Prostory o čtyřech a více rozměrech

4. Čtyřrozměrný prostor

In: Karel Havlíček (author): Prostory o čtyřech a více rozměrech. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1965. pp. 38–56.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403543

Terms of use:

© Karel Havlíček, 1965

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

4. kapitola

ČTYŘROZMĚRNÝ PROSTOR

Algebra nekončí u soustav rovnic o třech neznámých. Studuje i rovnice o čtyřech, pěti a více neznámých. Navážeme-li na předcházející kapitoly, vznikne přirozená otázka, mají-li takové rovnice také nějaký geometrický význam. Uvidíme, že ano; nevystačíme přitom ovšem s dvojrozměrnou rovinou nebo trojrozměrným prostorem. Matematikové si zde pomáhají tím způsobem, že zavádějí nové, umělé pojmy. Činí tak analogicky ke známým pojmům z geometrie prostorů dvojrozměrných a trojrozměrných.

Když jsme v rovině určili bod A pomocí jeho dvou souřadnic a_1, a_2, znamenalo to téměř totéž, jako kdybychom uspořádané dvojici čísel a_1, a_2 dávali nové jméno, totiž jméno „bod A“; podobně jsme si počínali i v prostoru trojrozměrném, jenže tam už šlo o trojice čísel. Proč bychom nemohli pokračovat stejně i pro čtveřice čísel nebo vůbec pro skupiny o větším počtu čísel? Zůstaňme prozatím u čtveřic.

Pokusme se o tuto abstrakci: Když jsme poznali geometrický význam dvojic a trojic čísel, rovnic mezi nimi a jiných aritmetických pojmů, odložme na chvíli geometrický obrázek či prostorový model a odmysleme si skoro celou tu geometrii; jediné, co z ní podržíme v paměti, bude geometrické názvosloví. Uspořádanou čtveřici čísel — a_1, a_2, a_3, a_4 nazveme prostě opět „bod A“ a zapíšeme to zase znakem $A(a_1; a_2; a_3; a_4)$ a jednotlivá čísla této čtveřice prohlásíme za souřadnice tohoto bodu A. (Čtenář si jistě domyslí, že v matematice skutečně existují konkrétní objekty, jež lze charakterizovat právě popsanou čtveřicí čísel — ukážeme si je hlavně v poslední kapitole — a že tedy nejde jen o vyumělkované řeči, které by se prakticky nikde neuplatnily.)

Poznali jsme, že bod určený dvěma souřadnicemi se zobrazuje v rovině a bod určený třemi souřadnicemi v prostoru. O rovině jsme říkali, že je dvojrozměrná, body určené třemi souřadnicemi vyplnily trojrozměrný prostor. Stejně tedy řekněme, že všechny body, jež lze charakterizovat čtyřmi souřadnicemi, vyplní *prostor čtyřrozměrný*. Důležité přitom je, že při určení bodu A ve čtyřrozměrném prostoru můžeme čísla a_1, a_2, a_3, a_4 (jeho souřadnice) volit nezávisle jedno na druhém. A podobně jako v předcházejících kapitolách budeme i zde předpokládat, že každá souřadnice probíhá celou množinu reálných čísel. Bod, jehož všechny čtyři souřadnice jsou rovny nule, nazývá se i zde *počátkem* příslušné soustavy souřadnic.

Abychom mohli mluvit o nějaké geometrii v takovémto čtyřrozměrném prostoru, zavedeme si v něm pojem vzdálenosti dvou bodů. Podíváme se nejdřív na vzorce (1,1), (2,1) a (3,1) v předcházejících kapitolách a analogicky k nim zvolíme měření délek i zde.

Jsou-li $A(a_1;a_2;a_3;a_4)$ a $B(b_1;b_2;b_3;b_4)$ dva body v prostoru čtyřrozměrném, pak za jejich vzdálenost prohlásíme číslo v dané vzorcem

$$v = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2 + (b_4 - a_4)^2}. \tag{4,1}$$

Píšeme zde ovšem také $AB = v$.

Doplňme to hned dalším pojmem, totiž pojmem euklidovského prostoru (srovnej se závěrečnými slovy předcházejících kapitol).

Euklidovským čtyřrozměrným prostorem rozumíme každou takovou množinu (každý takový souhrn) **nějakých právě popsaných objektů čili bodů, když měření vzdáleností dvou takových bodů provádíme podle vzorce (4,1).**

Pro stručnost budeme euklidovský čtyřrozměrný prostor značit E_4.

Příslušným souřadnicím budeme i zde říkat souřadnice kartézské. Pojem vzdálenosti je na ně vázán. Z toho, co bylo řečeno, neplyne, že bychom v tomtéž prostoru E_4 nemohli zavést vedle těchto souřadnic ještě nějaké jiné souřadnice, v nichž by se vzdálenost dvou bodů počítala podle jiného vzorce než je (4,1). To jsme mohli zkusit už v rovině nebo v trojrozměrném prostoru, vzorec pro vzdálenost dvou bodů by se pak byl patřičně změnil; nebylo by tam např. nutno volit osy souřadnic k sobě kolmé. Upustíme však od toho a zůstaneme jen při naší nejjednodušší kartézské soustavě souřadnic.

