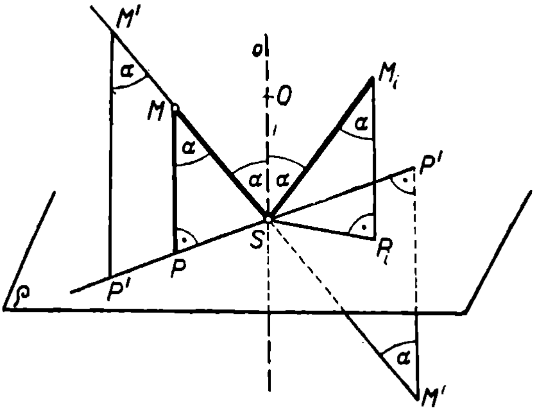
3. kapitola

DALŠÍ PŘÍKLADY G. M. B. V PROSTORU

1. *Je dána rovina ϱ a v ní bod S. Určete g. m. b., které mají stálý poměr vzdáleností od roviny ϱ a od bodu S, rovný danému kladnému číslu $\lambda < 1$.*



Obr. 5

Řešení. Nechť o bodu M platí pro úsečky MP a MS vztah

$$(*) \qquad MP : MS = \lambda,$$

kde bod P je pata kolmice sestrojené bodem M k rovině ϱ. Protože je $\lambda < 1$, je $P \not\equiv S$. (Viz obr. 5.) Bod M náleží tedy hledanému g. m. b. a zřejmě i každý další bod M' přímky MS (až na bod S) náleží tomuto g. m. b. To vyplývá z vlastnosti podobných pravoúhlých trojúhelníků

$$\triangle MSP \sim \triangle M' S P'.$$

V nich označme α velikost úhlu při vrcholu M resp. M', což je vzhledem k vztahu (*) známé číslo, neboť $\cos \alpha = \lambda$. Sestrojíme-li bodem S přímku $o \perp \varrho$, pak i úhel $\sphericalangle OSM = \alpha$ (bod $O \neq S$ je libovolně zvolený bod na přímce o). To znamená: Každý bod M, který má vlastnost požadovanou v úloze, náleží rotační ploše kuželové K o vrcholu v bodě S a ose kolmé k rovině ϱ; úhly tvořících přímek plochy K vzniklé rotací kolem přímky o svírají s osou plochy úhly velikosti α, přičemž $\cos \alpha = \lambda$.

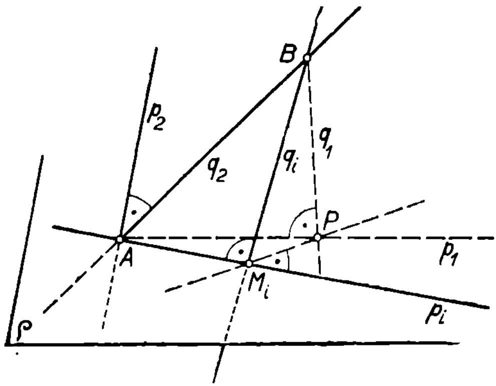
Obráceně, zvolíme-li libovolný bod $M_i \neq S$ na kuželové ploše K, pak bod M_i má vlastnost předepsanou v úloze a náleží tedy našemu g.m. b. To vyplývá z pravoúhlého trojúhelníka $\triangle M_iSP_i$ (viz obr. 5), v němž velikost úhlu $\sphericalangle P_iM_iS$ je α a v němž platí vztah $M_iP_i : M_iS = \lambda$. Proto: *G. m. b., které mají daný poměr λ vzdáleností od roviny ϱ a od jejího bodu S, je rotační plocha kuželová K s vyloučením jejího vrcholu S.*

Má-li mít úloha řešení, musí být $0 < \lambda < 1$, což odpovídá tomu, že ze všech úseček, které spojují bod M (neležící na přímce o) s body roviny ϱ, je délka MP kolmice k rovině ϱ nejkratší.

Úloha 10. Jak by vypadalo g. m. b. v předchozím příkladě, kdyby dané číslo $\lambda = 1$? [Přímka o s vyloučením bodu S.]

