5. kapitola

VÍCEROZMĚRNÉ PROSTORY

Úvahy o čtyřrozměrném prostoru lze bez nesnází zevšeobecnit na prostory s větším počtem rozměrů než 4. Naznačíme si to zde jen stručně, protože myšlenkově už to ve srovnání s předcházející kapitolou neznamená v podstatě nic nového. Řekněme si tedy hned, co rozumíme euklidovským n-rozměrným prostorem E_n, přitom n je jakékoli pevně zvolené přirozené číslo, tedy $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ atd.

Množinu (souhrn) jakýchkoli prvků, jimž říkáme body, nazveme euklidovským n-rozměrným prostorem E_n, když jsou splněny tyto dva předpoklady:

1. Je možno zavést v E_n takovou soustavu souřadnou, že každý bod A tohoto prostoru je jednoznačně určen n souřadnicemi $a_1, a_2, \ldots, a_n$; tyto souřadnice jsou vzájemně na sobě nezávislé a každá probíhá množinu všech reálných čísel. Toto určení bodu A souřadnicemi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zapisujeme stručně symbolem $A(a_1; a_2; \ldots; a_n)$.

2. Jsou-li $A(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ a $B(b_1; b_2; \ldots; b_n)$ dva body v prostoru E_n, je jejich vzdálenost v dána vzorcem

$$v = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2}. \tag{5,1}$$

Píšeme také $v = AB$. Právě popsaná soustava souřadnic v prostoru E_n nazývá se *kartézská*.

Bod, jehož všechny souřadnice jsou rovny nule, nazývá se *počátek* příslušné soustavy souřadnic.

Ze vzorce (5,1) plyne, že dva různé body se liší aspoň v jedné souřadnici, neboť z požadavku $v = 0$ plyne ihned $b_1 = a_1, b_2 = a_2, \ldots, b_n = a_n$. Ale je-li vzdálenost dvou bodů rovna nule, pak přirozeně říkáme, že tyto body splývají, že jsou totožné; v takovém případě se nejedná o dva různé body.

Všechny základní poznatky z předcházející kapitoly přepíšeme nyní do vícerozměrných prostorů; výklad už zde však je stručný, rovněž důkazy jednotlivých vět jsou přenechány píli čtenáře nebo jsou jen stručně naznačeny, protože myšlenkový postup je doslova stejný jako v prostoru E_4.

Věta 5,1. *Střed S úsečky, jejíž krajní body jsou $A(a_1; a_2; \ldots; a_n)$, $B(b_1; b_2; \ldots; b_n)$, má souřadnice*

$$s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}, s_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} \ldots, s_n = \frac{a_n + b_n}{2}. \quad (5,2)$$

Důkaz. Pomocí vzorce (5,1) ověříme platnost vztahu $AS = BS = \frac{1}{2} AB$. – Až čtenář na základě věty 5,4 zjistí, jak vypadá analytické vyjádření přímky v prostoru E_n, dokáže i zde, že střed úsečky AB leží na přímce určené body A, B; stačí k tomu opakovat postup, který vedl od rovnice (4,16) k rovnici (4,17) v předcházející kapitole.

Střed S úsečky AB není jediným bodem v prostoru E_n, který je stejně vzdálen od bodu A jako od bodu B. Všechny body X, pro které je $AX = BX$, vytvoří množinu bodů v prostoru E_n, která se podobně jako ve čtyřrozměrném prostoru nazývá *nadrovina* v prostoru E_n; předpokládáme přitom, že body A, B jsou různé.

Analytické vyjádření nadroviny je obdobné jako dřív, na místo lineární rovnice ve čtyřech proměnných nastoupí lineární rovnice v n proměnných.

Věta 5,2. *V kartézských souřadnicích má nadrovina v prostoru E_n rovnici lineární.*

Důkaz je stejný jako u věty 4,2. Jsou-li $A(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ a $B(b_1; b_2; \ldots; b_n)$ dva různé body a $X(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ běžný bod zkoumané nadroviny, která je „osou souměrnosti" úsečky AB, vede užitím vzorce (5,1) podmínka $AX = BX$ na rovnici

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n + p_{n+1} = 0, \tag{5,3}$$

kde je při $\varrho \neq 0$,

$$p_1 = \varrho(b_1 - a_1), p_2 = \varrho(b_2 - a_2), \ldots, p_n = \varrho\,(b_n - a_n),$$

$$p_{n+1} = \frac{\varrho}{2}(a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2 + \ldots + a_n^2 - b_n^2). \tag{5,4}$$

Dále se už jen opakuje úvaha z důkazu věty 4,2.