Pro naše čtenáře bude tedy prozatím nejpohodlnější tato představa prostoru E_4: je to množina všech uspořádaných čtveřic čísel, každé takové čtveřici říkáme bod prostoru E_4 a vzdálenosti mezi nimi měříme podle vzorce (4,1).

Už na základě těchto několika pojmů můžeme řešit některé úlohy geometrie v E_4, jak je patrné ze cvičení 4,1 až 4,5; přitom např. stranou AB trojúhelníka ABC rozumíme i zde vzdálenost jeho vrcholů A, B; rovnoramenným trojúhelníkem rozumíme trojúhelník, jehož dvě strany jsou stejně dlouhé atd.

Podobně jako v předcházejících kapitolách budeme i zde středem úsečky AB rozumět bod S, který půlí vzdálenost AB, pro který tedy platí $AS = BS = \frac{1}{2} AB$ (srovnej se cvič. 2,4 a 3,3). Souřadnice tohoto středu určíme stejně snadno jako v předcházejících kapitolách (viz větu 1,2, větu 2,2 a větu 3,2):

Věta 4,1. *Střed S úsečky, jejíž krajní body jsou $A(a_1; a_2; a_3; a_4)$, $B(b_1; b_2; b_3; b_4)$, má souřadnice*

$$s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad s_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}, \quad s_3 = \frac{a_3 + b_3}{2},$$

$$s_4 = \frac{a_4 + b_4}{2}. \tag{4,2}$$

Důkaz se opírá o vzorec (4,1). Pro vzdálenost bodů AS, kde souřadnice bodu S jsou dány vzorci (4,2), vychází

$$AS = \sqrt{\left(\frac{a_1 + b_1}{2} - a_1\right)^2 + \ldots + \left(\frac{a_4 + b_4}{2} - a_4\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \ldots + (b_4 - a_4)^2} = \frac{1}{2}AB$$

a stejně tak $BS = \frac{1}{2}AB$; je tedy také $AS = BS$ a tvrzení věty 4,1 je dokázáno.

Tento způsob důkazu jsme doporučovali čtenářům ve cvič. 2,4 a 3,3, není tedy pro ně novinkou. Věta 4,1 se vzorci (4,2) potvrzuje existenci středu úsečky v prostoru E_4 a poskytuje i návod pro výpočet jeho souřadnic. Nutno zde však upozornit na to, že tato věta neříká nic o tom, zdali vedle bodu S neexistuje ještě nějaký jiný bod v E_4, který také půlí úsečku AB; nedokázali jsme tedy, že úsečka má v prostoru E_4 jen jediný střed (v předcházejících kapitolách to bylo zřejmé z názoru i z toho, co čtenáři znají ze školy). Ale i to lze ve čtyřrozměrném prostoru dokázat. Nemáme však na to v této brožurce ani místo, ani patřičné prostředky; zájemce to najde v učebnici E. Čecha, citované vzadu v seznamu literatury, a to v I. díle na str. 18.

Přistupme nyní podle vzoru předcházejících kapitol k hledání všech takových bodů X ležících ve čtyřrozměrném prostoru E_4, které jsou od bodu A stejně vzdáleny jako od bodu B. Střed S úsečky AB, určený ve větě 4,1, je ovšem jedním z nich. Jistě však existují ještě další body X, pro které je $AX = BX$. V rovině vytvoří takové body přímku, v prostoru trojrozměrném rovinu, pokaždé totiž „osu souměrnosti" úsečky AB. Byla o tom řeč v předcházejících dvou kapitolách. Co bude touto osou souměrnosti úsečky AB v prostoru E_4? Bude to zřejmě analogický pojem k pojmu přímky v rovině nebo k pojmu roviny ve trojrozměrném prostoru. Protože však v prostoru E_4 nemáme dosud příslušný pojem, nezbývá než ho definovat nebo pojmenovat. Provedeme tento křest velmi jednoduše, užijeme běžně vžitého názvu *nadrovina*. Nadrovina v prostoru E_4 je tedy množina (souhrn) všech takových bodů, které jsou od daných dvou vzájemně různých bodů stejně vzdáleny. A hned můžeme přistoupit k analytickému vyjádření nadroviny (srovnej s větami 2,3 a 3,3).

