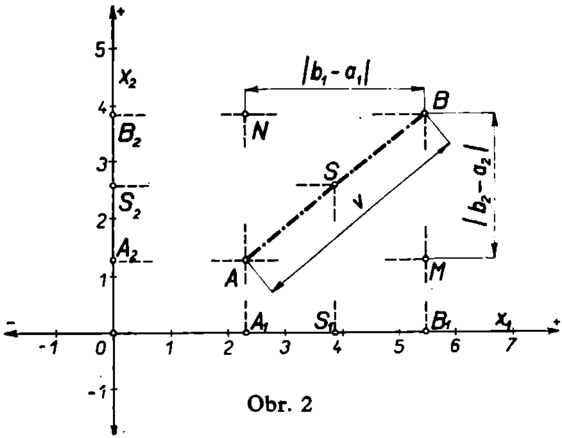
2. kapitola

ROVINA

Užití souřadnic při řešení geometrických úloh vynikne daleko více, postoupíme-li od geometrie v přímce ke geometrii v rovině. Nevystačíme při tom ovšem s jednou souřadnicí; pro určení polohy bodu v rovině potřebujeme dvě souřadnice. Každý je zná ze školy, připomeňme si je tedy jen stručně; zavedeme přitom označení, jež je vhodné pro naše další kapitoly.



Obr. 2

Zvolme v rovině dvě osy číselné x_1, x_2 k sobě kolmé o společném počátku O (viz obr. 2). Je-li A libovolný bod v rovině, veďme tímto bodem přímky rovnoběžné s osami x_1, x_2; ty vytnou na těchto osách body A_1, A_2 (bod A_1 leží na ose x_1, bod A_2 na ose x_2). Pro každý z těchto bodů určíme jeho souřadnici na příslušné ose číselné podle výkladu v kapitole 1. Bod A_1 má tak na ose číselné x_1 jedinou souřadnici a_1, bod A_2 na ose x_2 souřadnici a_2. Na základě toho řekneme, že bod A má v naší rovině souřadnice a_1, a_2 a symbolicky to zapíšeme znakem $A\,(a_1;\ a_2)$. Každému bodu roviny je tak přiřazena jediná dvojice souřadnic a obráceně, každým dvěma číslům, jež zde pokládáme za souřadnice, je touto konstrukcí přiřazen jediný bod v rovině. Přitom každá z obou souřadnic probíhá množinu všech reálných čísel. Nutno upozornit, že pořadí souřadnic v symbolickém zápisu $A\,(a_1;\ a_2)$ je podstatné — srovnej se cvičením 2,1.

Souřadnice zde zavedené nejsou pro naše čtenáře novinkou, znají je už ze školy. Nazývají se pravoúhlé, přímočaré souřadnice nebo stručně souřadnice kartézské.*) Ve škole se užívají už při vynášení grafů funkcí, jenže osy číselné x_1, x_2 jsou tam obvykle označeny písmeny x, y a říká se jim osy souřadnic (též souřadnicové osy). My se také přidržíme názvu osy souřadnic, zůstaneme však při očíslování souřadnic. Průsečík O obou os souřadnic má obě souřadnice rovny nule a nazývá se počátek. Obě osy s počátkem a příslušným měřítkem na nich nazývají se souhrnně soustava souřadnic.

Přistupme k měření vzdáleností v rovině. Jsou-li A a B dva body v rovině, označme jejich vzdálenost AB stručně písmenem v (viz stále obr. 2) a snažme se ji ze souřadnic bodů A, B vypočítat. Dojdeme k následující větě:

*) René Descartes (1596—1650), který se v latině psal Cartesius (čti Kartézijus), byl prvním, kdo těchto souřadnic systematicky užíval; proto se tyto souřadnice nazývají kartézské.

Věta 2,1. *Jsou-li $A\ (a_1; a_2)$, $B\ (b_1; b_2)$ dva body v rovině, pak jejich vzdálenost je dána číslem*

$$v = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}. \qquad (2,1)$$

Důkaz. Přímky, vedené body A, B rovnoběžně s osami souřadnými, vytváří obdélník $AMBN$ (viz obr. 2) a hledaná vzdálenost v je úhlopříčkou tohoto obdélníka. Vypočítáváme ji pomocí Pythagorovy věty, jakmile známe velikosti stran tohoto obdélníka. Ty ovšem nejsou nic jiného než vzdálenosti bodů A_1, B_1 a A_2, B_2 na osách x_1, x_2, jež umíme počítat podle věty (1,1) z předcházející kapitoly. Je tedy $A_1B_1 = |\, b_1 - a_1 \,|$, $A_2B_2 = |\, b_2 - a_2 \,|$. Protože čtverce těchto výrazů nejsou nikdy čísla záporná, není třeba v zápisu

$$v^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$$

užívat symbolu absolutní hodnoty a tak docházíme ke vzorci (2,1).