Protože pojem vzdálenosti dvou bodů v prostoru E_n je nám už znám, můžeme hovořit i zde o nadkouli. *Nadkoule v prostoru E_n je množina všech takových bodů tohoto prostoru, jež jsou od daného bodu, tzv. středu nadkoule, stejně vzdáleny; vzdálenost každého bodu nadkoule od jejího středu nazývá se poloměr nadkoule.* Obdoba věty 4,3 platí ovšem i zde, $X(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ znamená přitom zase běžný bod nadkoule s jeho souřadnicemi:

Věta 5,3. *Nadkoule o středu $S(s_1; s_2; \ldots; s_n)$ a poloměru $r > 0$ má v kartézských souřadnicích v prostoru E_n rovnici*

$$(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 + \ldots + (x_n - s_n)^2 = r^2. \tag{5,5}$$

Z tohoto tvaru rovnice nadkoule poznáváme ihned souřadnice jejího středu a velikost poloměru. Uspořádáme-li tuto rovnici podle mocnin proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, nabude tvaru

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + M_1x_1 + M_2x_2 + \ldots + M_nx_n + \\ + N = 0, \qquad (5,6)$$

kde jsme položili

$$M_1 = -2s_1, M_2 = -2s_2, \ldots, M_n = -2s_n, \\ N = s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_n^2 - r^2. \qquad (5,7)$$

Z obecného tvaru rovnice nadkoule (5,6) určíme její střed a poloměr nejpohodlněji tím, že tento tvar převedeme obvyklým způsobem zpět na tvar (5,5) nebo řešením rovnic (5,7), odkud plyne

$$s_1 = -\frac{M_1}{2}, s_2 = \frac{M_2}{2}, \ldots, s_n = -\frac{M_n}{2},$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + \ldots + M_n^2 - 4N.}$$

V rovnici (5,6) se tedy předpokládá, že je

$$M_1^2 + M_2^2 + \ldots + M_n^2 - 4N > 0.$$

Obraťme se nakonec k soustavám lineárních rovnic. Víme už, že každá lineární rovnice

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a_{n+1} = 0 \qquad (5,9)$$

znamená nadrovinu; přitom $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ jsou konstanty, z nichž $a_1, \ldots, a_n$ nejsou všechny rovny nule, kdežto $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou souřadnice běžného bodu této nadroviny, tedy proměnné. Chceme-li nějaký bod v takové nadrovině určit, volíme pouze $n - 1$ jeho souřadnic, kdežto zbývající n-tou souřadnici už musíme vypočítat z rovnice (5,9). Protože bod v nadrovině je tedy určen $n - 1$ souřadnicemi, je nadrovina v prostoru E_n prostorem $(n - 1)$ – rozměrným. Na zvláštním případě nadroviny $x_n = 0$ si může každý podobně jako v předcházející kapitole ověřit, že jde opět o euklidovský prostor, že tedy nadrovina v prostoru E_n je sama prostorem E_{n-1}. (Uvědomujeme si ovšem, že takovéto ověření nějaké vlastnosti na zvláštním případě není důkazem obecné věty.)

Přidáme-li k rovnici (5,9) další takovou rovnici, dostáváme soustavu dvou rovnic o n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a tato soustava znamená geometricky průnik dvou nadrovin. Takový průnik má pak podobně jako dřív o další rozměr méně, je to tedy prostor E_{n-2} vnořený do původního prostoru E_n. Prostě přidáváním každé další lineární rovnice snižuje se o jednu počet rozměrů příslušného průniku nadrovin. Vyslovme hned příslušnou větu, analogickou k větě 4,4; o předpokladech, za kterých platí, pohovoříme dodatečně.

