$

Odtud ihned dostaneme rovnici

$$\sqrt{(2x + 7)(3x - 18)} = x + 6.$$

Dalším umocněním dostáváme rovnici

$$6x^2 - 15x - 126 = x^2 + 12x + 36$$

čili

$$5x^2 - 27x - 162 = 0.$$

To je už kvadratická rovnice s kořeny  $x_1 = 10$ ,  $x_2 = -3,6$ . Zkouškou zjistíme, že číslo  $x_1 = 10$  splňuje rovnici (41) a je tedy jejím kořenem. Číslo  $x_2 = -3,6$  však původní rovnici (41) nevyhovuje, neboť výraz  $\sqrt{3x - 18}$  nemá pro  $x = x_2$  smysl (pod odmocninou je

záporné číslo). Daná rovnice (41) má tedy jeden reálný kořen  $x = 10$ .

**Cvičení 17.** Řešte tyto iracionální rovnice:

a)  $\sqrt{2x+3} + \sqrt{9x-2} = 2\sqrt{5x+1}$ ;

b)  $\sqrt{2x-10} + \sqrt{3x+10} = \sqrt{2x-17} + \sqrt{3x+25}$ ;

c)  $\sqrt{5x+6} - \sqrt{2x+4} = \sqrt{x-2}$ ;

d)  $\sqrt{x^2+20} + \sqrt{x^2-20} = 2\sqrt{5}$ ;

e)  $\frac{2x^2-a}{\sqrt{x^2-b}} = \sqrt{x^2-b}$  (provedte diskusi!).

Některé iracionální rovnice můžeme řešit substitucí. Uvedme příklad takové rovnice.

**Příklad 19.** Řešme rovnici

$$\sqrt{x^2-3x+5} + x^2-3x-7 = 0.$$

Rovnici upravíme na tvar

$$\sqrt{x^2-3x+5} + (x^2-3x+5) - 12 = 0.$$

Tím dostaneme pod odmocninou i v závorce stejný kvadratický trojčlen. Položíme-li nyní substituci

$$\sqrt{x^2-3x+5} = y,$$

je  $x^2-3x+5 = y^2$  a poslední rovnice o neznámé  $x$  přejde na tuto rovnici o neznámé  $y$ :

$$y + y^2 - 12 = 0.$$

To je kvadratická rovnice s kořeny  $y_1 = 3$ ,  $y_2 = -4$ . Pomocí naší substituce přejdeme opět k původní neznámé. Máme dva případy:

a)  $\sqrt{x^2 - 3x + 5} = 3$ . Umocněním obou stran této rovnice na druhou dostaneme

$$x^2 - 3x + 5 = 9,$$

tj. kvadratickou rovnici

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

s kořeny  $x_1 = 4$ ,  $x_2 = -1$ .

b)  $\sqrt{x^2 - 3x + 5} = -4$ . V tomto případě neexistuje žádné reálné číslo  $x$ , pro něž by se tato odmocnina rovnala zápornému číslu. V tomto případě nedostáváme žádné kořeny  $x_1, x_2$ .

Zkouškou se přesvědčíme, že nalezená čísla  $x_1 = 4$ ,  $x_2 = -1$  jsou kořeny dané rovnice.

**Cvičení 18.** Řešte substitucí tyto iracionální rovnice:

a)  $\sqrt{5x + 9} + 5x + 9 = 56$ ;

b)  $\sqrt{x^2 - 85x + 405} + \frac{18}{\sqrt{x^2 - 85x + 405}} = 9$ ;

c)  $x^2 - 3x + 2 + 2\sqrt{x^2 - 3x + 4} = 6$ ;

d)  $\frac{\sqrt{39 + x^2} + 4}{\sqrt{39 + x^2} - 4} = \frac{3}{2}$ .

### 5. Slovní úlohy vedoucí na kvadratickou rovnici

Existuje řada slovních nebo početně geometrických úloh, které vedou na kvadratickou rovnici. Čtenáře upozorňujeme, že se u takovýchto úloh i při správném vý-

počtu může snadno stát, že některý z vypočtených kořenů úloze nevyhovuje, příp. nemá vůbec žádný skutečný smysl. To je třeba vždy u nalezených kořenů ověřit. Ukážeme si to na příkladě.

**Příklad 20.** Máme zjistit, zda existuje mnohoúhelník mající 35 úhlopříček.

Pro počet úhlopříček  $n$ -úhelníka platí vzorec

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

Toto číslo snadno dostaneme, uvážíme-li, že z každého vrcholu vychází  $n-3$  úhlopříček, tj. ze všech  $n$  vrcholů vychází  $n(n-3)$  úhlopříček. Protože je však nyní každá úhlopříčka počítána dvakrát, je skutečný počet úhlopříček roven výše uvedenému číslu.

Podle podmínek úlohy má být počet úhlopříček roven číslu 35, tj. má platit

$$\frac{n(n-3)}{2} = 35.$$

Odtud plyne kvadratická rovnice

$$n^2 - 3n - 70 = 0.$$

Její kořeny jsou  $n_1 = 7$  a  $n_2 = -10$ . Číslo  $n_1$  je celé a kladné, takže vyhovuje naší úloze. Hledaný mnohoúhelník je sedmiúhelník. Číslo  $n_2$  je sice celé, ale je záporné, takže nemůže označovat počet úhlopříček. Kořen  $n_2$  tedy naší úloze nevyhovuje.

**Cvičení 19.** Jak velká je strana rovnostranného trojúhelníka, jehož obsah je  $1000 \text{ cm}^2$ ?

**20.** Čtverec o straně 10 cm proměňte v obdélník téhož

obvodu, jehož obsah je roven 64 % obsahu čtverce. Určete rozměry obdélníka.

21. Určete tři čísla o vzájemném poměru 3 : 4 : 5, jejichž součet čtverců je 1250.

22. Na schodišti výšky 3,6 m by se zvětšil počet stupňů o 3, kdyby se výška každého stupně zmenšila o 4 cm. Kolik stupňů má schodiště?

23. Pravoúhlý trojúhelník mající délku odvěsen v poměru 5 : 12, má přeponu 26 m dlouhou. Jak dlouhé jsou odvěsny?

24. Úsečku dané délky rozdělte tak, aby menší část byla ve stejném poměru k větší, jako větší část k celé úsečce (tzv. zlatý řez).

25. Nádržku naplníme prvním kohoutem o 4 hodiny, druhým o 9 hodin později, než oběma současně. Za jakou dobu se naplní každým kohoutem zvláště?

26. V které číselné soustavě je číslo 288 vyjádřeno znakem 561?

27. V které číselné soustavě je číslo 157 vyjádřeno znakem 111?

28. Jak velký je poloměr kruhu, ve kterém tětíva 8 cm vzdálená od středu je o 13 cm větší než poloměr?

29. Na jednom konci tovární budovy dlouhé 80 m svítí žárovka o 100 dekalumenech, na druhém žárovka o 1000 dekalumenech. Které místo budovy je od obou světél stejně osvětleno?

30. Čitatel zlomku je o 3 větší než jeho jmenovatel, poměr hodnoty zlomku a jeho převrácené hodnoty je 64 : 25. Který je to zlomek?

31. Který  $n$ -úhelník má 275 úhlopříček?

32. Které dva mnohoúhelníky mají dohromady 17 stran a 47 úhlopříček?

33. Objem komolého kužele o výšce 21 cm je  $694 \text{ cm}^3$ . Poloměr dolní podstavy je o 5 cm větší, než poloměr podstavy horní. Vypočtete poloměry obou podstav.

34. Dva závodníci vyběhnou současně z místa M. První závodník, který běžel průměrnou rychlostí o  $0,2 \text{ m/sec}$  větší, doběhl do cíle 960 m vzdáleného o 20 sec dříve. Jaké byly jejich časy a rychlosti?

35. Z místa A vyjede jedno auto do místa B a současně vyjede z místa B do A druhé auto, které jede rychlostí o  $4 \text{ km/h}$  menší. Vypočtete rychlost obou aut, urazí-li druhé auto dráhu z B do A za dobu o 24 min větší, než urazí první auto dráhu z A do B. Vzdálenost míst A a B je 270 km.

36. Je dáno několik bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce. Proložíme-li každými dvěma přímkou, obdržíme 10 přímek. O kolik bodů se jedná?

37. Na kterém místě mezi Zemí a Měsícem se ruší přitažlivé síly obou těles, je-li hmota Měsíce rovna  $\frac{1}{81}$  hmoty Země?

## 6. Grafické řešení kvadratické rovnice

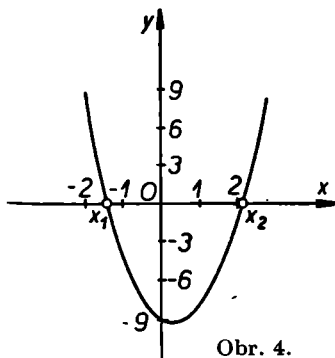
Grafické řešení slouží k přibližnému určení reálných kořenů dané algebraické rovnice s reálnými koeficienty.

První, nejjednodušší způsob grafického řešení rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0$$



spočívá v tom, že se nakreslí graf funkce  $f(x) = ax^2 + bx + c$  (grafem kvadratické funkce je parabola s osou ve směru osy  $y$ ) a body na ose  $x$ , ve kterých graf funkce  $f$  protne osu  $x$ , jsou pak kořeny dané rovnice. V případě, že daná kvadratická rovnice má dva reálné různé kořeny, protne parabola osu  $x$  ve dvou různých bodech.



Obr. 4.

Má-li rovnice jeden dvojnásobný kořen, pak je osa  $x$  tečnou paraboly (má s ní jeden společný bod). Konečně v případě, že rovnice má dva imaginární komplexně sdružené kořeny, neprotíná osa  $x$  parabolu vůbec. Na obr. 4 vidíme např. graf funkce

$$f(x) = 3x^2 - 2x - 9,$$

který protíná osu  $x$  ve dvou bodech  $x_1 \doteq -1,4$  a  $x_2 \doteq 2,1$ . Čísla  $x_1, x_2$  jsou pak přibližně kořeny rovnice

$$3x^2 - 2x - 9 = 0.$$

Je zřejmé, že tento způsob grafického řešení je pro kvadratickou rovnici velmi pracný a nevýhodný. Na

druhé straně má tu výhodu, že pomocí grafu lze hledat reálné kořeny algebraických rovnic libovolného stupně i nealgebraických rovnic tvaru  $f(x) = 0$ , kde  $f$  je libovolná reálná funkce reálné proměnné  $x$ . Pro kvadratické rovnice používáme raději následujícího způsobu.