Věta 4,2. *V kartézských souřadnicích má nadrovina v prostoru E_4 rovnici lineární.*

Důkaz. Jsou-li $A(a_1; a_2; a_3; a_4)$ a $B(b_1; b_2; b_3; b_4)$ dva různé body, pak nadrovinu vyplní takové body $X(x_1; x_2; x_3; x_4)$, pro které je $AX = BX$, tj.

$$\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 + (x_4 - a_4)^2} =$$
$$= \sqrt{(x_1 - b_1)^2 + (x_2 - b_2)^2 + (x_3 - b_3)^2 + (x_4 - b_4)^2}.$$

Po umocnění této rovnice dvěma a po jednoduché početní úpravě vychází odtud lineární rovnice

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4 + p_5 = 0, \qquad (4{,}3)$$

kde jsme pro stručnost položili

$$p_1 = \varrho\,(b_1 - a_1),\, p_2 = \varrho\,(b_2 - a_2),\, p_3 = \varrho\,(b_3 - a_3),$$
$$p_4 = \varrho\,(b_4 - a_4), \qquad (4{,}4)$$
$$p_5 = \frac{\varrho}{2}\,(a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2 + a_3^2 - b_3^2 + a_4^2 - b_4^2);$$

přitom $\varrho \neq 0$ je libovolný koeficient. Všimněte si, že čísla p_1, p_2, p_3, p_4 nejsou všechna současně rovna nule. Všechny body X zde vyšetřované nadroviny mají tedy tu vlastnost, že jejich souřadnice vyhovují rovnici (4,3), která je ovšem v proměnných x_1, x_2, x_3, x_4 lineární. Jiné body než body této nadroviny uvedené rovnici nevyhovují, neboť z rovnice (4,3) plyne při označení (4,4) zpět podmínka $AX = BX$, jak se každý snadno přesvědčí. Je tedy rovnice naší nadroviny vskutku lineární. Dále je k důkazu věty 4,2 ještě nutno dodat, že obráceně každá lineární rovnice tvaru (4,3) je rovnicí některé nadroviny. Důkaz je i zde myšlenkově stejný jako byl důkaz věty 2,3 nebo věty 3,3, nebudu jej už opakovat. Čtenář si jen znovu promyslí diskusi rovnic (2,6) až (2,8) z druhé kapitoly a přepíše si ji do poměrů ve čtyřrozměrném prostoru, tj. do čtyř proměnných x_1, x_2, x_3, x_4, při čemž rovnice (2,4) a (2,5) nahradí rovnicemi (4,3) a (4,4). Tím je věta 4,2 dokázána.

Zkoumejme další geometrický útvar v prostoru E_4, který je obdobou kružnice v rovině a plochy kulové v prostoru. Budeme mu říkat *nadkoule*, ačkoli by přesnější název byl kulová nadplocha. Naše stručné vyjádření, jež je obvyklé, nevede však k nedorozumění. *Nadkoule je prostě* *množina (souhrn) všech takových bodů v* E_4, *jež jsou od daného bodu, tzv. středu nadkoule, stejně vzdáleny; vzdálenost každého bodu nadkoule od jejího středu nazývá se poloměr nadkoule*. Čtenář si jistě všimne, že o nadkouli a jejím středu i poloměru můžeme v prostoru E_4 mluvit proto, že v něm dovedeme měřit vzdálenosti a že k tomu vlastně nic jiného nepotřebujeme. V další větě (podobně jako ve větách 2,4 a 3,4) znamenají písmena x_1, x_2, x_3, x_4 kartézské souřadnice libovolného bodu X dané nadkoule.

Věta 4,3. *Nadkoule o středu* $S(s_1; s_2; s_3; s_4)$ *a poloměru* $r > 0$ *má v kartézských souřadnicích v prostoru* E_4 *rovnici*

$$(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 + (x_3 - s_3)^2 + (x_4 - s_4)^2 = \\ = r^2. \tag{4,5}$$

Důkaz. Podle toho, co bylo řečeno, je nadkoule tvořena body X, pro které je $SX = r$, a jen těmito body. Podle vzorce (4,1) to vede k rovnici

$$\sqrt{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 + (x_3 - s_3)^2 + (x_4 - s_4)^2} = r,$$

která vzhledem k podmínce $r > 0$ je ekvivalentní s rovnicí (4,5).

Rovnici (4,5) lze přepsat na tvar

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + Mx_1 + Nx_2 + Px_3 + Qx_4 + R = \\ = 0, \tag{4,6}$$

kde je

$$M = -2s_1, N = -2s_2, P = -2s_3, Q = -2s_4, \\ R = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2 - r^2. \tag{4,7}$$

Je-li rovnice nadkoule dána ve tvaru (4,6), poznáme její střed a poloměr tím, že ji zpět převedeme na tvar (4,5), jak už jsme to poznali ve dvou a třech proměnných u rovnic

(2,9) a (2,10) a u rovnic (3,5) a (3,6). Přímo ze vzorců (4,7) také snadno určíme střed a poloměr nadkoule; je

$$s_1 = -\frac{M}{2}, s_2 = -\frac{N}{2}, s_3 = -\frac{P}{2}, s_4 = -\frac{Q}{2},$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{M^2 + N^2 + P^2 + Q^2 - 4R}.$$

Za předpokladu $M^2 + N^2 + P^2 + Q^2 - 4R > 0$ je $r > 0$ a rovnice (4,7) je pak rovnicí nadkoule. Příklady jsou ve cvič. *4,6*; *4,7*; *4,12*; *4,13*; *4,14*.