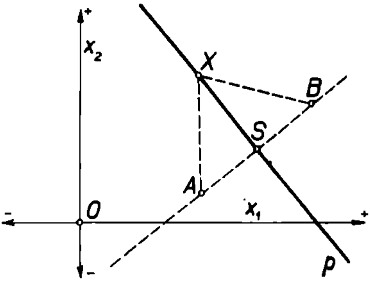
Tím je důkaz věty 2,1 proveden, opírá se ovšem o větu 1,1 dokázanou dříve. Ale nebude na škodu, když si čtenář promyslí všechny možné případy rozložení bodů A, B v rovině se zřetelem k tomu, jsou-li jejich souřadnice kladné, záporné nebo nula.

Pro výpočet souřadnic středu úsečky užijeme známé geometrické poučky, že při rovnoběžném promítání zobrazí se střed úsečky do středu průmětu této úsečky.

Věta 2,2. *Střed S úsečky, jejíž krajní body jsou $A\ (a_1; a_2)$, $B\ (b_1; b_2)$, má souřadnice*

$$s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \qquad s_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}. \qquad (2,2)$$

Důkaz. Střed S úsečky AB (viz obr. 2) promítá se rovnoběžně s osou x_2 na osu x_1 do bodu S_1, který je středem úsečky A_1B_1; jeho souřadnici s_1 dovedeme určit pomocí věty 1,2, docházíme tak k prvnímu vzorci (2,2). Podobně promítnutím bodu S rovnoběžně s osou x_1 dostaneme na ose x_2 bod S_2 a tak i druhý ze vzorců (2,2).



Obr. 3

Střed S úsečky AB je ovšem stejně daleko od bodu A jako od bodu B (viz cvičení 2,4), ale není to jediný bod této vlastnosti. V rovině je nekonečně mnoho bodů stejně vzdálených od bodů A, B a ty vyplní, jak známo, přímku, totiž osu souměrnosti p úsečky AB (obr. 3). Abychom určili souřadnice těchto bodů, označme libovolný z nich písmenem X a jeho souřadnice x_1, x_2. Podmínka $AX = BX$ vede podle vzorce (2,1) k rovnici

$$\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} = \sqrt{(x_1 - b_1)^2 + (x_2 - b_2)^2}.$$

Po umocnění této rovnice dvěma a po jednoduchém počtu dostáváme odtud pro souřadnice x_1, x_2 rovnici

$$(b_1 - a_1)\,x_1 + (b_2 - a_2)\,x_2 + \frac{1}{2}(a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2) = 0. \tag{2,3}$$

Souřadnice (2,2) bodu S vyhovují této rovnici; stačí položit v ní $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$. To je ovšem samozřejmé, neboť střed úsečky leží na její ose souměrnosti.

Rovnici (2,3) můžeme psát stručně ve tvaru

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3 = 0, \tag{2,4}$$

klademe-li

$$p_1 = \varrho\,(b_1 - a_1), p_2 = \varrho\,(b_2 - a_2), p_3 =$$

$$= \frac{\varrho}{2}\,(a_1{}^2 - b_1{}^2 + a_2{}^2 - b_2{}^2), \tag{2,5}$$

kde $\varrho \neq 0$ je libovolně zvolené číslo, jímž můžeme celou rovnici (2,4) dělit. Při daných bodech A,B jsou ovšem čísla p_1, p_2, p_3 konstanty, kdežto x_1, x_2 jsou proměnné souřadnice běžného bodu X přímky p; bod X probíhá celou přímku p. Důležité je, že rovnice (2,4) je lineární v proměnných x_1, x_2 (vyskytují se v ní nejvýše první mocniny proměnných x_1, x_2). Protože samozřejmě předpokládáme, že body A, B jsou navzájem různé, je nutně aspoň jedno z čísel p_1, p_2 nenulové. Je tedy rovnice (2,4) vskutku vždycky lineární. Protože každou přímku v naší rovině můžeme pokládat za osu souměrnosti některé úsečky, plyne z toho, že *každou přímku v rovině lze vyjádřit lineární rovnicí* $p_1\,x_1 + p_2\,x_2 + p_3 = 0$.