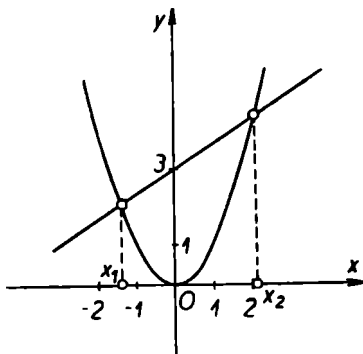
Napišme danou kvadratickou rovnici ve tvaru

$$x^2 = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}.$$

Víme, že grafem funkce  $y = x^2$  je parabola a grafem lineární funkce  $y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$  je přímka. Kořeny dané kvadratické rovnice jsou tedy  $x$ -ové souřadnice průsečíků grafů obou funkcí. Parabolu  $y = x^2$  si můžeme jednou provždy sestrojít s velkou přesností na milimetrový papír, neboť se hodí při řešení každé kvadratické rovnice. Graf lineární funkce  $y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$  sestrojíme v každém jednotlivém případě např. jako přímku určenou body  $\left[0, -\frac{c}{a}\right]$  a  $\left[1, -\frac{b+c}{a}\right]$  (přesvědčte se, že oba body jsou skutečně body grafu uvažované lineární funkce). Řečeno mluvou analytické geometrie je rovnice  $y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$  rovnicí přímky o směrnici  $-\frac{b}{a}$  a jejíž úsek na ose  $y$  je  $-\frac{c}{a}$ .

Je zřejmé, že metoda je zvláště výhodná, řešíme-li větší počet kvadratických rovnic, neboť pak měníme jen přímku, kdežto parabola zůstává. Přesnost nalezených kořenů závisí jako u všech grafických metod na možnostech grafického provedení. Hraje zde roli kvali-

ta rýsovacích prostředků, měřítko obrázku, tloušťka čar apod. K tomu přistupuje v našem případě i ta okolnost, že nelze přesně nakreslit parabolu a že ji tedy jen přibližně prokládáme několika vypočtenými body této paraboly.



Obr. 5.

**Příklad 21.** Řešme výše uvedeným způsobem opět rovnici

$$3x^2 - 2x - 9 = 0.$$

Rovnici přepíšeme na tvar

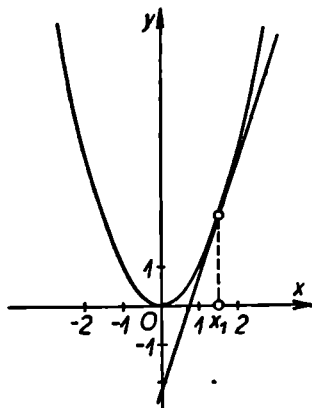
$$x^2 = \frac{2}{3}x + 3.$$

Na obr. 5 vidíme, že se grafy funkcí  $y = x^2$  a  $y = \frac{2}{3}x + 3$  protínají ve dvou bodech o  $x$ -ových souřadnicích  $x_1 \doteq -1,4$ ,  $x_2 \doteq 2,1$ . Grafem funkce  $y = \frac{2}{3}x + 3$  je

přímka o směrnici  $\frac{2}{3}$  a úseku na ose  $y$  rovném 3. Sestrojíme ji jako přímku procházející body  $[0, 3]$  a  $\left[1, \frac{11}{3}\right]$ .

**Příklad 22.** Řešme kvadratickou rovnici

$$4x^2 - 12x + 9 = 0.$$



Obr. 6.

Sestrojíme grafy funkcí  $y = x^2$  a  $y = 3x - \frac{9}{4}$ . Grafem

lineární funkce je přímka procházející body  $\left[0, -\frac{9}{4}\right]$ ,  $\left[1, \frac{3}{4}\right]$  — viz obr. 6. Tato přímka je tečnou paraboly  $y = x^2$ . Dotykový bod má souřadnici  $x \doteq 1,5$ . Daná rovnice má tedy dvojnásobný kořen  $x_1 \doteq 1,5$ .

Poznamenejme ještě, že při výše uvedeném způsobu grafického řešení můžeme dosáhnout již poměrně značné

přesnosti, je-li graf paraboly nakreslen dostatečně přesně, neboť přímkou, kterou kreslíme pro každou rovnici znova, umíme narýsovat zcela přesně. Obdobného způsobu se proto užívá i u kubické rovnice, kde rovněž lze dosáhnout toho, že jednu křivku si můžeme pevně narýsovat a pohybovat jen s přímkou.

Mějme kubickou rovnici

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Zavedme novou neznámou  $z$  vztahem

$$x = z - \frac{a}{3}.$$

Dosazením do kubické rovnice dostaneme rovnici

$$\left(z - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(z - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(z - \frac{a}{3}\right) + c = 0.$$

Úpravou této rovnice dostaneme kubickou rovnici tvaru

$$z^3 + Az + B = 0,$$

která již neobsahuje člen  $z^2$  (přesvědčte se sami umocněním a sloučením!). Poslední rovnici lze napsat ve tvaru

$$z^3 = -Az - B,$$

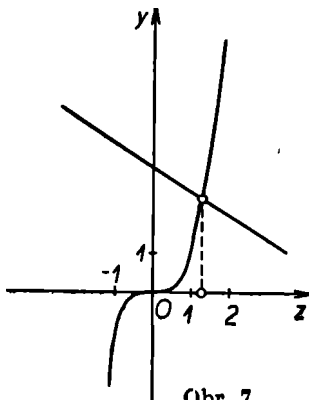
takže reálné kořeny této kubické rovnice nalezneme jako  $z$ -ové souřadnice průsečíků křivky  $y = z^3$  a přímkou  $y = -Az - B$ . Křivku  $y = z^3$  (tzv. kubickou parabolou) si můžeme opět nakreslit jednou provždy s velkou přesností a měníme pak pouze přímkou  $y = -Az - B$ . Pomocí vztahu  $x = z - \frac{a}{3}$  pak dostaneme nazpět kořeny původní rovnice.

**Příklad 23.** Řešme graficky kubickou rovnicí

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 4 = 0.$$

Provedeme substituci  $x = z + \frac{2}{3}$  (je  $a = -2$ ). Dostaneme tak rovnici

$$\left(z + \frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(z + \frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(z + \frac{2}{3}\right) - 4 = 0.$$



Obr. 7.

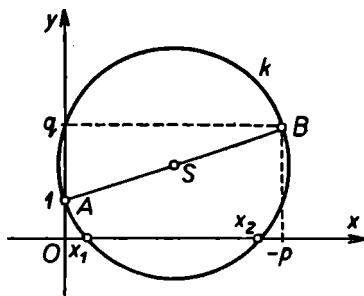
Úpravou dostaneme rovnici

$$z^3 = -\frac{2}{3}z + \frac{88}{27}.$$

Na obr. 7 vidíme, že kubická parabola  $y = z^3$  a přímka  $y = -\frac{2}{3}z + \frac{88}{27}$  mají jediný průsečík  $z \doteq 1,3$ . Ze substitučního vzorce  $x = z + \frac{2}{3}$  dostaneme jediný reálný kořen původní rovnice

$$x \doteq 1,3 + \frac{2}{3} \doteq 2.$$

Na závěr ukažme elegantní grafické řešení kvadratické rovnice, které má proti předchozím oběma způsobům výhodu v tom, že je přesné, neboť kořeny dané kvadratické rovnice lze sestrojiti euklidovským způsobem (tj. konstrukcí užívající pouze kružítko a pravítka).



Obr. 8.

Mějme kvadratickou rovnici tvaru

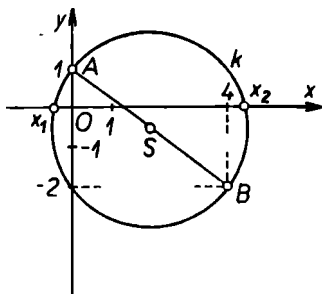
$$x^2 + px + q = 0.$$

V rovině s kartézskými souřadnicemi sestrojme body  $A \equiv [0, 1]$ ,  $B \equiv [-p, q]$  (viz obr. 8). Sestrojme dále střed  $S$  úsečky  $AB$  a kružnici  $k$  a střed  $S$  procházející body  $A$  a  $B$ . Tato kružnice buď protne osu  $x$  ve dvou bodech  $x_1, x_2$  (jako je tomu např. na obr. 8), nebo se osy  $x$  dotýká v bodě  $x_1$ , anebo konečně osa  $x$  kružnici  $k$  neprotíná. V prvním případě má daná kvadratická rovnice dva reálné různé kořeny  $x_1, x_2$ , v druhém případě má jeden dvojnásobný kořen a ve třetím případě nemá rovnice reálné kořeny vůbec.

K tomu, abychom se mohli přesvědčit o správnosti právě popsané konstrukce, nám stačí školní znalosti

analytické geometrie. Protože je bod  $S$  středem úsečky  $AB$ , jsou jeho souřadnice rovny aritmetickému průměru souřadnic bodů  $A$  a  $B$ , tedy  $S \equiv \left[ -\frac{p}{2}, \frac{1+q}{2} \right]$ . Poloměr  $r$  kružnice  $k$  je roven vzdálenosti bodů  $A, S$ , tedy

$$r = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2}.$$



Obr. 9.

Rovnice kružnice  $k$  je tedy

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1+q}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2.$$

Průsečíky této kružnice s osou  $x$  jsou body, jejichž druhá souřadnice je rovna nule. Dosadíme-li tedy do rovnice kružnice  $k$  za  $y$  číslo 0, přejde tato rovnice po úpravě v rovnici

$$x^2 + px + q = 0.$$

To znamená, že čísla  $x_1, x_2$  vyhovují této rovnici a jsou tedy skutečně hledané kořeny.



**Příklad 24.** Řešme kvadratickou rovnici

$$x^2 - 4x - 2 = 0.$$

V našem případě je  $A \equiv [0, 1]$ ,  $B \equiv [4, 2]$  (viz obr. 9). Kružnice  $k$  protíná osu  $x$  ve dvou bodech  $x_1 \doteq -0,5$ ,  $x_2 \doteq 4,5$ .

**Cvičení 38.** Řešte graficky tyto kvadratické rovnice (užívejte střídavě různých způsobů):

a)  $x^2 + x - 1 = 0$ ;      d)  $2x^2 + 7,2x + 7 = 0$ ;

b)  $2x^2 + x - 2 = 0$ ;      e)  $x^2 + x = 0$ ;

c)  $x^2 - 4x + 3 = 0$ ;      f)  $x^2 - 1 = 0$ .

## 7. Goniometrické řešení kvadratické rovnice

Vzorce udávající kořeny kvadratické rovnice s reálnými koeficienty nejsou vhodné pro výpočet pomocí logaritmů. Tato nevýhoda je obzvláště zřejmá, jsou-li koeficienty rovnice mnohociferná čísla. V tomto případě můžeme použít tzv. goniometrického řešení kvadratické rovnice, které nám umožňuje vyjádřit kořeny ve tvaru vhodném pro výpočet pomocí logaritmických tabulek. Nevýhodou goniometrického řešení je však to, že lze použít jen v případě, kdy rovnice má reálné kořeny (to je případ, který často nastává zvláště při řešení praktických úloh, kdy lze očekávat, že existuje reálné řešení).