2. *Je dána rovina ϱ, v ní bod A a mimo ni bod B. Určete g. m. b. společných přímkám p_i, které tvoří v rovině ϱ svazek* *o středu v bodě A, a přímkám q_i, které procházejí bodem B a z nichž každá je kolmá k příslušné přímce p_i.*

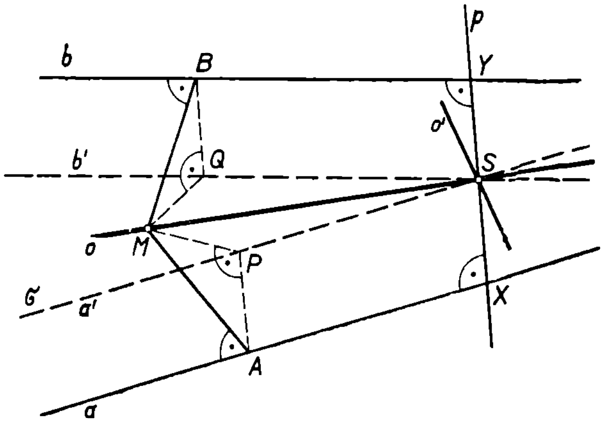
Řešení. Hledané g. m. b., jestliže existuje, obsahuje zřejmě jenom body M, které leží v rovině ϱ.



Obr. 6

Nejprve předpokládejme, že kolmice, sestrojená bodem B k rovině ϱ, protíná ϱ v bodě $P \not\equiv A$ (viz obr. 6). Bod P je jeden bod našeho g. m. b., neboť zvolíme-li přímku $p_1 \equiv AP$, potom je příslušná přímka $q_1 \equiv BP$. Rovněž bod A je bodem našeho g. m. b., protože sestrojíme-li bodem A přímku $p_2 \perp p_1$, dostaneme na příslušné přímce $q_2 \perp p_2$ bod $M_2 \equiv A$. Dále zvolme v rovině ϱ přímku $p_i \not\equiv AP$ a sestrojme v rovině (Bp_i) přímku $q_i \perp p_i$. Průsečík $M_i \equiv p_i \,.\, q_i$ je dalším bodem našeho g. m. b. Snadno dokážeme, že přímka PM_i je kolmá k přímce $p_i \equiv AM_i$. Je totiž $AM_i \perp BM_i$ (podle sestrojení daného podmínkou úlohy) a $AM_i \perp BP$ (protože je $BP \perp \varrho$). Odtud vyplývá, že je $AM_i \perp (BM_iP)$, a je tedy $AM_i \perp PM_i$. Vyplní tedy body M_i v rovině ϱ Thaletovu kružnici k, sestrojenou nad průměrem AP.

Jestliže obráceně zvolíme libovolný bod $M_i \neq A$, $M_i \neq P$ na kružnici k, pak platí
$AM_i \perp PM_i$ (bod M_i leží na k), $AM_i \perp BP$ (protože je $BP \perp \varrho$), a tedy je i $AM_i \perp (BPM_i)$ a proto je $AM_i \perp BM_i$.



Obr. 7

Protože také body A, P kružnice k náležejí hledanému g. m. b., dokázali jsme větu: *G. m. b.* $M_i \equiv p_i . q_i \, (p_i \perp q_i)$ *je Thaletova kružnice k.*

Ve zvláštním případě, který jsme zpočátku vyloučili, kdyby splynul bod P s daným bodem A, tj. kdyby přímka AB byla kolmá k dané rovině ϱ, pak g. m. b. naší úlohy bude zřejmě pouze bod A.

Úloha 11. Je dána přímka p a mimo ni bod A. Určete g. m. b. společných rovinám ϱ_i svazku rovin o ose p a přímkám q_i, které procházejí bodem A, a je-li $q_i \perp \varrho_i$. [Kružnice Thaletova ležící v rovině $\sigma \perp p$; σ prochází bodem A.]

3. *Je dána rovina σ a dvě mimoběžné přímky a, b, které jsou rovnoběžné s rovinou σ a které mají od roviny σ stejnou vzdálenost. Určete v rovině σ g. m. středů kulových ploch $\varkappa$, které se dotýkají daných přímek a, b.*

Řešení. Jestliže bod M (viz obr. 7) roviny σ je středem kulové plochy $\varkappa$, která se dotýká přímek a, b, potom je přímka MA kolmá k přímce a (bod A je pata kolmice MA na přímce a), přímka MB je kolmá k přímce b (bod B je pata kolmice MB na přímku b) a je $MA = MB$. Takový bod M lze snadno sestrojit. Sestrojme dále kolmice $AP \perp a'$, $BQ \perp b'$, kde přímky a', b' jsou pravoúhlé průměty přímek a, b do roviny σ. Protože je $AP = BQ$ a o úhlech $\sphericalangle APM$, $\sphericalangle BQM$ platí

$$\sphericalangle APM = \sphericalangle BQM = \mathrm{R},$$

jsou pravoúhlé trojúhelníky $\triangle MAP$, $\triangle MBQ$, které mají shodné přepony $MA = MB$ a shodné odvěsny $AP = BQ$, navzájem shodné. Proto je $MP = MQ$. Leží tedy bod M roviny σ na ose o úhlu přímek a', b'.