Ptejme se nyní, zdali obráceně každá lineární rovnice vyjadřuje nějakou přímku. Snadno zjistíme, že odpověď na tuto otázku je kladná. Je-li totiž dána lineární rovnice ve dvou proměnných x_1, x_2, existuje vždycky nějaká úsečka, jejíž osa souměrnosti je vyjádřena v dané soustavě souřadnic právě danou rovnicí. Přesvědčme se o tom. Danou lineární rovnici pišme zase ve tvaru (2,4), kde předpokládáme aspoň $p_1 \neq 0$ nebo $p_2 \neq 0$. Zvolme v rovině libovolně bod A $(a_1; a_2)$ tak, aby jeho souřadnice nevyhovovaly dané rovnici (2,4), aby tedy bylo

$$p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 \neq 0. \qquad (2,6)$$

Pak můžeme určit bod B (b_1, b_2), jehož souřadnice b_1, b_2 vyhovují rovnicím (2,5) při libovolném $\varrho \neq 0$ a při daných číslech p_1, p_2, p_3, a_1, a_2. K tomu stačí vypočítat z rovnic (2,5) neznámé b_1, b_2. Provede se to jednoduše. Vyloučením ϱ z prvních dvou rovnic (2,5) dostáváme pro neznámé b_1, b_2 lineární rovnici

$$p_2 (b_1 - a_1) = p_1 (b_2 - a_2). \qquad (2,7)$$

Dále dosazením z prvních dvou rovnic (2,5) do třetí rovnice (2,5) dostáváme po krátkém počtu

$$p_1 b_1 + p_2 b_2 + p_3 = -(p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3). \qquad (2,8)$$

To je druhá lineární rovnice pro neznámé b_1, b_2. Řešením soustavy rovnic (2,7) a (2,8) je jediná dvojice čísel b_1, b_2; podrobný výpočet i diskusi provede si už čtenář sám. Všimněme si pro zajímavost, že v důsledku nerovnosti (2,6) plyne z rovnice (2,8)

$$p_1 b_1 + p_2 b_2 + p_3 \neq 0,$$

takže souřadnice bodu B $(b_1; b_2)$ rovněž nesplňují rovnici (2,4) a zároveň body A, B jsou dva různé body. Nyní je zřejmé, že osa souměrnosti takto stanovené úsečky AB je právě daná lineární rovnice tvaru (2,4), neboť jsou splněny podmínky (2,5). To znamená, že taková *lineární rovnice vyjadřuje přímku.*

Celkově tedy pozorujeme, že v naší soustavě souřadnic je každá přímka vyjádřena lineární rovnicí a obráceně každá lineární rovnice vyjadřuje nějakou přímku. Podrobně řečeno je to tak, že souřadnice běžného bodu přímky (tj.

souřadnice bodu, který probíhá celou přímku) vyhovují nějaké lineární rovnici a že tuto vlastnost mají právě jen souřadnice bodů této přímky.

Pro stručnost vyjadřování zavádíme obecně toto rčení: *Když souřadnice všech bodů nějakého útvaru splňují určitou rovnici a když jiné body než body tohoto útvaru tuto vlastnost nemají, říkáme, že zmíněná rovnice je rovnicí tohoto útvaru, nebo že útvar má tuto rovnici.*

Dosavadní výsledky shrneme tedy takto:

Věta 2,3. *V kartézských souřadnicích má přímka v rovině rovnici lineární.*

Důkaz byl už podán diskusí rovnic a nerovností (2,3) až (2,8).

Každého přirozeně zajímá, jak se narýsuje v rovině přímka, jejíž rovnici známe. Tu je snadná pomoc; vypočítáme souřadnice dvou bodů, jež dané rovnici vyhovují, pak po vynesení souřadnic tyto body zakreslíme a nakonec narýsujeme jejich spojnici, která je hledanou přímkou. Tak na příklad rovnici

$$4x_1 + 3x_2 - 12 = 0$$

vyhovují souřadnice bodů $P\,(3; 0)$, $Q\,(0; 4)$; daná rovnice je tedy rovnicí spojnice těchto bodů P, Q.

Vedle přímky je nejjednodušší čarou v rovině kružnice. Stanovíme její rovnici (viz obr. 4).