Každou kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty můžeme psát ve tvaru

$$(42) \quad x^2 \pm 2ax \pm b^2 = 0, \quad \text{kde } a > 0, b > 0,$$

(případ, kdy  $a = 0$  nás nezajímá, neboť se pak jedná o ryze kvadratickou rovnici, jejíž řešení je snadné; poznamenejme dále, že zápis (42) chápeme jako zápis pro čtyři rovnice, které dostaneme pomocí všech kombinací znamének). Je-li totiž dána normovaná kvadratická rovnice

$$(43) \quad x^2 + px + q = 0, \quad p \neq 0,$$

a položíme-li  $\left| \frac{p}{2} \right| = a > 0$  a  $\sqrt{|q|} = b > 0$ , je  $|p| = 2a$  a  $|q| = b^2$ . Je tedy  $p = \pm 2a$  a  $q = \pm b^2$ . Dosazením do (43) dostáváme rovnici tvaru (42).

Všimněme si nyní podmínek pro to, aby rovnice (42) měla reálné kořeny. Platnost těchto podmínek je pak vždy třeba ověřit, dříve než přistoupíme k vlastnímu výpočtu kořenů.

Budeme rozeznávat dva případy:

I. Ve (42) je u  $b^2$  znaménko minus. Potom je diskriminant rovnice (42)

$$D = 4a^2 + 4b^2 = 4(a^2 + b^2) > 0$$

bez ohledu na to, zda je u  $2a$  znaménko plus nebo minus. Ostrá nerovnost pak platí v důsledku toho, že  $a \neq 0$ . V případě I tedy vždy existují dva reálné různé kořeny.

II. Ve (42) je u  $b^2$  znaménko plus. Potom je diskriminant rovnice (42)

$$D = 4a^2 - 4b^2 = 4(a^2 - b^2).$$

Aby měla rovnice reálné různé kořeny, musí být  $D > 0$ , tj.  $a^2 > b^2$ . Protože je  $a > 0$ ,  $b > 0$ , dostáváme podmínku

$$a > b.$$

Je-li  $D = 0$ , pak je  $a = b$  a rovnice má jeden dvojnásobný kořen. Rovnice (42) je pak tvaru

$$x^2 \pm 2ax + a^2 = 0.$$

čili

$$(x \pm a)^2 = 0.$$

Dvojnásobný kořen je pak roven číslu  $a$  nebo  $-a$  podle toho, je-li v rovnici (42) u  $2a$  znaménko plus nebo minus.

Je tedy zřejmé, že stačí, budeme-li se zabývat jen případy, kdy rovnice (42) má právě dva reálné různé kořeny. Můžeme tedy učinit tento závěr: Rovnice (42) má dva reálné různé kořeny v případě I (tj. je-li u  $b^2$  znaménko minus) vždy a v případě II (tj. je-li u  $b^2$  znaménko plus) tehdy, je-li  $a > b$ .

Uvedme nyní postup goniometrického řešení v případech I a II. V obou případech budeme dále rozlišovat, zda u koeficientu  $2a$  je znaménko plus nebo minus.

Ia. Rovnice (42) je tvaru

$$(44) \quad x^2 - 2ax - b^2 = 0, \quad \text{kde } a > 0, b > 0.$$

V tomto případě má rovnice dva různé reálné kořeny

$$(45) \quad x_1 = a + \sqrt{a^2 + b^2}, \quad x_2 = a - \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Položme

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} 2\varphi,$$

kde  $0 < 2\varphi < \frac{\pi}{2}$ , neboť  $\frac{b}{a} > 0$ .

Nyní budeme postupně upravovat výrazy pro kořeny (45). Úpravy budeme dělat paralelně pro oba kořeny.

$$x_1 = a + a \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \quad x_2 = a - a \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

$$x_1 = a + a \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi}, \quad x_2 = a - a \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 2\varphi},$$

$$x_1 = a + \frac{a}{\cos 2\varphi}, \quad x_2 = a - \frac{a}{\cos 2\varphi},$$

$$x_1 = a \frac{\cos 2\varphi + 1}{\cos 2\varphi}, \quad x_2 = a \frac{\cos 2\varphi - 1}{\cos 2\varphi},$$

$$x_1 = \frac{2a \cos^2 \varphi}{\cos 2\varphi}, \quad x_2 = -\frac{2a \sin^2 \varphi}{\cos 2\varphi},$$

$$x_1 = \frac{2a \cos^2 \varphi \sin \varphi}{\cos 2\varphi \sin \varphi}, \quad x_2 = -\frac{2a \sin^2 \varphi \cos \varphi}{\cos 2\varphi \cos \varphi},$$

$$x_1 = \frac{a \sin 2\varphi \cos \varphi}{\cos 2\varphi \sin \varphi}, \quad x_2 = -\frac{a \sin 2\varphi \sin \varphi}{\cos 2\varphi \cos \varphi},$$

$$x_1 = a \operatorname{tg} 2\varphi \operatorname{cotg} \varphi, \quad x_2 = -a \operatorname{tg} 2\varphi \operatorname{tg} \varphi,$$

$$x_1 = b \operatorname{cotg} \varphi, \quad x_2 = -b \operatorname{tg} \varphi.$$

Tím se nám podařilo vyjádřit kořeny (45) ve tvaru

$$(46) \quad x_1 = b \operatorname{cotg} \varphi, \quad x_2 = -b \operatorname{tg} \varphi,$$

který je již vhodný pro výpočet pomocí logaritmů.

Ib. Rovnice (42) je tvaru

$$(47) \quad x^2 + 2ax - b^2 = 0, \quad \text{kde } a > 0, b > 0.$$

Také v tomto případě má rovnice dva reálné různé kořeny

$$(48) \quad x_1 = -a + \sqrt{a^2 + b^2}, \quad x_2 = -a - \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Nyní platí

$$x_1 = -a + \sqrt{a^2 + b^2} = -(a - \sqrt{a^2 + b^2}),$$

$$x_2 = -a - \sqrt{a^2 + b^2} = -(a + \sqrt{a^2 + b^2}).$$

Kořeny  $x_1, x_2$  jsou až na znaménko rovny kořenům v případě Ia. Je tedy

$$(49) \quad x_1 = b \operatorname{tg} \varphi, \quad x_2 = -b \operatorname{cotg} \varphi,$$

kde  $\varphi$  je voleno tak, že  $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} 2\varphi$ ,  $0 < 2\varphi < \frac{\pi}{2}$ .

IIa. Rovnice (42) je tvaru

$$(50) \quad x^2 - 2ax + b^2 = 0, \quad \text{kde } a > 0, b > 0.$$

Aby měla tato rovnice dva reálné, různé kořeny, musí být  $a > b$ , tj.  $0 < \frac{b}{a} < 1$ . Potom jsou kořeny dány vzorci

$$(51) \quad x_1 = a + \sqrt{a^2 - b^2}, \quad x_2 = a - \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Položme

$$\frac{b}{a} = \sin 2\varphi,$$

kde  $0 < 2\varphi < \frac{\pi}{2}$  (takový úhel  $2\varphi$  existuje, neboť je  $0 < \frac{b}{a} < 1$ ). Pro kořeny (51) provedme tyto paralelní úpravy:

$$x_1 = a + a \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \quad x_2 = a - a \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

$$x_1 = a + a \sqrt{1 - \sin^2 2\varphi}, \quad x_2 = a - a \sqrt{1 - \sin^2 2\varphi},$$

$$x_1 = a + a \cos 2\varphi, \quad x_2 = a - a \cos 2\varphi,$$

$$x_1 = 2a \cos^2 \varphi, \quad x_2 = 2a \sin^2 \varphi,$$

$$x_1 = \frac{2a \cos^2 \varphi \sin \varphi}{\sin \varphi}, \quad x_2 = \frac{2a \sin^2 \varphi \cos \varphi}{\cos \varphi},$$

$$x_1 = \frac{a \sin 2\varphi \cos \varphi}{\sin \varphi}, \quad x_2 = \frac{a \sin 2\varphi \sin \varphi}{\cos \varphi},$$

$$x_1 = a \sin 2\varphi \operatorname{cotg} \varphi, \quad x_2 = a \sin 2\varphi \operatorname{tg} \varphi,$$

$$x_1 = b \operatorname{cotg} \varphi, \quad x_2 = b \operatorname{tg} \varphi.$$

Tím jsme vyjádřili kořeny (51) ve tvaru

$$(52) \quad x_1 = b \operatorname{cotg} \varphi, \quad x_2 = b \operatorname{tg} \varphi,$$

který je vhodný k logaritmování.

IIb. Rovnice (42) je tvaru

$$(53) \quad x^2 + 2ax + b^2 = 0, \quad \text{kde } a > 0, b > 0.$$

Aby měla tato rovnice dva reálné různé kořeny, musí být opět splněna podmínka  $a > b$ . Kořeny rovnice (53) jsou pak tvaru

$$(54) \quad \begin{aligned} x_1 &= -a + \sqrt{a^2 - b^2} = -(a - \sqrt{a^2 - b^2}), \\ x_2 &= -a - \sqrt{a^2 - b^2} = -(a + \sqrt{a^2 - b^2}). \end{aligned}$$

Jsou tedy až na znaménko rovny kořenům rovnice (50), takže je

$$(55) \quad x_1 = -b \operatorname{tg} \varphi, \quad x_2 = -b \operatorname{cotg} \varphi,$$

kde  $0 < 2\varphi < \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{b}{a} = \sin 2\varphi$ .

**Příklad 25.** Řešme goniometricky rovnici

$$x^2 - 6,642x + 10,017 = 0.$$

Převědme ji nejprve na tvar (42). Zřejmě je

$$a = \left| \frac{-6,642}{2} \right| = 3,321, \quad b = \sqrt{10,017}.$$

Rovnice je tvaru (50) a protože je  $a > b$  (jest  $3,321 > \sqrt{10,017}$ ), nastává případ IIa. Určíme tedy úhel  $\varphi$  takový, že

$$\sin 2\varphi = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{10,017}}{3,321} \quad \text{a} \quad 0 < 2\varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Je tedy  $\varphi = 36^\circ 11'$ . Podle vzorců (52) je pak

$$x_1 = \sqrt{10,017} \cotg 36^\circ 11' \doteq 4,327,$$

$$x_2 = \sqrt{10,017} \operatorname{tg} 36^\circ 11' \doteq 2,315.$$

Naše rovnice má tedy dva reálné kořeny  $x_1 \doteq 4,327$  a  $x_2 \doteq 2,315$ .

**Cvičení 39.** Řešte goniometricky tyto kvadratické rovnice:

a)  $x^2 - 2,379x + 1,38785 = 0;$

b)  $x^2 - 1,121x + 0,15575 = 0;$

c)  $x^2 + x + 0,2211 = 0;$

d)  $x^2 + 0,39672x - 0,05164 = 0.$

## 8. Odmocniny komplexních čísel s celými kladnými odmocniteli

V odstavci 2 této kapitoly jsme zavedli druhou odmocninu komplexního čísla  $x \neq 0$  jako komplexní číslo  $y$ , které umocněno na druhou dá dané číslo  $x$ , tj.  $y^2 = x$ .