Když jsme už poznali nejjednodušší *nadplochy* v prostoru E_4, totiž nadrovinu a nadkouli, postoupíme k dalším pojmům, ale zůstaneme pro jednoduchost jen u útvarů lineárních, tedy u útvarů vytvořených nadrovinami. Za tím účelem se vyplatí říci si ještě něco o nadrovině. Z věty 4,2 víme, že nadrovina má rovnici lineární (proměnné — x_1, x_2, x_3, x_4 se v ní vyskytují jen v první mocnině). Rovnice

$$x_4 = 0 \tag{4,8}$$

je také taková lineární rovnice, představuje tudíž nějakou nadrovinu. Z rovnice (4,3) ji dostaneme, klademe-li tam $p_1 = p_2 = p_3 = p_5 = 0$, $p_4 = 1$. Každý bod ležící v nadrovině (4,8) je charakterizován tím, že jeho čtvrtá souřadnice je rovna nule; jsou-li $Y(y_1; y_2; y_3; 0)$ a $Z(z_1; z_2; z_3; 0)$ dva takové body, je jejich vzdálenost v prostoru E_4 určena podle vzorce (4,1) výrazem

$$YZ = \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2 + (z_3 - y_3)^2}.$$

To je ovšem až na označení bodů a jejich souřadnic přímo vzorec (3,1) ze začátku kapitoly 3. To znamená, že vzdálenost dvou bodů Y, Z nadroviny (4,8) měříme zde stejně jako v trojrozměrném euklidovském prostoru, tudíž že tato *nadrovina je sama trojrozměrným euklidovským prostorem.*

Toto tvrzení však platí pro každou nadrovinu ležící v prostoru E_4, tedy nikoli jen pro nadrovinu danou rovnicí (4,8). Soustavu souřadnic můžeme totiž vždycky zvolit v prostoru E_4 tak, aby daná, pevně zvolená nadrovina měla rovnici (4,8), tj. aby byla souřadnou nadrovinou. Nebudeme to zde podrobně dokazovat, rád bych jen upozornil, že to všechno není žádné překvapení; v prostoru trojrozměrném jsou poměry podobné. Tam je sice ze školy i z názoru každému zřejmé, že rovina, ležící v trojrozměrném euklidovském prostoru, je sama dvojrozměrným prostorem euklidovským, ale je dobře si uvědomit, že i tam každou rovinu mohu zvolit za rovinu souřadnou.

Ostatně skutečnost, že nadrovina v prostoru E_4 je sama prostorem trojrozměrným, plyne už z určení bodu v takové nadrovině. Je-li $X(x_1; x_2; x_3; x_4)$ bod takové nadroviny, vyhovují jeho souřadnice rovnici (4,3) a nemůžeme je tedy volit zcela libovolně. Můžeme volit právě jen tři z nich, čtvrtou už musíme vypočítat z rovnice (4,3). Je tedy bod v nadrovině určen třemi souřadnicemi, proto je každá nadrovina v prostoru E_4 sama prostorem trojrozměrným. Dokázat však obecně, že je to euklidovský trojrozměrný prostor, dalo by už víc práce; spokojíme se zde tedy jen s ukázkou, kterou jsme si předvedli pro nadrovinu o rovnici (4, 8).

Jsou-li nyní dány dvě nadroviny rovnicemi (a_i; b_i jsou konstanty, x_i jsou proměnné)

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5 = 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5 = 0, \end{aligned} \qquad (4,9)$$

můžeme v běžných případech dvě z proměnných souřadnic (např. x_1, x_2) volit libovolně a zbývající dvě (zde tedy x_3, x_4) vypočítat pak z těchto dvou rovnic. Tak dostaneme souřadnice všech bodů $X(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$, jež leží v obou zvolených nadrovinách současně. Kolik je takových bodů? Je jich nekonečně mnoho, protože dvě souřadnice každého z těchto bodů můžeme přitom volit libovolně, tedy nekonečně mnoha způsoby. Protože dvě souřadnice jsou volitelné, vytvoří tyto body dvojrozměrný prostor. To nám už připomíná úvahy z kapitoly 2 a máme tedy podezření, není-li tento dvojrozměrný prostor zase euklidovský, není-li to prostě rovina. Nasvědčuje tomu i to, že jde o útvary lineární, dané lineárními rovnicemi. A skutečně je tomu tak; můžeme si to opět pohodlně ověřit na zvláštním případě, když za rovnice (4,9) zvolíme rovnice

$$x_3 = 0,\ x_4 = 0. \tag{4,10}$$

Body, ležící v obou těchto nadrovinách současně, mají první dvě souřadnice libovolné a druhé dvě jsou nuly; pro vzdálenost takových dvou bodů $Y(y_1; y_2; 0; 0)$ a $Z(z_1; z_2; 0; 0)$ dává vzorec (4,1) výsledek

$$YZ = \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2}.$$

To je ovšem vzorec (2,1) a vidíme tedy, že společné body nadrovin (4,10) vytvoří dvojrozměrný euklidovský prostor, tedy rovinu.