Věta 2,4. *Kružnice v rovině o středu $S\,(s_1; s_2)$ a poloměru $r > 0$ má v kartézských souřadnicích rovnici*

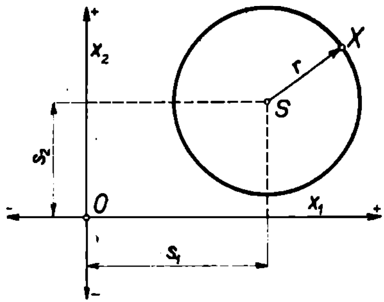
$$(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 = r^2. \tag{2,9}$$

Důkaz vychází z toho, že kružnice je vytvořena všemi takovými body $X\,(x_1; x_2)$, které od jejího středu $S\,(s_1; s_2)$

mají stejnou vzdálenost, rovnou poloměru r této kružnice. Podle vzorce (2,1) je tedy

$$\sqrt{(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2} = r,$$

což při $r > 0$ je ekvivalentní s rovnicí (2,9). Rozumí se, že v rovnici (2,9) značí x_1, x_2 proměnné souřadnice běžného bodu kružnice a s_1, s_2, r jsou konstanty.



Obr. 4

Rovnice (2,9) je v proměnných x_1, x_2 druhého stupně čili kvadratická. Provedeme-li v ní naznačené umocňování dvěma, převedeme ji na rovnici

$$x_1^2 + x_2^2 + Mx_1 + Nx_2 + P = 0, \qquad (2,10)$$

kde jsme položili

$$M = -2s_1, N = -2s_2, P = s_1^2 + s_2^2 - r^2.$$

Znásobíme-li tuto rovnici ještě nějakým nenulovým číslem, zůstane ovšem rovnicí téže kružnice jako prve. To znamená, že kvadratická rovnice tvaru

$$a(x_1^2 + x_2^2) + bx_1 + cx_2 + d = 0$$

může být rovnicí nějaké kružnice jen tehdy, když je $a \neq 0$.

(Kdyby zde bylo $a = 0$, byla by tato rovnice lineární a vyjadřovala by přímku a nikoli kružnici.)

Je-li dána nějaká rovnice (2,10), zajímá nás, jak příslušnou kružnici narýsujeme. K tomu stačí najít její střed a poloměr a k tomu zase stačí převést rovnici (2,10) na tvar (2,9). Provedeme to opět doplňováním na úplné čtverce, tedy podobně jako jsme provedli rozbor rovnice (1,5) v předcházející kapitole. Pro každé x_1, x_2 vychází $x_1^2 + x_2^2 + Mx_1 + Nx_2 + P = (x_1 + \frac{M}{2})^2 + (x_2 + \frac{N}{2})^2 + P - \frac{M^2 + N^2}{4}$. Rovnice (2,10) má pak tvar

$$(x_1 + \frac{M}{2})^2 + (x_2 + \frac{N}{2})^2 = \frac{M^2 + N^2}{4} - P.$$

Srovnáním s rovnicí (2,9) tedy vychází, že kružnice, vyjádřená rovnicí (2,10), má střed $S\ (s_1; s_2)$ a poloměr r, kde je

$$s_1 = -\frac{M}{2}, \quad s_2 = -\frac{N}{2}, \quad r = \frac{1}{2}\sqrt{M^2 + N^2 - 4P};$$

to ovšem předpokládá $M^2 + N^2 - 4P > 0$.

Vyjádření geometrických útvarů rovnicemi má významný důsledek. Umožňuje totiž rozborem rovnic studovat geometrii. Protože rozbor se nazývá cizím slovem analýza, vžil se na celém světě pro právě naznačený způsob studia geometrie název *analytická geometrie*. Zakladatelem analytické geometrie byl už dříve zmíněný René Descartes, vynikající francouzský učenec, především matematik a filosof. Svým objevem analytické geometrie odkryl před zraky svých současníků novou, do té doby netušenou souvislost mezi geometrií a aritmetikou. To bylo přibližně před třemi sty lety. V té době byly už algebraické a vůbec aritmetické metody v matematice mnohem víc propracovány než v geometrii, která vyvrcholila ve starověku Euklidem a až do 16. století mnoho nepokročila. Je tedy pochopitelné, že Descartova metoda znamenala ve vývoji geometrie podstatný a vlastně revoluční krok kupředu, neboť umožnila velkou řadu aritmetických zákonů převádět do geometrie. Aritmetika prokázala tehdy geometrii velkou službu. A geometrie se jí za to později bohatě odměnila, jak poznáme v dalších kapitolách.