Viděli jsme také, že taková čísla  $y$  existují ke každému číslu  $x \neq 0$  právě dvě (jsou vzájemně opačná). Zvláštní význam mají druhé odmocniny z čísla 1, tj. čísla 1 a  $-1$ .

Podobným způsobem lze definovat k danému komplexnímu číslu  $x$  i  $n$ -tou odmocninu pro  $n > 2$ ;  $n$  je přirozené číslo.

Řekneme, že číslo  $y$  je  $n$ -tou odmocninou komplexního čísla  $x \neq 0$ , platí-li

$$y^n = x.$$

Lze dokázat tuto větu:

**Věta 8.** *K danému komplexnímu číslu  $x \neq 0$  existuje právě  $n$  různých čísel  $y_1, \dots, y_n$  takových, že  $y_1^n = y_2^n = \dots = y_n^n = x$  (tj.  $n$  různých  $n$ -tých odmocnin).*

Důkaz této věty provedeme později. Ukážeme nejprve některé příklady. Tak např. existují tři třetí odmocniny čísla 1. Jsou to čísla

$$1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(přesvědčte se sami umocněním těchto čísel na třetí!).

Podobně se můžeme přesvědčit, že čtvrtými odmocninami čísla 1 jsou čísla

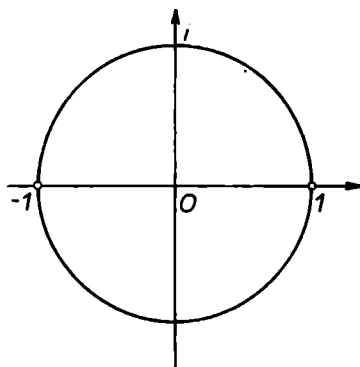
$$1, -1, i, -i.$$

Jejich umocněním na čtvrtou dostáváme vždy číslo 1.

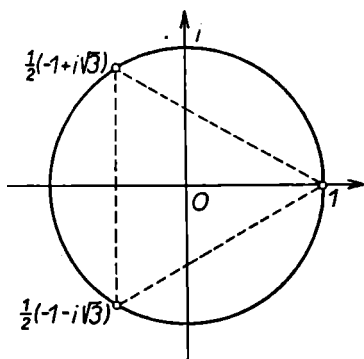
Podívejme se nyní na polohu těchto  $n$ -tých odmocnin z čísla 1 v Gaussově rovině. Na obr. 10 jsou zakresleny obě druhé odmocniny, na obr. 11 jsou všechny třetí odmocniny a na obr. 12 jsou čtvrté odmocniny z čísla 1. Ihned vidíme, že obrazy odmocnin leží vesměs na jednotkové kružnici. Obrazy druhých odmocnin jsou přitom



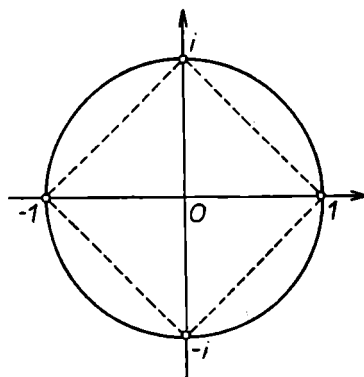
souměrně sdružený podle počátku, obrazy třetích odmocnin tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníka a obrazy čtvrtých odmocnin tvoří vrcholy čtverce. Jsou tedy obrazy těchto odmocnin na jednotkové kružnici rozmístěny pravidelně. A skutečně lze dokázat, že  $n$ -té



Obr. 10.



Obr. 11.



Obr. 12.



čísla, umocníme-li čísla  $y_1, \dots, y_n$  daná vzorcí (56) na  $n$ -tou. Vezměme totiž číslo

$$y_i = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2(i-1)\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2(i-1)\pi}{n} \right),$$

kde  $i = 1, \dots, n$ . Podle Moivreova vzorce nyní platí

$$\begin{aligned} y_i^n &= r[\cos(\varphi + 2(i-1)\pi) + i \sin(\varphi + 2(i-1)\pi)] = \\ &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = x, \end{aligned}$$

a to jsme měli dokázat.

Je-li speciálně  $x = 1$ , je jeho goniometrické vyjádření

$$x = \cos 0 + i \sin 0 \quad (\text{je } r = |1| = 1).$$

Pro  $n = 2$  dávají vzorce (56) dvě různé hodnoty  $y_1, y_2$  pro druhé odmocniny čísla 1:

$$y_1 = \cos \frac{0}{2} + i \sin \frac{0}{2} = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$\begin{aligned} y_2 &= \cos \frac{0 + 2\pi}{2} + i \sin \frac{0 + 2\pi}{2} = \\ &= \cos \pi + i \sin \pi = -1. \end{aligned}$$

Pro  $n = 3$  dostáváme pro třetí odmocniny čísla 1 hodnoty

$$y_1 = \cos \frac{0}{3} + i \sin \frac{0}{3} = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$\begin{aligned} y_2 &= \cos \frac{0 + 2\pi}{3} + i \sin \frac{0 + 2\pi}{3} = \\ &= \cos \frac{2}{3} \pi + i \sin \frac{2}{3} \pi = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_3 &= \cos \frac{0 + 4\pi}{3} + i \sin \frac{0 + 4\pi}{3} = \\
 &= \cos \frac{4}{3} \pi + i \sin \frac{4}{3} \pi = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.
 \end{aligned}$$

Konečně pro  $n = 4$  vycházejí tyto čtvrté odmocniny z čísla 1:

$$y_1 = \cos \frac{0}{4} + i \sin \frac{0}{4} = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$\begin{aligned}
 y_2 &= \cos \frac{0 + 2\pi}{4} + i \sin \frac{0 + 2\pi}{4} = \\
 &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_3 &= \cos \frac{0 + 4\pi}{4} + i \sin \frac{0 + 4\pi}{4} = \\
 &= \cos \pi + i \sin \pi = -1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_4 &= \cos \frac{0 + 6\pi}{4} + i \sin \frac{0 + 6\pi}{4} = \\
 &= \cos \frac{3}{2} \pi + i \sin \frac{3}{2} \pi = -i.
 \end{aligned}$$

Tyto hodnoty jsou v souhlasu s hodnotami pro odmocniny čísla 1 uvedenými výše.

Podobně pro  $n$ -té odmocniny čísla 1 vycházejí podle (56) tyto hodnoty:

$$y_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$y_2 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n},$$

$$y_3 = \cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n},$$

.....,

$$y_n = \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Čísla  $y_1, y_2, \dots, y_n$  mají vesměs absolutní hodnoty rovné jedné a leží proto na jednotkové kružnici. Je dále vidět, že amplituda každého následujícího čísla  $y_i$  je o  $\frac{2\pi}{n}$  větší než amplituda předcházejícího, přičemž  $\frac{2\pi}{n}$  je středový úhel v pravidelném  $n$ -úhelníku odpovídající jeho straně. Je tedy skutečně platné výše uvedené tvrzení, že  $n$ -té odmocniny z čísla 1 leží na jednotkové kružnici a tvoří vrcholy pravidelného  $n$ -úhelníka s jedním vrcholem v bodě 1 (je to vrchol  $y_1$ ).

Ze vzorců (56) plyne dále, že tato pravidelnost rozložení  $n$ -tých odmocnin v Gaussově rovině není jen vlastností  $n$ -tých odmocnin čísla 1. Stejnou úvahou jako v předchozím odstavci zjistíme ze vzorců (56), že všechny  $n$ -té odmocniny libovolného čísla  $x \neq 0$  o absolutní hodnotě  $r$  a amplitudě  $\varphi$  leží na kružnici o poloměru  $\sqrt[n]{r}$  (neboť toto číslo je absolutní hodnotou čísel  $y_1, \dots, y_n$  ve vzorcích (56)) a tvoří vrcholy pravidelného  $n$ -úhelníka se středem v počátku (zde je opět amplituda každého čísla  $y_i$  větší o pevné číslo  $\frac{2\pi}{n}$  než amplituda čísla  $y_{i-1}$ ).

Vzorce (56) ve větě 9 nám udávají  $n$  různých komplexních odmocnin  $y_1, \dots, y_n$  ke každému komplexnímu číslu  $x \neq 0$ . Z věty 9 však neplyne, že čísla  $y_1, \dots, y_n$

představují již všechny odmocniny čísla  $x$ . Plyne to však ihned z věty 8, jejíž důkaz nyní provedeme.

Podle definice jsou  $n$ -té odmocniny čísla  $x \neq 0$  kořeny rovnice  $y^n = x$ , tj. rovnice

$$y^n - x = 0.$$

To je algebraická rovnice  $n$ -tého stupně a má tedy podle věty 4 nejvýše  $n$  různých kořenů. Čísla  $y_1, \dots, y_n$  daná vzorcí (56) jsou tedy všechny kořeny této rovnice, čímž je věta 8 dokázána.

**Cvičení 40.** Dokažte, že absolutní hodnota čísla

$$y_i = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2(i-1)\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2(i-1)\pi}{n} \right),$$

$i = 1, \dots, n$ , je rovna číslu  $\sqrt[n]{r}$ .

**Příklad 26.** Nalezněme všechny šesté odmocniny čísla  $i$ .

Číslo  $i$  vyjádříme v goniometrickém tvaru

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}.$$

Ze vzorců (56) dostáváme pro šesté odmocniny čísla

$$y_1 = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} = \cos 15^\circ + i \sin 15^\circ,$$

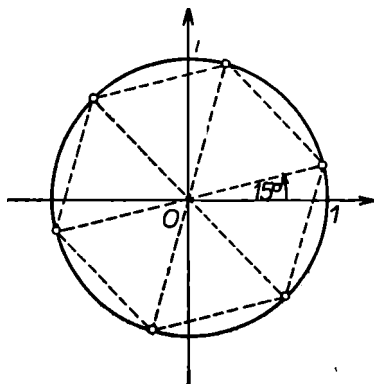
$$y_2 = \cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} = \cos 75^\circ + i \sin 75^\circ,$$

$$y_3 = \cos \frac{9\pi}{12} + i \sin \frac{9\pi}{12} = \cos 135^\circ + i \sin 135^\circ,$$

$$y_4 = \cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12} = \cos 195^\circ + i \sin 195^\circ,$$

$$y_5 = \cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} = \cos 255^\circ + i \sin 255^\circ,$$

$$y_6 = \cos \frac{21\pi}{12} + i \sin \frac{21\pi}{12} = \cos 315^\circ + i \sin 315^\circ.$$



Obr. 13.

Obrazy čísel  $y_1, y_2, \dots, y_6$  vidíme na obr. 13. Tvoří vrcholy pravidelného šestiúhelníka.