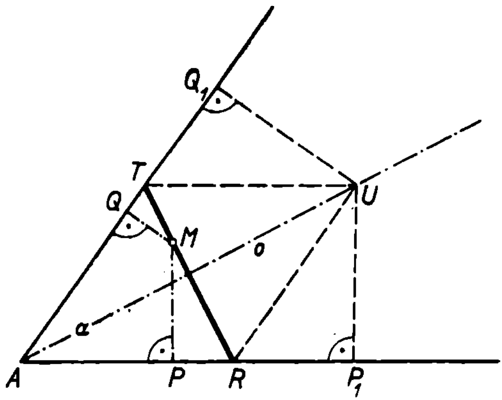
Obráceně, zvolíme-li na jedné z os $o \perp o'$ přímek a', b' libovolný bod M_i, pak ze shodných pravoúhlých trojúhelníků $\triangle M_iA_iP_i$, $\triangle M_iB_iQ_i$ snadno dokážeme, že z bodu M_i jakožto středu lze sestrojit kulovou plochu $\varkappa_i$, která se dotýká přímek a, b. Zřejmě i z bodu $S \equiv o . o'$ lze sestrojit určitou kulovou plochu naší úlohy.

Tím jsme dokázali, že *g. m. středů kulových ploch $\varkappa$ požadovaných v naší úloze jsou osy o, o' přímek a', b'.*

4. *Je dán klín K o úhlu velikosti α, $0 < \alpha < 2\,\mathrm{R}$, a kladné* *číslo s. Určete g. m. b., které náležejí klínu K a jejichž součet vzdáleností od rovin stěn klínu K je konstantní, rovný s.*

Řešení. Nechť bod M vyhovuje podmínce naší úlohy, tj. o jeho vzdálenostech $MP = v_1$, $MQ = v_2$ od rovin stěn klínu K (viz obr. 8) platí vztah

$$v_1 + v_2 = s. \tag{1}$$



Obr. 8

Protože přímky MP, MQ jsou kolmé k hraně a klínu K, určují rovinu ω kolmou k přímce a. V rovině ω dostáváme jako průnik roviny ω a klínu K úhel $\sphericalangle PAQ$, kde bod A je průsečík $\omega . a$.

Nyní řešme planimetrickou úlohu: V úhlu $\sphericalangle PAQ$ máme určit g. m. b., jejichž součet vzdáleností od ramen úhlu $\sphericalangle PAQ$ je konstantní, rovný s.

Bod M je jeden takový bod. Pokus s několika body M_i přivede nás k tomuto řešení:

Bodem M veďme mezi rameny úhlu $\sphericalangle PAQ$ úsečku kolmou na osu o úhlu $\sphericalangle PAQ$; její koncové body označme: R na AP, T na AQ. V pravoúhlých trojúhelnících $\triangle MRP$ a $\triangle MTQ$ jsou úhly $\sphericalangle RMP = \sphericalangle TMQ = \frac{1}{2}\,\alpha$ (ramena těchto ostrých úhlů jsou kolmá na ramena ostrých úhlů $\sphericalangle uAP = \sphericalangle uAQ = \frac{1}{2}\,\alpha$), takže je

$$v_1 = MR.\cos\tfrac{1}{2}\alpha,\ v_2 = MT.\cos\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Proto o úsečce RT platí:

$$RT = MR + MT = (v_1 + v_2)\frac{1}{\cos\frac{1}{2}\alpha} = \frac{s}{\cos\frac{1}{2}\alpha},$$