Abychom aspoň trochu nahlédli do souvislosti aritmetiky s geometrií, položme si nejdřív nějakou úlohu o přímkách v rovině, pro názornost výkladu hodně jednoduchou. Jsou-li například a, b dvě přímky v rovině, jejichž rovnice jsou

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3 &= 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3 &= 0, \end{aligned} \qquad (2,11)$$

hledejme jejich průsečík. Souřadnice tohoto průsečíku vyhovují oběma rovnicím (2,11), neboť je to bod ležící na obou přímkách a, b. Analytickou geometrií převádíme zde tedy geometrickou úlohu na úlohu z algebry. Místo abychom hledaný průsečík narýsovali, řešíme soustavu (2,11) dvou lineárních rovnic o dvou neznámých x_1, x_2. Tento postup má svoje výhody. Neselže například ani v tom případě, kdy hledaný průsečík je příliš daleko, kdy se nevejde na nákresnu, takže ho narýsovat ani nemůžeme. Řešení rovnic (2,11) nám dá bezpečnou odpověď i tehdy, když v narýsovaném obrázku si nejsme docela jisti; to se může stát v případě, kdy obě přímky se velmi málo liší od rovnoběžek, jež průsečík nemají. Přitom přímky se ještě snadno rýsují. Kdybychom však místo průsečíku přímek hledali průsečíky křivek, které se rýsují obtížněji, vynikla by výhoda početní metody, protože dá při nejmenším přesnější výsledek než rýsování. Už například jednoduchá otázka, zda-li určitá přímka je tečnou kružnice nebo ne, není z obrázku vždycky tak bezpečně patrná jako z řešení příslušných rovnic, jak dále uvidíme.

Otázka po společném řešení rovnic (2,11) je tedy ekvivalentní s otázkou po průsečíku dvou přímek v rovině. Z geometrického hlediska je ihned patrné, že mohou nastat celkem tři následující případy:

1. Když se přímky a, b protínají v jednom bodě, má soustava (2,11) jediné řešení. Například soustava

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + 1 &= 0,\\
2x_1 + 3x_2 - 3 &= 0
\end{aligned}
$$

má jediné řešení: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

2. Když přímky a, b jsou rovnoběžné a navzájem různé, pak se neprotínají a neexistuje tedy společné řešení rovnic (2,11). Příkladem tu může být soustava rovnic

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + 1 &= 0,\\
x_1 - x_2 + 3 &= 0.
\end{aligned}
$$

O takových rovnicích říkáme, že jsou ve sporu.

3. Konečně se může stát, že obě rovnice (2,11) představují tutéž přímku, čili že přímky a, b splývají. V tom případě mají tyto přímky nekonečně mnoho společných bodů a soustava rovnic (2,11) má pak nekonečně mnoho řešení. Tak na příklad rovnicím

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + 1 &= 0,\\
3x_1 - 3x_2 + 3 &= 0
\end{aligned}
$$

vyhovuje každé řešení $x_1 = u$, $x_2 = u + 1$, kde u je libovolně volitelné číslo.

Z právě podaných příkladů je vidět, že také geometrie může účinně pomáhat při řešení aritmetických problémů. Podmínky existence řešení soustavy rovnic (2,11) jsou ovšem dávno v algebře dobře známy a o počtu řešení rozhodují všelijaké vzájemné vztahy mezi součiniteli a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3. Přehled o existenci a počtu těchto řešení dává však geometrie bezprostředně, neboť dvě přímky jsou buď různoběžné, nebo rovnoběžné a nebo konečně splývají. To už narážíme na opačný proces, než jaký převládal za dob Descartových, kdy se aritmetiky užívalo k řešení geometrických úloh, kdy tedy převládala aritmetizace geometrie. Dnes pozorujeme opačnou tendenci. Podle slov sovětského akademika A. N. Kolmogorova (narozen 1903) je pro dnešní matematiku příznačná geometrizace aritmetiky. Je třeba, aby toto stanovisko zaujal i náš čtenář při sledování dalších kapitol.