**Cvičení 41.** Nalezněte všechny hodnoty 5-tých odmocnin čísla 1 a nakreslete jejich obrazy v Gaussově rovině.

Na závěr poznamenejme, že zatímco výpočet  $n$ -tých odmocnin komplexního čísla umíme provést jen pomocí goniometrického vyjádření, máme u druhých odmocnin na vybranou i algebraický vzorec (28).

## 9. Kubické rovnice a rovnice čtvrtého stupně

Pro kořeny kvadratické rovnice s komplexními koeficienty jsme odvodili vzorec (38), který vyjadřuje její kořeny  $x_1, x_2$  pomocí algebraického výrazu sestaveného z koeficientů rovnice a z druhých odmocnin racionálních výrazů sestavených z koeficientů rovnice. Podobné vzorce obsahující ovšem i třetí odmocniny je možno odvodit pro rovnici kubickou a pro rovnici čtvrtého stupně, zatímco pro kořeny rovnic pátého a vyššího stupně neexistují vůbec žádné takové algebraické vzorce. To je velmi zajímavá vlastnost algebraických rovnic stupně vyššího než 4.

Otázkou neřešitelnosti algebraických rovnic stupně vyššího než 4 pomocí odmocnin se zabývala řada vynikajících matematiků jako např. Ruffini, Cauchy, Abel, Galois. Jejich úsilí vedlo nejen k rozřešení této otázky, ale také k vytvoření teorie grup, která se dnes velmi usilovně studuje v algebře. To ovšem neznamená, že rovnice stupně vyššího než 4 by byly neřešitelné. To by byl velice chybný závěr. Matematika zná dnes velice mnoho různých způsobů, jak kořeny takovýchto rovnic vypočítat. Charakteristické pro tyto metody je však to, že nedávají obecné vzorce pro kořeny dané rovnice a umožňují po jistém konečném počtu aritmetických operací získat přibližné hodnoty kořenů s předem danou přesností. O některých z těchto přibližných metod si něco povíme v kapitole 3.

Jak již bylo řečeno, existují pro kubické rovnice a pro rovnice čtvrtého stupně vzorce udávající kořeny pomocí algebraických výrazů obsahujících koeficienty rovnice a odmocniny. Tyto vzorce jsou však tak složité (zejména u rovnic čtvrtého stupně), že nemají téměř žádný prak-



tický význam. I tyto rovnice se proto vyplatí řešit pomocí přibližných metod. Přesto ukažme pro zajímavost, jak vypadají tyto vzorce pro kubickou rovnici.

Buď dána rovnice tvaru

$$(57) \quad x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Podobně jako v odstavci 5 této kapitoly zavedeme novou neznámou  $y$  pomocí substituce

$$(58) \quad x = y - \frac{a}{3}.$$

Tím dostaneme kubickou rovnici tvaru

$$(59) \quad y^3 + \left(-\frac{a^2}{3} + b\right)y + \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right) = 0,$$

ve které již chybí člen s  $y^2$ . Tuto rovnici napíšeme ve tvaru

$$(60) \quad y^3 + py + q = 0,$$

$$\text{kde } p = -\frac{a^2}{3} + b, \quad q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c.$$

Kořeny rovnice (60) lze nyní vyjádřit pomocí tzv. *Cardanova vzorce*

$$(61) \quad y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \\ + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Tento vzorec obsahuje druhé a třetí odmocniny komplexních čísel, jejichž výpočet je obtížný. Přitom nelze hodnoty třetích odmocnin libovolně kombinovat. Lze

dokázat, že je možno v prvném sčítanci zvolit kteroukoliv ze tří hodnot třetí odmocniny, avšak ve druhém sčítanci je pak nutno vzít tu hodnotu odmocniny, aby součin obou odmocnin byl roven číslu  $-\frac{p}{3}$ . Přípustnými kombinacemi různých třetích odmocnin pak dostáváme kořeny rovnice (60). Kořeny rovnice (57) pak dostaneme z kořenů rovnice (60) pomocí vzorce (58).

Ze vzorce (61) je vidět, že velmi záleží na čísle

$$D = - \left( \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right),$$

které nazýváme *diskriminantem* rovnice (57). V případě, kdy je  $D > 0$ , je výraz pod druhou odmocninou záporný a jsme nuceni počítat i v případě rovnice s reálnými koeficienty třetí odmocniny komplexních čísel, což je úloha obtížná a zdlouhavá. V tomto případě je praktický význam vzorce (61) velmi malý.

Zde je velmi zajímavá tato skutečnost: lze dokázat, že v případě, kdy  $D > 0$ , má kubická rovnice tři vzájemně různé reálné kořeny, ačkoliv právě v tomto případě je výraz pod druhou odmocninou záporný, takže reálné kořeny dostáváme oklikou přes odmocniny z komplexních čísel. To je proslulý tzv. „*casus irreducibilis*“ kubické rovnice.

### Příklad 27. Kubická rovnice

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

má tři reálné různé kořeny  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -2$ ,  $x_3 = 3$ .  
Položme

$$x = y + \frac{2}{3}.$$

Dostaneme tak rovnici

$$y^3 - \frac{19}{3}y + \frac{56}{27} = 0.$$

Je tedy  $p = -\frac{19}{3}$  a  $q = \frac{56}{27}$ , takže je

$$D = -\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right) = -\left[\left(\frac{56}{27}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(-\frac{19}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{27}\right] \doteq 8,$$

tj.  $D > 0$  a nastává tzv. casus irreducibilis.

Vzorce pro kořeny rovnice čtvrtého stupně nebudeme uvádět, neboť jsou ještě mnohem složitější.

**Cvičení 42.** Řešte pomocí Cardanova vzorce rovnici

$$x^3 - 9x^2 + 36x - 80 = 0.$$

## 10. Binomické rovnice

Důležitým typem algebraických rovnic  $n$ -tého stupně, které již vlastně umíme obecně řešit, jsou tzv. *binomické rovnice*, tj. rovnice typu

$$(62) \quad x^n + a = 0,$$

kde  $a$  je dané komplexní číslo.

Přepíšeme-li rovnici (62) na tvar

$$(63) \quad x^n = -a,$$

vidíme, že jejími kořeny jsou ta čísla  $x$ , která umocněna na  $n$ -tou dají číslo  $-a$ . Tato čísla již známe: jsou to právě všechny  $n$ -té odmocniny z čísla  $-a$ . Binomická

rovnice má tedy  $n$  různých kořenů. Kořeny každé binomické rovnice pak můžeme snadno spočítat pomocí vzorců (58).

**Příklad 28.** Řešme binomickou rovnici

$$x^6 - i = 0.$$

Je tedy  $x^6 = i$ , čili kořeny jsou právě všechny šesté odmocniny z čísla  $i$ . Ty jsme však již spočítali v příkladu 26.

Je samozřejmé, že se při řešení binomické rovnice snažíme vyhnout goniometrickému vyjádření komplexních čísel. V případě reálného  $a$  lze v dané rovnici (62) zavést novou neznámou  $y$  substitucí

$$(64) \quad x = \sqrt[n]{|a|} y.$$

Je-li  $a > 0$ , dostaneme novou rovnici

$$ay^n + a = 0,$$

tj.

$$(65) \quad y^n + 1 = 0.$$

Kořeny rovnice (65) jsou  $n$ -té odmocniny čísla  $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$  a lze je snadno napsat pomocí vzorce (64).

Pro  $n = 3$  můžeme řešit rovnici (65) i jiným způsobem. Lze ji totiž napsat ve tvaru

$$(y + 1)(y^2 - y + 1) = 0,$$

odkud je patrné, že jedním kořenem je číslo  $y_1 = -1$  a druhé dva jsou kořeny kvadratické rovnice

$$y^2 - y + 1 = 0,$$

tj. čísla  $y_1 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $y_2 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Příklad 29.** Řešme rovnici

$$x^3 + 27 = 0.$$

Protože je  $a = 27 > 0$ , dostaneme substitucí  $x = \sqrt[3]{27y}$  rovnici

$$27y^3 + 27 = 0,$$

tj. rovnici

$$y^3 + 1 = 0,$$

jejíž kořeny jsou — jak již víme —

$$y_1 = -1, y_2 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, y_3 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Kořeny dané rovnice jsou tedy tyto:

$$x_1 = \sqrt[3]{27y_1} = 3 \cdot (-1) = -3,$$

$$x_2 = \sqrt[3]{27y_2} = 3 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3}{2} + i \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$x_3 = \sqrt[3]{27y_3} = 3 \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3}{2} - i \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Probereme nyní druhý případ, kdy je  $a < 0$ . V tom případě plyne ze (64) vztah  $x = \sqrt[n]{-ay}$  čili  $x^n = -ay^n$ . Dosazením do rovnice (62) dostaneme rovnici

$$-ay^n + a = 0$$

čili rovnici

$$(66) \quad y^n - 1 = 0.$$

Kořeny rovnice (66) jsou známé  $n$ -té odmocniny z čísla 1, které jsou uvedeny na str. 71 a lze je ihned obdržet ze vzorců (56).

Je-li  $n$  sudé, je možno rovnici (66) napsat ve tvaru

$$(y^{\frac{n}{2}} - 1)(y^{\frac{n}{2}} + 1) = 0$$

a řešit dvě binomické rovnice polovičního stupně

$$y^{\frac{n}{2}} - 1 = 0,$$

$$y^{\frac{n}{2}} + 1 = 0.$$

Pro  $n = 3$  je možno rovnici (66) napsat ve tvaru

$$(y - 1)(y^2 + y + 1) = 0,$$

odkud je vidět, že jedním kořenem je číslo  $y_1 = 1$  a druhé dva kořeny jsou kořeny kvadratické rovnice

$$y^2 + y + 1 = 0,$$

$$\text{tj. } y_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**Příklad 30.** Řešme rovnici

$$x^4 - 16 = 0.$$

Zde je  $a < 0$ . Položíme-li  $x = \sqrt[4]{16}y$ , dostaneme rovnici

$$16y^4 - 16 = 0$$

čili rovnici

$$y^4 - 1 = 0.$$

Tato rovnice je sudého stupně, takže ji lze psát ve tvaru

$$(y^2 - 1)(y^2 + 1) = 0$$

čili ve tvaru

$$(y - 1)(y + 1)(y^2 + 1) = 0.$$

Jejími kořeny jsou tedy čísla

$$y_1 = 1, \quad y_2 = -1$$

a kořeny rovnice

$$y^2 + 1 = 0,$$

tj. čísla  $y_3 = i$  a  $y_4 = -i$ . Pro kořeny dané rovnice pak dostáváme hodnoty

$$x_1 = \sqrt[4]{16} y_1 = 2 \cdot 1 = 2,$$

$$x_2 = \sqrt[4]{16} y_2 = 2 \cdot (-1) = -2,$$

$$x_3 = \sqrt[4]{16} y_3 = 2 \cdot i = 2i,$$

$$x_4 = \sqrt[4]{16} y_4 = 2 \cdot (-i) = -2i.$$

**Cvičení 43.** Řešte tyto rovnice:

a)  $2(x^3 + 1) = 3(x^3 - 2)$ ;

b)  $a^3x^3 + b^3 = 0$  (provedte diskusi);

c)  $216x^3 + 1 = 0$ ;

d)  $729x^3 = 512$ ;

e)  $27x^4 + 1000x = 0$ ;

f)  $x^3 + 0,001331 = 0$ ;

g)  $(x + 2)^3 + (x - 2)^3 = 8(3x - 128)$ ;

h)  $x^4 - 256 = 0$ ;

i)  $16x^4 + 81 = 0$ ;

j)  $8x^4 - 14x^2 = 7(x^2 - 1)^2 + 9$ ;

k)  $(3x - 4)^4 = 625$  (návod: položte  $3x - 4 = z$ );

l)  $20x^2 + \frac{97}{x^2} + 16 = \frac{4(x^2 + 2)^2}{x^2}$ .