V celé této úvaze předpokládáme, že nadroviny dané rovnicemi (4,9) vůbec nějaký společný bod mají, tj. že obě rovnice (4,9) si vzájemně neodporují, a že zároveň není jedna z nich násobkem druhé, čili, jak se odborně říká, že tyto dvě rovnice jsou lineárně nezávislé. Kdyby totiž jedna byla násobkem druhé, dostali bychom vhodným dělením druhé z rovnic (4,9) první z nich a obě by tedy určovaly tutéž nadrovinu; v tom případě by tyto „dvě“ nadroviny splynuly v jedinou a neprotly by se jen v rovině. *Za předpokladů právě vytčených můžeme však říci, že dvě nadroviny v prostoru* E_4 *se protínají v rovině.* Říkáme také, že *průnik* *dvou nadrovin v prostoru* E_4 *je rovina.* Ve starší literatuře se místo slova průnik vyskytuje ve stejném významu i slovo průsek. Zároveň poznáváme, že *rovina v prostoru* E_4 *je určena dvěma lineárními rovnicemi.* Tyto rovnice musí být ovšem lineárně nezávislé a nesmí si vzájemně odporovat, jak už o tom byla řeč. Např. rovnice

$$x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - 1 = 0,$$
$$2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 1 = 0$$

si odporují, jimi určené nadroviny nemají žádný společný bod (jak se každý snadno přesvědčí) a neprotínají se tedy v rovině.

Určení roviny v prostoru E_4 je tedy obdobné určení přímky v trojrozměrném prostoru; pokaždé je příslušný geometrický útvar určen dvěma lineárními rovnicemi.

Ptejme se dále, co je průnikem tří nadrovin v prostoru E_4, tj. co vytvoří body společné třem nadrovinám? Analyticky to znamená hledat společné řešení tří lineárních rovnic (a_i; b_i; c_i jsou konstanty, x_i jsou proměnné)

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5 &= 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5 &= 0, \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5 &= 0, \end{aligned} \tag{4,11}$$

z nichž každá je rovnicí jedné z daných tří nadrovin. Zde můžeme jen jednu z proměnných x_1, x_2, x_3, x_4 volit libovolně, kdežto zbývající tři už musíme vypočítat řešením soustavy tří rovnic (4,11). Volitelná je jedna souřadnice, body takto určené vytvoří tedy prostor jednorozměrný, přímku. Zvláštní případ soustavy (4,11) jsou rovnice

$$x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0;$$

jsou-li $Y(y_1; 0; 0; 0)$ a $Z(z_1; 0; 0; 0)$ libovolné dva body společné všem těmto nadrovinám, je jejich vzdálenost podle vzorce (4,1) dána výrazem

$$YZ = \sqrt{(z_1 - y_1)^2} = |z_1 - y_1|.$$

To je vzorec (1,1) z první kapitoly, naše tři nadroviny se tedy protínají v obyčejné euklidovské přímce.

O soustavě (4,11) musíme při tom ovšem zase předpokládat totéž, co jsme předpokládali v diskusi o soustavě rovnic (4,9). Žádné dvě z těchto rovnic (4,11) si nesmí navzájem odporovat a celkem musí být tyto rovnice lineárně nezávislé. Ovšem lineární nezávislost tří rovnic je už pojem značně složitější než byl u dvou rovnic a nemáme zde místo na výklad tohoto pojmu. Připojme jen upozornění, že kdyby např. třetí z rovnic (4,11) byla součtem prvních dvou, pak by ovšem každé řešení prvních dvou rovnic bylo i řešením třetí z nich; geometricky by to znamenalo, že třetí nadrovina by obsahovala všechny body společné prvním dvěma nadrovinám, tedy všechny body roviny jimi určené. V takovém případě by tyto tři nadroviny měly společnou celou rovinu a neprotínaly by se tedy jenom v přímce. Požadavek lineární nezávislosti rovnic (4,11) geometricky prostě znamená požadavek, aby žádná z příslušných nadrovin neprocházela průnikem zbývajících nadrovin takové soustavy. A s tímto vysvětlením pojmu lineární nezávislosti se zde spokojíme.

Ze všech právě uvedených předpokladů můžeme tedy stručně říci, že *tři nadroviny v prostoru* E_4 *se protínají v přímce*. Zároveň vidíme, že *přímka v prostoru* E_4 *je určena třemi lineárními rovnicemi*.

Dosavadní výsledky můžeme pro přehlednost vyjádřit jedinou větou. Užijeme přitom stručného označení E_p pro p-rozměrný euklidovský prostor, tedy E_1 pro přímku, E_2 pro rovinu a E_3 pro trojrozměrný prostor. Přitom předpokládáme, že soustava lineárních rovnic, o které hovoříme, je tvořena rovnicemi lineárně nezávislými a navzájem si neodporujícími, jak už bylo několikráte zdůrazněno. Za těchto předpokladů lze naše vyšetřování shrnout takto:

Věta 4,4. *V kartézských souřadnicích je prostor* E_p *v prostoru* E_4 $(p<4)$ *určen* q *lineárně nezávislými lineárními rovnicemi, při čemž je* $q = 4 - p$.