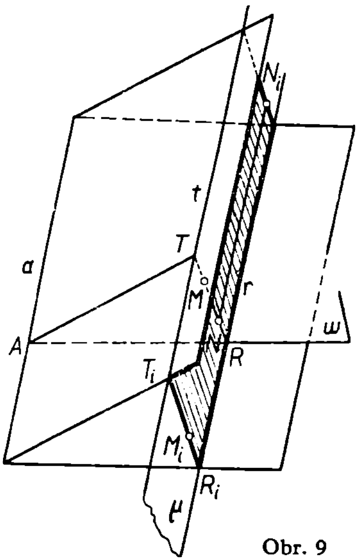
tj. že je konstantní délky a pro daný úhel velikosti α a daný součet vzdáleností s jediná, a lze ji snadno sestrojit.[6]) Z naší úvahy vyplývá: a) Platí-li o bodu M vztah (1), pak bod M náleží úsečce RT, b) leží-li bod M na úsečce RT, potom o jeho vzdálenostech v_1, v_2 od ramen úhlu $\sphericalangle PAQ$ platí vztah (1). Je tedy hledaným g. m. b. úsečka RT.

Nyní už snadno přejdeme k řešení naší úlohy v prostoru, a to s pomocí shodného zobrazení, v tomto případě s pomocí rovnoběžného posunutí úsečky RT ve směru přímky a. Proto sestrojíme přímkou RT rovinu μ rovnoběžnou s přímkou a. Rovina μ protne roviny aP, aQ stěn klínu K (viz obr. 9) v přímkách $r \parallel t \parallel a$, které určují přímý pás $P \equiv (r, t)$. Sestrojíme-li nyní libovolný bod M_i, jehož vzdálenosti od stěn klínu K vyhovují podmínce naší úlohy, lze bodem M_i proložit rovinu $\omega_i \perp a$ a v ní bodem M_i úsečku $R_iT_i \# RT$. Úsečka R_iT_i, vzniklá zmíněným posunutím z úsečky RT, tvoří v rovině μ g. m. b., které

[6]) Úsečku RT sestrojíme jako úhlopříčku kosočtverce $ARUT$, jehož vrchol U protilehlý k vrcholu A dostaneme jako bod ležící uvnitř úhlu $\sphericalangle PAQ$ a vzdálený od přímky AP i AQ o délku rovnou $s = P_1U = Q_1U$.

mají vlastnost požadovanou v naší úloze, a náleží zřejmě uvažovanému pásu *P* a s ní i zvolený bod M_i.

Obráceně: Každý jiný bod N_i pásu *P*, jehož vzdálenosti od rovin stěn klínu *K* jsou v_i, v'_i, má vlastnost požadovanou



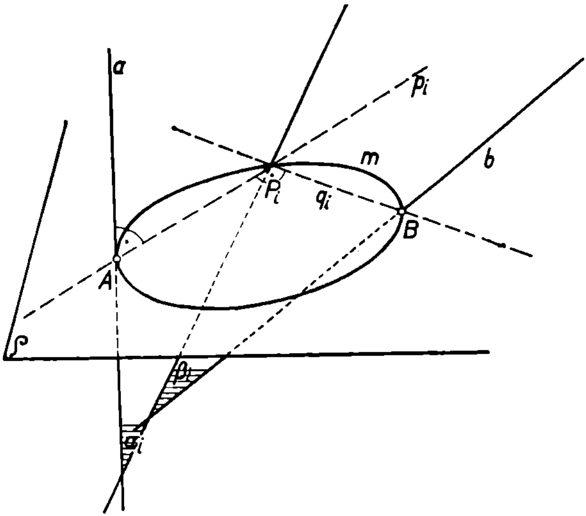
Obr. 9

v naší úloze, tj. platí vztah: $v_i + v'_i = s$. Bod N_i vznikl totiž z určitého bodu *N* úsečky *RT* zmíněným posunutím.

Proto nakonec platí: *G. m. b., které náležejí klínu a jejichž součet vzdáleností od rovin stěn klínu K je roven danému číslu s, je přímý pás P* roviny μ určený přímkami *r*, *t*.

Úloha 12. Určete g. m. b., jejichž součet vzdáleností od daných dvou různoběžných rovin je konstantní, rovný kladnému číslu *s*. [Jsou to čtyři přímé pásy tvořící stěny přímé hranolové plochy s obdélníkovým řídicím mnohoúhelníkem a s osou rovnoběžnou s průsečnicí daných rovin.]

5. *Jsou dány dvě přímky $a \not\equiv b$ a rovina ϱ, která je kolmá k přímce a. Každé rovině β_i svazku rovin o ose b přiřaďme ve svazku rovin o ose a rovinu α_i, která je kolmá k rovině β_i.*



Obr. 10

Určete g. m. b. společných rovinám ϱ, α_i, β_i. Rozlište různé polohy přímky b vzhledem k rovině ϱ.