**44.** Poměr kvádrů o čtvercové podstavě k jeho výšce je 3 : 7. Jaké jsou rozměry kvádrů, je-li jeho objem  $4032 \text{ cm}^3$ ?

45. Prodloužením jedné strany krychle na pětinasobek vznikl pravidelný čtyřboký hranol s pětinasobnou výškou, přičemž se objem tělesa zvětšil o  $216 \text{ cm}^3$ . Jak veliká byla hrana krychle?

46. Součet objemů dvou krychlí, jejichž hrany jsou navzájem v poměru  $7 : 9$ , je  $8576 \text{ cm}^3$ . Jak veliké jsou jejich hrany?

47. Rohy krychle o hraně  $a$  jsou seříznuty rovinami, které na každé hraně utínají tytéž úseky. Jak velký je tento úsek, je-li objem tělesa tak vzniklého pěti šesti-nami objemu krychle?

## 11. Trinomické rovnice

Ukážeme nyní jeden typ rovnic vyššího stupně, které lze snadno převést na rovnici kvadratickou a dvě rovnice binomické. Jsou to tzv. *rovnice trinomické* (trinom = trojčlen) typu

$$(67) \quad ax^{2n} + bx^n + c = 0,$$

kde  $a \neq 0$  a  $n \geq 2$  je přirozené číslo. Trinomické rovnici stupně 4 se někdy říká *rovnice bikvadratická*.

Probereme nejprve nejjednodušší případ, kdy  $c = 0$ . Potom je rovnice (67) tvaru

$$ax^{2n} + bx^n = 0$$

čili

$$x^n(ax^n + b) = 0.$$

Odtud je patrné, že rovnice má  $n$ -násobný kořen  $x = 0$  a ostatní  $n$  kořeny dostaneme jako kořeny binomické rovnice

$$ax^n + b = 0.$$



Předpokládejme nyní, že  $c \neq 0$  a zavedme novou neznámou  $y$  vztahem

$$(68) \quad x^n = y.$$

Potom je  $x^{2n} = y^2$ , takže rovnice (67) přejde v rovnici

$$(69) \quad ay^2 + by + c = 0,$$

což je kvadratická rovnice s kořeny  $y_1, y_2$ .

Je-li  $y_1, y_2$ , pak plyne ze vztahu (68), že kořeny původní rovnice jsou kořeny dvou binomických rovnic  $x^n = y_1, x^n = y_2$ , tj. rovnic

$$(70) \quad \begin{cases} x^n - y_1 = 0, \\ x^n - y_2 = 0. \end{cases}$$

Protože je  $c \neq 0$ , nemůže být žádný z kořenů  $y_1, y_2$  rovnice (69) roven nule, takže každá z rovnic (70) má  $n$  různých kořenů. Celkem dostáváme  $2n$  kořenů původní rovnice (67).

Je-li  $y_1 = y_2$ , pak ze vztahu (68) plyne jediná rovnice

$$(71) \quad x^n - y_1 = 0.$$

Protože je  $c \neq 0$ , je  $y_1 \neq 0$  a binomická rovnice (71) má  $n$  různých kořenů  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Lze ji tedy psát podle věty 3 první kapitoly ve tvaru

$$(72) \quad (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = 0.$$

Protože má rovnice (69) jeden dvojnásobný kořen  $y_1$ , lze ji obdobně psát ve tvaru

$$a(y - y_1)^2 = 0$$

čili vzhledem k (68) ve tvaru

$$(73) \quad a(x^n - y_1) = 0.$$

Vzhledem k (71) a (72) lze napsat rovnici (73) ve tvaru

$$a(x - x_1)^2(x - x_2)^2 \dots (x - x_n)^2 = 0,$$

odkud je zřejmo, že v případě  $y_1 = y_2$  jsou kořeny binomické rovnice (71) dvojnásobnými kořeny původní rovnice (67).

**Příklad 31.** Řešme rovnici

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0.$$

Substitucí  $x^2 = y$  dostaneme kvadratickou rovnici

$$y^2 - 10y + 9 = 0$$

o kořenech  $y_1 = 9$ ,  $y_2 = 1$ . Kořeny dané rovnice jsou pak kořeny binomické rovnice

$$x^2 - 9 = 0,$$

tj.  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -3$  a binomické rovnice

$$x^2 - 1 = 0,$$

tj.  $x_3 = 1$ ,  $x_4 = -1$ . Daná rovnice má tedy čtyři různé reálné kořeny  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -3$ ,  $x_3 = 1$ ,  $x_4 = -1$ .

**Příklad 32.** Řešme rovnici

$$x^6 + 19x^3 - 216 = 0.$$

Položíme-li  $x^3 = y$ , dostaneme kvadratickou rovnici

$$y^2 + 19y - 216 = 0$$

o kořenech  $y_1 = 8$ ,  $y_2 = -27$ .

Řešme nejprve binomickou rovnici

$$x^3 - 8 = 0.$$

Provedením substituce  $x = \sqrt[3]{8} z$  dostaneme rovnici

$$8z^3 - 8 = 0$$

čili rovnici

$$z^3 - 1 = 0.$$

Ta má, jak již víme z odstavce 9, za kořeny čísla

$$z_1 = 1, \quad z_2 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_3 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Rovnice  $x^3 - 8 = 0$  má pak kořeny

$$x_1 = \sqrt[3]{8} z_1 = 2,$$

$$x_2 = \sqrt[3]{8} z_2 = -1 + i \sqrt{3},$$

$$x_3 = \sqrt[3]{8} z_3 = -1 - i \sqrt{3}.$$

Nyní řešme druhou binomickou rovnici

$$x^3 + 27 = 0.$$

Ta již byla řešena v příkladu 29 a má kořeny

$$x_4 = -3, \quad x_5 = \frac{3}{2} + i \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad x_6 = \frac{3}{2} - i \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Čísla  $x_1, x_2, \dots, x_6$  jsou pak kořeny dané trinomické rovnice.

**Příklad 33.** Řešme rovnici

$$2x^3 - 64x + 512 = 0.$$

Danou rovnici lze dělit číslem dvě. Substitucí  $x^2 = y$  dostaneme kvadratickou rovnici

$$y^2 - 32y + 216 = 0,$$

která má jeden dvojnásobný kořen  $y_1 = 16$ . Dostáváme tak binomickou rovnici

$$x^4 - 16 = 0,$$

jež byla řešena v příkladu 30. Má čtyři kořeny

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 2i, \quad x_4 = -2i,$$

jež jsou všem dvojnásobnými kořeny dané rovnice.

**Cvičení 48.** Řešte tyto trinomické rovnice:

a)  $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ ;

b)  $2x^4 + 5x^2 + 2 = 0$ ;

c)  $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$ ;

d)  $x^8 + 2x^4 - 3 = 0$ ;

e)  $x^8 - 620x^4 - 3125 = 0$ ;

f)  $x^8 - 272x^4 + 4096 = 0$ ;

g)  $x^4 - 2a^2x^2 + a^4 - b^4 = 0$  (provedte diskusi!);

h)  $x^4 - (m^2 + n^2)x^2 + m^2n^2 = 0$  (provedte diskusi!).

**49.** Řešte tyto rovnice:

a)  $4x^4 - x^2 = 18$ ;

b)  $x^2(x^2 - 44) = 12(12 - x^2)$ ;

c)  $(x^2 - 10)^2 - 20(x^2 - 10) - 741 = 0$ ;

d)  $(9x^4 + 82x^2 + 9)(x^2 - 1) = 0$ ;

e)  $(x^2 - 4x + 5)(x^2 + 4x - 5) = 40(5 + x)$ ;

f)  $x^6 - 75x^3 = 25(125 + x^3)$ ;

g)  $200(x^3 - 1) + 16x^3(x^3 + 1) - 264 = 101x^3$ ;

h)  $x^3(x^3 - 10) = 6(16 - x^3)$ ;

i)  $x(81x^4 - 276) = 64(x^4 - 1)$ .

**50.** Řešte rovnice

a)  $100x^{-4} + 21x^{-2} - 1 = 0$ ;

b)  $x^3 - \frac{215}{x^3} = \frac{1}{x^3} - 215$ .

51. Vypočtete délku odvěsen pravoúhlého trojúhelníka, je-li jeho obsah  $270 \text{ cm}^2$  a přepona  $39 \text{ cm}$ .

52. Obsah obdélníka je  $6 \text{ dm}^2$ . Krychle o hraně rovné jeho delší straně má objem o  $19 \text{ cm}^3$  větší, než krychle o hraně rovné jeho kratší straně. Určete délku stran obdélníka.

53. Úhlopříčky bočních stěn kváдру mají délky  $10 \text{ cm}$  a  $24 \text{ cm}$ . Poměr součtu délek obou stran obdélníka podstavy k první úhlopříčce je roven poměru druhé úhlopříčky k výšce kváдру. Určete rozměry kváдру.

Podobnou metodou jako trinomické rovnice lze řešit i rovnice tvaru

$$(74) \quad \sqrt[n]{x} + a \sqrt[2n]{x} + b = 0.$$

Zde je třeba pro potíže s mnohoznačností komplexní odmocniny se omezit jen na reálný obor. Levá strana rovnice (74) má pak smysl pro  $x \geq 0$ , takže hledáme jen nezáporné kořeny. V rovnici (74) provedeme substituci

$$(75) \quad y = \sqrt[2n]{x}.$$

Potom je  $y^2 = \sqrt[n]{x}$  a rovnice (74) pak nabude tvaru

$$(76) \quad y^2 + ay + b = 0.$$

Jsou-li kořeny  $y_1, y_2$  kvadratické rovnice (76) nezáporné, dostaneme kořeny rovnice (74) pomocí (75), tj. jako kořeny iracionálních rovnic

$$(77) \quad \sqrt[2n]{x} = y_1, \quad \sqrt[2n]{x} = y_2.$$

**Příklad 34.** Řešme rovnici

$$\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 12.$$

Předpokládáme-li, že je  $x \geq 0$ , dostaneme pomocí substituce  $y = \sqrt[4]{x}$  kvadratickou rovnici

$$y^2 + y - 12 = 0$$

s kořeny  $y_1 = 3$ ,  $y_2 = -4$ . Řešíme tedy iracionální rovnice

$$\sqrt[4]{x} = 3,$$

$$\sqrt[4]{x} = -4.$$

Prvá rovnice má reálný kladný kořen  $x = 3^4 = 81$ , který je kořenem dané rovnice (provedte zkoušku!). Druhá iracionální rovnice nemá žádný reálný kořen, neboť čtvrtá odmocnina kladného čísla v reálném oboru je podobně jako druhá odmocnina číslo kladné.