Věta 4,2 je zvláštním případem této věty 4,4. Ve větě 4,4 je však zahrnut i případ čtyř lineárních rovnic, přijmeme-li označení E_0 pro bod jakožto prostor, jehož počet rozměrů je nula. Skutečně soustava čtyř lineárních rovnic o čtyřech neznámých má za našich předpokladů jediné řešení, je tedy jediný společný bod čtyř nadrovin v prostoru E_4. Celkem tedy můžeme ve větě 4,4 klást $p = 0, 1, 2, 3$.

Ukažme si na příkladech některé důsledky věty 4,4.

Hledejme společné body dvou rovin v prostoru E_4. Podle věty 4,4 je zde každá rovina dána dvěma rovnicemi. Nechť první rovina je dána např. rovnicemi

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2 &= 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0, \end{aligned} \tag{4,12}$$

a druhá rovina rovnicemi

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 5 &= 0, \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 0. \end{aligned} \tag{4,13}$$

Všechny společné body těchto rovin mají tedy tu vlastnost, že jejich souřadnice vyhovují jak rovnicím (4,12) tak rovnicím (4,13). To jsou celkem čtyři lineární rovnice o čtyřech neznámých x_1, x_2, x_3, x_4 a stojíme před úkolem řešit tuto soustavu rovnic. Řešení je zde jediné, jak se každý snadno přesvědčí tím, že tuto soustavu skutečně rozřeší. Snadno dostaneme výsledek

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = -1. \tag{4,14}$$

Je tedy jediný bod $X(1; 0; 2; -1)$ společný oběma daným rovinám. Není to nic divného, i podle věty 4,4 naše čtyři rovnice (4,12) a (4,13) určují v prostoru E_4 prostor E_0, tedy jediný bod. *Celý tento příklad nám tedy ukazuje případ, kdy dvě roviny ve čtyřrozměrném prostoru se protínají v jednom bodě.*

Sledujeme dále otázku průsečíku přímky s rovinou v prostoru E_4. Rovina nechť je dána zase rovnicemi (4,12). Přímka je tu podle věty 4,4 dána třemi lineárními rovnicemi; nechť to jsou rovnice (4,13), k nimž jako třetí připojíme rovnici

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - 7 = 0. \tag{4,15}$$

Souřadnice průsečíku této přímky s danou rovinou vyhovují tedy všem pěti rovnicím (4,12), (4,13) a (4,15). Ale takový bod neexistuje. Jediné řešení soustavy rovnic (4,12) a (4,13) dávají hodnoty (4,14), ty však nevyhovují rovnici (4,15), jak se pouhým dosazením každý přesvědčí. *Máme tedy případ, kdy přímka a rovina v prostoru čtyřrozměrném se neprotínají, jsou mimoběžné.*

Podobných důsledků věty 4,4 lze ukázat celou řadu. Některé máme ve cvičeních na konci kapitoly.

Doplňme nyní větu 4,1 v jednom směru. Když už známe analytické vyjádření přímky v prostoru E_4 pomocí tří lineárních rovnic, snadno dokážeme, že střed úsečky AB leží na přímce určené těmito body A, B. Úvaha je zde stejná, jako byla v kapitole 3 při odvození rovnice (3,10) z rovnice (3, 9). Budiž

$$q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3 + q_4x_4 + q_5 = 0 \tag{4,16}$$

(q_i jsou konstanty, x_i proměnné) rovnice nadroviny obsahující body $A(a_1; a_2; a_3; a_4)$ a $B(b_1; b_2; b_3; b_4)$. Souřadnice těchto bodů pak rovnici (4,16) vyhovují, platí tedy

$$q_1a_1 + q_2a_2 + q_3a_3 + q_4a_4 + q_5 = 0,$$
$$q_1b_1 + q_2b_2 + q_3b_3 + q_4b_4 + q_5 = 0.$$

Sečtením těchto rovnic a dělením dvěma dostáváme

$$q_1 \frac{a_1 + b_1}{2} + q_2 \frac{a_2 + b_2}{2} + q_3 \frac{a_3 + b_3}{2} +$$

$$+ q_4 \frac{a_4 + b_4}{2} + q_5 = 0. \qquad (4,17)$$

To znamená, že souřadnice (4,2) středu S úsečky AB vyhovují rovnici (4,16), čili že střed úsečky AB leží v každé nadrovině procházející body A, B. Protože každá přímka je podle věty 4,4 určena třemi lineárními rovnicemi, je průnikem tří nadrovin a pro každou z nich platí rovnice (4,17). Leží tudíž střed úsečky AB v každé z těchto tří nadrovin určujících přímku AB a tedy také na této přímce samé. I v prostoru čtyřrozměrném má tudíž střed úsečky všechny ty vlastnosti, které známe z geometrie v prostoru trojrozměrném.