Věta 5,4. *V kartézských souřadnicích je prostor E_p v prostoru E_n $(p<n)$ určen q lineárně nezávislými lineárními rovnicemi, při čemž je $q = n - p$.*

Důkaz této věty zde nepodáváme, její obsah i význam je už čtenáři po průpravě z předcházející kapitoly srozumitelný. Musíme ovšem vytknout předpoklady, za nichž tato věta platí. Je to stejné jako u věty 4,4. První předpoklad je samozřejmý, žádné dvě z těch q rovnic, o kterých se tu mluví, nesmí být ve vzájemném sporu, jedna nesmí odporovat druhé (jinak by příslušné dvě nadroviny neměly společný bod a nemohli bychom tedy mluvit o jejich průniku – to nastává např. u dvou rovnoběžných rovin v prostoru E_3). Druhý předpoklad je složitější, soustava našich q lineárních rovnic musí být tvořena rovnicemi lineárně nezávislými; nemáme zde možnost formulovat to algebraicky, řekneme si jen, že je tento předpoklad ekvivalentní s požadavkem, že kterákoli z příslušných nadrovin nesmí obsahovat celý průnik všech zbývajících nadrovin, jež jsou těmito rovnicemi určeny.

Věta 5,4 má ovšem své důsledky. Tak např. v prostoru pětirozměrném je podle toho rovina určena třemi rovnicemi, neboť pro $n = 5$, $p = 2$ je $q = 3$. Dvě různé roviny mají zde tedy celkem šest rovnic a ty už v pěti proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_5$ nemusí mít společné řešení; *v takovém případě tedy dvě roviny v prostoru* E_5 *se neprotínají, jsou mimoběžné*. Příklad toho máme ve cvič. *5,11*.

Z věty 5,4 také poznáme, že např. trojrozměrný prostor E_3 je v prostoru E_n určen soustavou $n - 3$ lineárních rovnic atd. (Viz cvič. 5,12.) Hledáme-li společné body n nadrovin v prostoru E_n znamená to řešit soustavu n lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Taková soustava má za našich předpokladů právě jedno řešení; v prostoru E_n protíná se pak n nadrovin právě v jednom bodě. I toto tvrzení je ve větě 5,4 obsaženo, užijeme-li tak jako u věty 4,4 označení E_0 pro bod jakožto prostor bez rozměrů (příklad je ve cvičení *5,10*).

Cvičení

5,1. Vypočtěte vzdálenost bodu A $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ od počátku v prostoru E_n.

5,2. V prostoru E_n je dán bod A $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$. Určete takový bod B, aby počátek byl středem úsečky AB.

5,3. Přesvědčte se počtem, že střed úsečky leží v nadrovině, která je její osou souměrnosti.

5,4. Co je nadrovina a) v prostoru E_2 (tj. v rovině), b) v prostoru E_3?

5,5. Co je nadkoulí a) v prostoru E_2 (tj. v rovině), b) v prostoru E_3?

5,6. Napište rovnici nadkoule v pětirozměrném prostoru E_5, která má a) střed v počátku a poloměr $r = 1$; b) střed $S\,(1; -1; 2; 4; 0)$ a poloměr $r = 5$.

5,7. V šestirozměrném prostoru je dána nadkoule rovnicí
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 - 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 10x_4 - 2x_5 - 2x_6 + 25 = 0.$
Určete její střed a poloměr.

5,8. V pětirozměrném prostoru určete rovnici nadkoule, která má střed $S\,(-1; 0; 5; -3; 2)$ a prochází bodem $A\,(2; 1; 3; 1; 4)$. Jak velký je její poloměr?

5,9. V prostoru E_n určete střed a poloměr nadkoule, jejíž rovnice je $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - 2ax_1 = 0$, přičemž předpokládáme $a > 0$.

5,10. V pětirozměrném prostoru určete průsečík nadrovin, jejichž rovnice jsou

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 - 2 &= 0,\\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 - 12 &= 0,\\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 4x_5 + 6 &= 0,\\ 2x_1 - 3x_4 - 8 &= 0,\\ 4x_2 + x_4 - x_5 + 4 &= 0. \end{aligned}$$

5,11. V pětirozměrném prostoru jsou dány dvě roviny. První rovina je určena rovnicemi

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 - 6 &= 0,\\ x_1 - x_3 + x_5 - 1 &= 0,\\ x_2 - x_4 + 1 &= 0, \end{aligned}$$

druhá rovnicemi

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 - 1 &= 0,\\ x_1 - x_3 + x_4 + x_5 - 3 &= 0,\\ x_1 + x_2 + x_4 - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Dokažte, že tyto roviny se neprotínají v žádném bodě.

5,12. Kolika lineárními rovnicemi je v prostoru E_n určena a) rovina, b) přímka?