**Cvičení 54.** Řešte rovnice

a)  $\sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt[3]{x^2} = 54;$

b)  $3x^3 - 45x\sqrt{x} = 243;$

c)  $x\sqrt[3]{x} - 10\sqrt[3]{x^2} - 375 = 0;$

d)  $5\sqrt{\frac{x^4}{x^2 - 12}} - 2x\sqrt{\frac{x}{x^2 - 12}} = 2;$

e)  $\sqrt{x} - 10\sqrt[4]{x} = 24.$

## 12. Zjednodušení odmocnin ze surdických výrazů

**Příklad 35.** Řešme tuto kvadratickou rovnici

$$x^2 + x\sqrt{7} + \sqrt{3} = 0.$$

Podle vzorců pro kořeny kvadratické rovnice dostáváme

$$x_{1,2} = -\frac{\sqrt{7}}{2} \pm \sqrt{\frac{7}{4} - \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{7}}{2} \pm \frac{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{2}.$$

Výraz  $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ , ke kterému jsme takto dospěli, je pro počítání nepohodlný. Protože k takovým výrazům často dospíváme při algebraickém řešení i jiných typů rovnic, ukážeme si proto způsob, kterým lze takovéto výrazy v některých případech upravit na výrazy jednodušší.

Výraz  $7-4\sqrt{3}$  můžeme snadno upravit na tvar

$$7 - \sqrt{48},$$

dáme-li číslo 4 pod odmocninu. V dalším se proto omezíme na zkoumání výrazů tvarů

$$a \pm \sqrt{b},$$

kterým říkáme *surdické dvojčleny*. Úkolem tohoto odstavce bude pak nalezení způsobu, jak napsat výraz

$$(78) \quad \sqrt{a \pm \sqrt{b}}, \quad \text{kde } a \geq 0, b \geq 0, a \geq \sqrt{b},$$

v jednodušším tvaru, tj. ve tvaru, který již neobsahuje opakované odmocniny. To se nám podaří jen tehdy, je-li číslo  $a^2 - b$  čtvercem celého čísla. Za tohoto předpokladu můžeme postupovat takto:

Položme

$$(79) \quad \sqrt{a + \sqrt{b}} = x, \quad \sqrt{a - \sqrt{b}} = y.$$

Podle (78) je  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  a  $x \geq y$ . Umocněním obou rovností na druhou dostaneme

$$x^2 = a + \sqrt{b}, \quad y^2 = a - \sqrt{b}.$$

Sečtením těchto vztahů dostáváme vztah

$$(80) \quad x^2 + y^2 = 2a$$

a jejich vynásobením dostaneme vztah

$$(81) \quad x^2 y^2 = a^2 - b.$$

Zde je vidět, proč musí být výraz  $a^2 - b$  čtvercem celého čísla. Potom je totiž číslo  $\sqrt{a^2 - b}$  celé kladné a rovnost (81) lze odmocnit. Protože je  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ , dostaneme

$$xy = \sqrt{a^2 - b}$$

čili

$$(82) \quad 2xy = 2\sqrt{a^2 - b}.$$

Z rovností (80) a (82) dostáváme sečtením a odečtením rovností

$$x^2 + 2xy + y^2 = 2(a + \sqrt{a^2 - b}),$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = 2(a - \sqrt{a^2 - b})$$

a odtud

$$(83) \quad (x + y)^2 = 2(a + \sqrt{a^2 - b}),$$

$$(x - y)^2 = 2(a - \sqrt{a^2 - b}).$$

Výraz  $a + \sqrt{a^2 - b}$  je zřejmě nezáporný (je součtem dvou nezáporných čísel). Dokažme, že je i výraz  $a -$



—  $\sqrt{a^2 - b}$  nezáporný. Kdyby bylo  $a - \sqrt{a^2 - b} < 0$ , bylo by  $a < \sqrt{a^2 - b}$ . Protože jsou obě strany této nerovnosti nezáporné, lze ji umocnit na druhou a dostaneme nerovnost  $a^2 < a^2 - b$ . Odečteme-li na obou stranách poslední nerovnosti číslo  $a^2$ , dostaneme nerovnost  $0 < -b$  čili  $b < 0$ . To je však spor se (78). Lze tedy odmocnit rovnice (83) a dostaneme

$$(84) \quad \begin{aligned} x + y &= \sqrt{2(a + \sqrt{a^2 - b})}, \\ x - y &= \sqrt{2(a - \sqrt{a^2 - b})}. \end{aligned}$$

(Jak víme, je  $x - y \geq 0$ , neboť  $x \geq y$ .)

Sečtením a odečtením rovnic (84) dostáváme vztahy

$$\begin{aligned} 2x &= \sqrt{2(a + \sqrt{a^2 - b})} + \sqrt{2(a - \sqrt{a^2 - b})}, \\ 2y &= \sqrt{2(a + \sqrt{a^2 - b})} - \sqrt{2(a - \sqrt{a^2 - b})}. \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$(85) \quad x = \sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - b})} + \sqrt{\frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - b})},$$

$$(86) \quad y = \sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - b})} - \sqrt{\frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - b})}.$$

Protože je číslo  $a^2 - b$  čtvercem celého čísla, jsou čísla  $\sqrt{a^2 - b}$ , která se vyskytují pod odmocninami, přirozená. Výrazy (79) jsme tak za výše uvedených předpokladů vyjádřili vzorci (85), (86), které již neobsahují opakovaně odmocniny.

Vraťme se nyní k příkladu uvedenému na počátku této kapitoly. Ve výrazu  $\sqrt{7 - \sqrt{48}}$  je  $a = 7 > 0$ ,  $b = 48 > 0$  a je  $a \geq \sqrt{b}$ , neboť  $7 \geq \sqrt{48}$  (výraz má tedy

reálný smysl). Podle vzorce (86), který odpovídá znaménku minus, dostaneme vyjádření

$$\sqrt{7 - \sqrt{48}} = \sqrt{\frac{1}{2}(7 + 1)} - \sqrt{\frac{1}{2}(7 - 1)} = 2 - \sqrt{3}.$$

To je již velmi jednoduché vyjádření. Daná kvadratická rovnice má tedy tyto kořeny:

$$x_{1,2} = -\frac{\sqrt{7}}{2} \pm \frac{2 - \sqrt{3}}{2}.$$

**Cvičení 55.** Zjednodušte tyto výrazy:

- a)  $\sqrt{6 + \sqrt{11}}$ ; b)  $\sqrt{5 - \sqrt{24}}$ ; c)  $\sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$ ;  
 d)  $\sqrt{a^2 - 2x\sqrt{a^2 - x^2}}$  (provedte diskusi!).

**56.** Řešte následující kvadratické rovnice a řešení pište v co nejjednodušším tvaru:

- a)  $x^2 + x\sqrt{7} + \sqrt{3} = 0$ ;  
 b)  $x^2 + x\sqrt{23} - 2\sqrt{7} = 0$ ;  
 c)  $2x^2 - 2x\sqrt{3} + \sqrt{2} = 0$ ;  
 d)  $2x^2 + 2x\sqrt{5} - \sqrt{6} = 0$ .

### 13. Reciproké rovnice třetího stupně

*Reciprokou rovnicí* stupně  $n$  rozumíme algebraickou rovnicí tvaru

$$(87) \quad a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

kde  $a_0 = a_n$ ,  $a_1 = a_{n-1}$ ,  $a_2 = a_{n-2}$ , obecně  $a_i = a_{n-i}$ ,

$i = 0, \dots, n$ . (Slovy lze definovat reciproké rovnice jako algebraické rovnice, ve kterých koeficienty, jejichž indexy se doplňují na číslo  $n$ , jsou stejné.) Tak např.

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0, \quad \text{kde } a \neq 0,$$

je reciprokou rovnicí stupně třetího, rovnice

$$(88) \quad ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0, \quad \text{kde } a \neq 0,$$

je reciprokou rovnicí stupně čtvrtého.

Reciproké rovnice mají některé zajímavé vlastnosti. Tak např. jsou všechny jejich kořeny různé od nuly, neboť absolutní člen  $a_n$ , který je jak známo součinem kořenů, je roven koeficientu  $a_0$ , tj. je různý od nuly.

Další zajímavou vlastnost reciprokých rovnic si ukažme pro jednoduchost na reciproké rovnici čtvrtého stupně (88). Je-li  $x_1$  kořenem rovnice (88), je  $x_1 \neq 0$  a můžeme tedy dělit rovnici (88) číslem  $\frac{1}{x_1^4}$ . Dostáváme tak rovnici

$$a + b\left(\frac{1}{x_1}\right) + c\left(\frac{1}{x_1^2}\right) + b\left(\frac{1}{x_1^3}\right) + a\left(\frac{1}{x_1^4}\right) = 0,$$

tj. rovnici

$$a\left(\frac{1}{x_1}\right)^4 + b\left(\frac{1}{x_1}\right)^3 + c\left(\frac{1}{x_1}\right)^2 + b\left(\frac{1}{x_1}\right) + a = 0.$$

Porovnáním této rovnice a rovnice (88) vidíme, že číslo  $\frac{1}{x_1}$  je kořenem rovnice (88). Je-li tedy  $x_1$  kořenem rovnice (88), je i převrácená (reciproká) hodnota  $\frac{1}{x_1}$  kořenem reciproké rovnice (88). To je také důvod pro termín „reciproká rovnice“.

Reciproké rovnice třetího, čtvrtého a pátého stupně lze snadno řešit pomocí kvadratických rovnic. Ukážeme

si nejprve metodu řešení reciproké rovnice třetího stupně. To je rovnice tvaru

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0, \quad \text{kde } a \neq 0.$$

Rovnici upravíme na tvar

$$a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = 0.$$

Dalšími úpravami dostáváme postupně rovnice

$$a(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1) = 0,$$

$$(x + 1)[a(x^2 - x + 1) + bx] = 0,$$

$$(x + 1)[ax^2 + (b - a)x + a] = 0.$$

Rovnice má tedy kořen  $x_1 = -1$  a ostatní dva kořeny jsou kořeny kvadratické rovnice

$$ax^2 + (b - a)x + a = 0.$$

Normováním této rovnice dostaneme rovnici

$$x^2 + \frac{b - a}{a}x + 1 = 0,$$

odkud je vidět, že kořeny  $x_1, x_2$  této rovnice jsou vzájemně převrácené hodnoty, neboť je  $x_1x_2 = 1$ , tj.  $x_2 = \frac{1}{x_1}$ .