Zakončeme tuto kapitolu ještě zkoumáním určení nadkoule v prostoru E_4. Víme, že kružnice je v rovině určena třemi body, jež neleží v přímce. Přesně řečeno je to tak, že takovými třemi body prochází právě jedna kružnice. V trojrozměrném prostoru je podobně plocha kulová určena čtyřmi body, jež neleží v téže rovině; příklad toho byl uveden ve cvičení 3,8. Podobně *v prostoru* E_4 *je nadkoule určena pěti takovými body, které neleží v téže nadrovině.* Uvažme, že v rovnici nadkoule tvaru (4,6) je celkem pět volitelných koeficientů M, N, P, Q, R; leží-li daný bod $A(a_1; a_2; a_3; a_4)$ na této nadkouli, vyhovují jeho souřadnice její rovnici, což je jedna podmínka pro určení koeficientů M, N, P, Q, R, totiž

$$Ma_1 + Na_2 + Pa_3 + Qa_4 + R =$$
$$= -(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2).$$

To je lineární rovnice pro koeficienty M, N, P, Q, R; abychom je určili jednoznačně, potřebujeme pět takových lineárních rovnic, tedy pět bodů, jimiž má nadkoule procházet (viz cvičení *4,12*).

Pohovořme ještě o tom, kde leží střed S takové nadkoule určené pěti takovými body A, B, C, D, E, které neleží v téže nadrovině. Začněme se dvěma body A, B. Z výkladu, který předcházel větě 4,2, víme, že *středy všech nadkoulí procházejících dvěma body A, B vyplní nadrovinu* o rovnici (4,3), která je osou souměrnosti úsečky AB. Přidáme-li třetí bod C, pak pro středy S všech nadkoulí, jež procházejí body A, B, C, bude platit nejen $AS = BS$, ale také $AS = CS$ a v důsledku toho už i $BS = CS$. Tyto středy leží tedy jak v nadrovině, která je osou souměrnosti úsečky AB, tak také v nadrovině, která je osou souměrnosti úsečky AC. Průnik takových dvou nadrovin je ovšem rovina, neboť je to útvar určený dvěma lineárními rovnicemi (viz větu 4,4). Poznáváme tedy, že *středy všech nadkoulí procházejících třemi body A, B, C vyplní v prostoru E_4 rovinu.* Podobně přidáním dalšího požadavku, aby naše nadkoule procházela ještě čtvrtým bodem D, přidáváme ještě další nadrovinu, např. osu souměrnosti úsečky AD, v níž hledaný střed leží. Můžeme v našem případě tedy říci, že *středy všech nadkoulí procházejících čtyřmi body A, B, C, D vyplní v prostoru* E_4 *přímku.* Přidáním dalšího požadavku, aby na naší nadkouli ležel i pátý bod E, docházíme k rovnici další nadroviny a tedy už jen k jedinému středu nadkoule, určené těmito pěti body. Sestavení rovnic těchto nadrovin, jež jsou osami souměrnosti příslušných úseček, nemělo by už našemu čtenáři působit žádné potíže, protože jsme tyto rovnice odvodili ve tvaru (4,3) při označení (4,4) v důkazu věty 4,2. Rovněž řešení příslušných soustav lineárních rovnic nemělo by působit zásadních potíží, i když je někdy dost pracné, (jde o soustavy rovnic o čtyřech neznámých). Příslušné příklady jsou zařazeny přímo ve cvičení *4,11* a *4,12*.

Rovněž hledání průsečíků přímky s nadkoulí je zařazeno rovnou do cvičení *4,13* a *4,14* (viz i návod ve výsledku cvič. *4,13*). Má-li přímka s nadkoulí jen jeden bod společný, říkáme, že se této nadkoule dotýká, čili že je její *tečnou*. Je to obdoba tečny kružnice nebo plochy kulové.

Závěrem této kapitoly si znovu připomeňme, že jsme v ní téma čtyřrozměrného prostoru ani zdaleka úplně nevyčerpali. Šlo jen o ukázky, jak lze geometrii v takovém prostoru vytvářet. Mnoha geometrických pojmů jsme si však přitom vůbec nevšimli. Nemluvili jsme o úhlech a jejich měření, a tedy ani o kolmosti, rovnoběžnosti apod. Neprobírali jsme určení vzdálenosti bodu od nadroviny, roviny nebo přímky, ani např. o vzdálenosti dvou rovnoběžných nadrovin atd. Nehovořili jsme vůbec o transformaci souřadnic. To všechno musí zájemce hledat v podrobnější literatuře, která je uvedena na konci této knížky.