Vraťme se teď ještě k Descartově analytické geometrii v rovině. Sledujme průsečíky přímky s kružnicí. Má-li přímka rovnici (2,4) a kružnice rovnici (2,10), budou souřadnice průsečíků obou těchto čar vyhovovat oběma těmto rovnicím. Hledáme tedy v tomto případě řešení soustavy rovnic

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3 = 0,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + Mx_1 + Nx_2 + P = 0,$$

z nichž první je lineární a druhá kvadratická. Vypočítáme-li z první z nich jednu neznámou a dosadíme-li ji do druhé rovnice, vyjde samozřejmě pro druhou neznámou kvadratická rovnice. Její kořeny jsou buď dvě vzájemně různá reálná čísla (pak přímka je sečnou kružnice), nebo existuje jeden dvojnásobný kořen (přímka je tečnou kružnice), nebo neexistují žádné reálné kořeny (a přímka je pak nesečnou kružnice). Pokuste se sami vyřešit konkrétní případy a příslušné čáry zároveň narýsovat (viz cvič. 2,9 a 2,10.)

Analytickou geometrii v rovině jsme tím ovšem zdaleka nevyčerpali. Všimli jsme si jen velmi povrchně rovnic přímek a kružnic. I nerovnosti se zde uplatňují; na příklad nerovnost $x_1^2 + x_2^2 < 1$ charakterizuje všechny body ležící uvnitř kružnice o středu v počátku a poloměru $r = 1$, je to tedy analytické vyjádření vnitřku kruhu.

Hlavním účelem tu bylo srovnání početních a geometrických metod a zdůraznění jejich vzájemného vztahu. Učiníme z toho podobné závěry jako na konci 1. kapitoly. K řešení geometrických úloh v rovině jsme užili *dvou* souřadnic, které polohu každého bodu v rovině charakterizují. Přitom každá z těchto souřadnic probíhá množinu všech reálných čísel. Protože tedy máme v rovině dvě souřadnice, říkáme, že *rovina je dvojrozměrná*. A protože běžně známá euklidovská geometrie je založena na pojmu vzdálenosti dvou bodů, která je vyjádřena vzorcem (2,1), říkáme, že **rovina, v níž měření provádíme podle vzorce (2,1), je dvojrozměrný euklidovský prostor.**

Cvičení

2,1. Zakreslete v rovině (v téže soustavě souřadné) body M (3; −1) a N (−1; 3) a přesvědčte se, že oba tyto body jsou navzájem různé.

2,2. Určete délky stran trojúhelníka ABC, je-li a) A (1; 2), B (4; −1), C (5; 5); b) A (2; 5), B (−4; 2), C (8; −3).

2,3. Ukažte, že trojúhelník OPQ, kde O je počátek, P ($\sqrt{3}$; 1) a Q ($\sqrt{3}$; −3) jsou další dva body, je pravoúhlý.

2,4. Přesvědčte se, že bod S o souřadnicích daných rovnicemi (2,2) má stejnou vzdálenost od bodu A (a_1; a_2) jako od bodu B (b_1; b_2) a že je

$$AS = BS = \frac{1}{2} AB.$$

2,5. Narýsujte přímku, jejíž rovnice je a) $\frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{q} = 1$, b) $x_2 = k\,x_1$, kde $p \neq 0$, $q \neq 0$, k jsou libovolně zvolená čísla.

2,6. Napište rovnici kružnice, která má

a) střed v počátku a poloměr $r = 4$;

b) střed S (0; 5) a poloměr $r = 5$;

c) střed S (3; 2) a prochází počátkem;

d) střed S (1; −4) a poloměr $r = 2\sqrt{5}$.

2,7. Určete střed a poloměr kružnice, jejíž rovnice je

a) $x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 - 12 = 0$;

b) $x_1^2 + x_2^2 + 10x_1 - 24 = 0$;

c) $x_1^2 + x_2^2 - 2ax_2 = 0$, kde je $a > 0$.

2,8. Určete průsečík přímek o rovnicích

a) $2x_1 - 5x_2 + 6 = 0$, $8x_1 + 15x_2 + 10 = 0$;

b) $3x_1 + 4x_2 - 12 = 0$, $6x_1 + 8x_2 - 7 = 0$;

c) $7x_1 + 4x_2 - 8 = 0$, $\frac{7}{2}x_1 + 2x_2 - 4 = 0$.

2,9. Určete průsečíky přímky s kružnicí, jsou-li rovnice těchto čar

a) $x_1 - 3x_2 + 9 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 - 25 = 0$;

b) $x_1 - x_2 - 1 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 + 6x_2 - 7 = 0$.

2,10. Dokažte, že přímka o rovnici $3x_1 + 4x_2 - 39 = 0$ je tečnou kružnice dané rovnicí $x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 + 10x_2 - 66 = 0$ a určete příslušný bod dotyku.