**Příklad 36.** Řešme rovnici

$$2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0.$$

Rovnici upravíme jak bylo výše uvedeno. Dostáváme postupně rovnice

$$2(x^3 + 1) + 7x(x + 1) = 0,$$

$$2(x + 1)(x^2 - x + 1) + 7x(x + 1) = 0,$$

$$(x + 1)[2(x^2 - x + 1) + 7x] = 0,$$

$$(x + 1)(2x^2 + 5x + 2) = 0.$$

Je tedy  $x_1 = -1$  a další kořeny  $x_2, x_3$  vyhovují kvadratické rovnici

$$2x^2 + 5x + 2 = 0,$$

takže je

$$x_2 = -\frac{1}{2}, \quad x_3 = -2.$$

**Cvičení 57.** Řešte reciprokou rovnici

$$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0.$$

**58.** Analogickou metodou jako reciproké rovnice řešte tyto rovnice:

a)  $x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = 0;$

b)  $12x^3 + 13x^2 - 13x - 12 = 0;$

c)  $x^3 - x^2 + x - 1 = 0;$

d)  $x^2 - 3x + 3 = \frac{x-1}{6} + \frac{1}{x};$

e)  $3 \cdot 2^{x^3-1} \cdot 2^{-1x(x-1)} = 1.$

**59.** Řešte tyto rovnice (postupujte opět analogicky, jako při řešení reciproké rovnice):

a)  $3x^3 + 26x^2 + 52x + 24 = 0;$

b)  $27x^3 - 9x^2 - 3x + 1 = 0.$

**60.** Z lepenkové čtvercové desky o straně délky 4 dm máme vystříhnout v rozích stejné čtverečky tak, aby ze zbytku desky bylo možno zhotovit otevřenou krabici o objemu 4 dm<sup>3</sup>.

## 14. Reciproké rovnice čtvrtého stupně

Při řešení rovnice

$$(88) \quad ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0, \quad a \neq 0,$$

postupujeme takto: Rovnici (88) dělíme nejprve výrazem  $x^2$ . Lze předpokládat, že  $x^2 \neq 0$ , neboť  $x = 0$  není kořenem rovnice (88). Dostaneme rovnici

$$ax^2 + bx + c + b \frac{1}{x} + a \frac{1}{x^2} = 0$$

čili rovnici

$$(89) \quad a \left( x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + b \left( x + \frac{1}{x} \right) + c = 0.$$

Zavedeme nyní novou neznámou substitucí

$$(90) \quad x + \frac{1}{x} = y.$$

Z (90) plyne umocněním a úpravou, že

$$(91) \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Dosazením z (90) a (91) do (89) dostáváme rovnici

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0$$

čili

$$ay^2 + by + (c - 2a) = 0.$$

To je kvadratická rovnice pro  $y$  s kořeny  $y_1, y_2$ . Je-li  $y_1 \neq y_2$ , pak z rovnic

$$x + \frac{1}{x} = y_1, \quad x + \frac{1}{x} = y_2$$

vynásobením výrazem  $x \neq 0$  dostáváme dvě kvadratické rovnice pro  $x$

$$x^2 - xy_1 + 1 = 0, \quad x^2 - xy_2 + 1 = 0,$$

jejichž kořeny jsou hledané čtyři kořeny rovnice (88). Je-li  $y_1 = y_2$ , pak dostaneme jedinou kvadratickou rovnici  $x^2 - xy_1 + 1 = 0$ , jejíž každý kořen je dvojnásobným kořenem rovnice (88).

**Příklad 37.** Řešme reciprokou rovnici

$$x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0.$$

Rovnici upravíme takto:

$$x^2 - 7x + 14 - 7\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0,$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0.$$

Položme  $x + \frac{1}{x} = y$ . Potom je  $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$  a dostáváme rovnici

$$y^2 - 2 - 7y + 14 = 0,$$

tj. kvadratickou rovnici

$$y^2 - 7y + 12 = 0$$

s kořeny  $y_1 = 4$ ,  $y_2 = 3$ . Řešme dále rovnice

$$x + \frac{1}{x} = 4, \quad x + \frac{1}{x} = 3.$$

Dostaneme tak kvadratickou rovnici

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

s kořeny  $x_1 = 2 + \sqrt[3]{3}$ ,  $x_2 = 2 - \sqrt[3]{3}$  a kvadratickou rovnicí

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

s kořeny  $x_3 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ ,  $x_4 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ .

Daná rovnice má tedy čtyři kořeny  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . Přesvědčte se, že je  $x_2 = \frac{1}{x_1}$ ,  $x_4 = \frac{1}{x_3}$ .

**Cvičení 61.** Řešte tyto reciproké rovnice:

- a)  $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$ ;
- b)  $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$ ;
- c)  $2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$ ;
- d)  $5x^4 - 26x^3 + 10x^2 - 26x + 5 = 0$ .

62. Analogickým způsobem jako reciproké rovnice čtvrtého stupně řešte tyto rovnice:

- a)  $5x^4 - 26x^3 + 26x - 5 = 0$ ;
- b)  $x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 6x + 9 = 0$ ;
- c)  $12x^2 - 25x^{\frac{3}{2}} + 25x^{\frac{1}{2}} - 12 = 0$ .

V dalším příkladu ukážeme, jak lze někdy užít reciprokých rovnic při řešení rovnic binomických.

**Příklad 38.** Řešme binomickou rovnicí

$$32x^5 - 243 = 0.$$

Je tedy  $x^5 - \frac{243}{32} = 0$ ,

a substitucí  $x = y \sqrt[5]{\frac{243}{32}}$  dostaneme rovnici

$$y^5 - 1 = 0.$$



Levou stranu této rovnice můžeme rozložit takto:

$$(y - 1)(y^4 + y^3 + y^2 + y + 1) = 0.$$

Okamžitě dostáváme kořen  $y_1 = 1$ . Ostatní kořeny jsou kořeny reciprokové rovnice

$$y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 = 0.$$

Řešíme-li tuto rovnici metodou uvedenou výše, dostaneme kořeny

$$y_{2,3} = \frac{(\sqrt{5} - 1) \pm i \sqrt{2\sqrt{5}(\sqrt{5} + 1)}}{4},$$
$$y_{4,5} = \frac{-(\sqrt{5} + 1) \pm i \sqrt{2\sqrt{5}(\sqrt{5} - 1)}}{4}.$$

Kořeny  $x_1, \dots, x_5$  dané binomické rovnice dostaneme

z kořenů  $y_1, \dots, y_5$  užitím vztahu  $x_i = y_i \sqrt[5]{\frac{243}{32}}$ ,  
 $i = 1, \dots, 5$ .

**Cvičení 63.** Řešte rovnici

a)  $(x - 4)^5 = 64$ ;

b)  $(2x - 1)^5 - (x + 2)^5 = 0$ .

(Návod: V obou případech lze vhodnou substitucí převést danou rovnici na rovnici binomickou.)

**64.** Řešte rovnici

$$x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1025 = 0.$$

(Návod: Užitím binomické věty převedte danou rovnici na rovnici binomickou.)

## 15. Reciproké rovnice pátého stupně

Reciprokou rovnicí pátého stupně

$$(92) \quad ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0,$$

kde  $a \neq 0$ , řešíme podobně jako reciprokou rovnicí třetího stupně. Rovnici (92) upravujeme postupně takto:

$$\begin{aligned} a(x^5 + 1) + bx(x^3 + 1) + cx^2(x + 1) &= 0, \\ a(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) + \\ + bx(x + 1)(x^2 - x + 1) + cx^2(x + 1) &= 0, \\ (x + 1)[a(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) + \\ + bx(x^2 - x + 1) + cx^2] &= 0, \\ (x + 1)[ax^4 - (a - b)x^3 + \\ + (a - b + c)x^2 - (a - b)x + a] &= 0. \end{aligned}$$

Jedním kořenem je zřejmě číslo  $x_1 = -1$ . Ostatní kořeny jsou kořeny rovnice

$$ax^4 - (a - b)x^3 + (a - b + c)x^2 - (a - b)x + a = 0,$$

což je reciproká rovnice čtvrtého stupně, kterou jsme se naučili řešit v odstavci 14.

**Příklad 39.** Řešme rovnici

$$4x^5 + 12x^4 + 11x^3 + 11x^2 + 12x + 4 = 0.$$

Úpravami dostáváme postupně tyto rovnice:

$$\begin{aligned} 4(x^5 + 1) + 12x(x^3 + 1) + 11x^2(x + 1) &= 0, \\ (x + 1)[4(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) + \end{aligned}$$

$$+ 12x(x^2 - x + 1) + 11x^2] = 0,$$

$$(x + 1)(4x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 8x + 4) = 0.$$

Jeden kořen je  $x_1 = -1$  a zbývající kořeny dostaneme jako kořeny reciproké rovnice

$$4x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 8x + 4 = 0.$$

Tuto rovnici nyní vyřešíme. Nejprve ji upravíme na tvar

$$4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 8\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0.$$

Substitucí  $x + \frac{1}{x} = y$  přejde rovnice na kvadratickou rovnici

$$4y^2 + 8y - 5 = 0$$

s kořeny  $y_1 = \frac{1}{2}$ ,  $y_2 = -\frac{5}{2}$ . Rozeznáme nyní dva případy:

I.  $x + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ . Odtud

$$2x^2 - x + 2 = 0,$$

což je kvadratická rovnice s kořeny  $x_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{15}}{4}$ .

II.  $x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$ . Odtud

$$2x^2 + 5x + 2 = 0,$$

což je kvadratická rovnice s kořeny  $x_4 = -\frac{1}{2}$ ,  $x_5 = -2$ .

Daná reciproká rovnice má tedy kořeny

$$x_1 = -1, x_2 = \frac{1 + i\sqrt{15}}{4}, x_3 = \frac{1 - i\sqrt{15}}{4},$$

$$x_4 = -\frac{1}{2}, x_5 = -2.$$

Přesvědčte se, že je  $x_3 = \frac{1}{x_2}$ ,  $x_5 = \frac{1}{x_4}$ .

**Cvičení 65.** Řešte tyto reciproké rovnice:

a)  $8x^5 - 6x^4 - 83x^3 - 83x^2 - 6x + 8 = 0;$

b)  $4x^5 - 11x^3 - 11x^2 + 4 = 0.$

**66.** Analogickou metodou jako reciprokou rovnicí pá-  
tého stupně řešte tyto rovnice:

a)  $3x^5 - 19x^4 + 42x^3 - 42x^2 + 19x - 3 = 0;$

b)  $6x^5 - 41x^4 + 97x^3 - 97x^2 + 41x - 6 = 0;$

c)  $x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 24x - 6 = 0.$