V souvislosti s tím bude snad některého čtenáře mrzet, že jsme zde nerýsovali žádné obrázky z prostoru čtyřrozměrného. (Malá ukázka je jen v kapitole 6, obr. 8.) Neměli jsme totiž k dispozici ani nejjednodušší kolmé promítání, protože jsme o kolmosti v prostoru E_4 nemluvili. Nutno však upozornit, že obrázky se rýsují na papír, tedy na dvojrozměrnou rovinu. Tak to děláme i se zobrazováním trojrozměrného prostoru. Ale studentům, kteří nejsou zvyklí na deskriptivní geometrii nebo nemají dostatek prostorové představivosti, se stává, že v takovém obrázku nic prostorového nevidí; vidí prostě jen změť čar na papíře. Tyto obtíže ovšem rostou, zvyšujeme-li počet rozměrů prostoru, který zobrazujeme. Záleží pak hodně na cviku a zručnosti. Je ovšem možné užitím promítání zobrazovat čtyřrozměrný prostor na dvojrozměrnou nákresnu; bylo už řečeno, že se tímto způsobem v deskriptivní geometrii zobrazuje už prostor trojrozměrný. Podobně lze čtyřrozměrný prostor promítnout nejdřív do prostoru trojrozměrného a výsledek pak dále promítnout na dvojrozměrnou nákresnu, tedy na papír. To všechno patří do deskriptivní geometrie a znalost základních pojmů z prostoru čtyřrozměrného, které jsme si ani zde všechny nevyložili, se přitom předpokládá. V seznamu literatury vzadu je uvedena i učebnice deskriptivní geometrie, v níž o promítání v prostoru čtyřrozměrném je pojednáno.

Cvičení

4,1. Vypočtěte vzdálenost bodu A (a_1, a_2, a_3, a_4) od počátku v prostoru E_4.

4,2. Tři body A $(-1; 2; 5; 3)$, B $(3; 2; -1; 7)$, C $(3; -1; 2; 3)$ tvoří v prostoru E_4 trojúhelník. Dokažte, že je to rovnoramenný trojúhelník.

4,3. Dokažte, že trojúhelník ABC v prostoru E_4, kde je A $(-1; 2; 5; 3)$, B $(1; 2; 2; 5)$, C $(3; -1; 2; 3)$, je pravoúhlý a rovnoramenný.

4,4. Vypočtěte souřadnice středu S úsečky PQ, kde je P $(-1; 2; 5; 3)$, Q $(3; 2; -1; 7)$ a výsledek srovnejte se zadáním předcházejících dvou cvičení.

4,5. Dokažte, že body A $(-1; 0; \frac{1}{2}\sqrt{2}; -\frac{1}{2}\sqrt{2})$, B $(1; 0; -\frac{1}{2}\sqrt{2}; \frac{1}{2}\sqrt{2})$, C $(0; \sqrt{3}; \frac{1}{2}\sqrt{6}; \frac{1}{2}\sqrt{6})$ tvoří v prostoru E_4 trojúhelník rovnostranný.

4,6. Napište rovnici nadkoule v prostoru E_4, která má

a) střed v počátku a poloměr $r = 1$;

b) střed S $(2; 0; 0; 0)$ a prochází počátkem;

c) střed S $(3; -1; 2; 2)$ a poloměr $r = 4$.

4,7. Určete střed a poloměr nadkoule, jejíž rovnice je

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1 + 8x_2 - 6x_3 + 1 = 0$;

b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2ax_1 = 0$, kde je $a > 0$.

4,8. Určete průsečík dvou rovin v prostoru E_4, je-li první rovina dána rovnicemi

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 12 = 0,$$
$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 13 = 0,$$

a druhá rovina rovnicemi

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 5 = 0,$$

$$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 8 = 0.$$

4,9. V prostoru E_4 je dána přímka rovnicemi

$$x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 6x_4 - 7 = 0,$$
$$2x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 - 15 = 0,$$
$$4x_1 - x_2 - 5x_3 + 5x_4 - 30 = 0$$

a nadrovina rovnicí

$$5x_1 + 10x_2 - 20x_3 - 22x_4 - 38 = 0.$$

Které jsou průsečíky této přímky s touto nadrovinou?

4,10. V prostoru E_4 je dána rovina rovnicemi

$$x_1 + x_2 + x_3 - 10 = 0,$$
$$x_2 + x_3 + x_4 - 20 = 0$$

a nadrovina rovnicí

$$2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 30 = 0.$$

Najděte souřadnice bodů přímky, v níž daná rovina protíná danou nadrovinu. (Návod: postupujte obdobně jako u řešení soustavy (3,8) v kapitole 3.)

4,11. V prostoru E_4 určete bod S, který má od bodů A (3; −2; 4; 0), B (1; 0; 4; 0), C (1; −2; 6; 0), D (1; −2; 4; 2), E (2; −1; 5; 1) vesměs stejné vzdálenosti.

4,12. Napište rovnici nadkoule, která prochází pěti body A, B, C, D, E ze cvičení *4,11* a vypočtěte její poloměr r.

4,13. Ukažte, že v prostoru E_4 přímka daná rovnicemi

$$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 2 = 0,$$
$$x_2 - x_3 = 0,$$
$$x_3 - x_4 = 0$$

protíná nadkouli o rovnici

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4$$

ve dvou bodech. Najděte je.

4,14. Ukažte, že přímka daná rovnicemi

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 4 = 0,$$
$$x_1 - x_2 = 0,$$
$$x_3 - x_4 = 0$$

je tečnou nadkoule o rovnici

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 4.$$