Řešení. *Případ* [1]. Nechť přímka b je různoběžná s rovinou ϱ a průsečíky přímek a, b s rovinou ϱ jsou body $A \not\equiv B$ (viz obr. 10). Průsečnice rovin α_i s rovinami β_i jsou přímky $p_i \equiv \alpha_i . \varrho$ svazku o středu v bodě A a průsečnice rovin β_i s rovinou ϱ tvoří svazek přímek $q_i \equiv \beta_i . \varrho$ o středu v bodě B. Hledané g. m. b. naší úlohy jsou tedy body $P_i \equiv p_i . q_i$.

Každá rovina α_i obsahuje přímku a a určitou přímku p_i. Příslušná rovina β_i, kolmá k rovině α_i, obsahuje jistou přímku c, která prochází bodem B a která je kolmá k rovině α_i. Proto přímka c je kolmá k přímce a; leží tedy přímka c v rovině ϱ a je tedy $c \equiv q_i$. Protože však je přímka c kolmá i k přímce p_i roviny α_i, je $q_i \perp p_i$. Hledané body $P_i \equiv p_i . q_i$ vyplní proto v rovině ϱ *Thaletovu kružnici m*, sestrojenou nad průměrem AB.

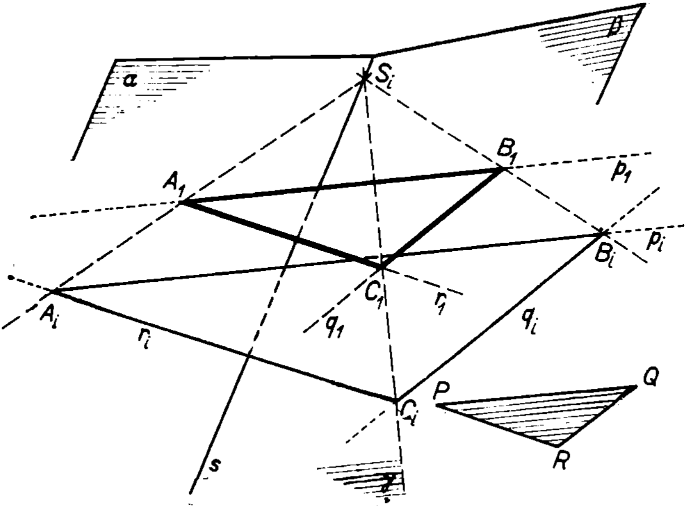
Případ [2]. Přímka b je různoběžná s rovinou ϱ a protíná ji v bodě $B \equiv A$. Tu každá dvojice rovin α_i, β_i má s rovinou ϱ společný právě jen bod A. Hledaným g. m. b. je tedy *pouze bod A*.

Případ [3]. a) Přímka b je rovnoběžná s rovinou ϱ (ale neleží v rovině ϱ). V tomto případě je přímka a kolmá k přímce b, takže ke všem rovinám β_i svazku o ose v přímce b je kolmá jediná rovina α_0, která obsahuje přímku a; α_0 je kolmá k přímce b. G. m. b. společných rovinám ϱ, α_0, β_i (s vyloučením roviny $\beta_0 \parallel \varrho$) je *přímka* $m_0 \equiv \equiv \varrho . \alpha_0$.

b) Kdyby přímka b ležela v rovině ϱ, pak naše g. m. b. je *celá rovina* ϱ.

6. *Jsou dány dvě roviny $\alpha \not\equiv \beta$ a trojúhelník $\triangle PQR$, přičemž žádná jeho strana není rovnoběžná ani s rovinou α ani s rovinou β. Určete g. m. vrcholů C trojúhelníků ABC, jestliže vrchol A každého z nich leží v rovině α, vrchol B v rovině β a jestliže pro jeho strany platí: $AB \parallel PQ$, $BC \parallel QR$, $CA \parallel RP$.*

Řešení. *Případ* [1]: Nechť dané roviny α, β jsou různoběžné o společné průsečnici s. Zvolme přímku $p_1 \parallel PQ$ a ta nechť protíná rovinu α resp. β v bodě A_1 resp. B_1, přitom je $A_1 \neq B_1$. Potom veďme přímku $q_1 \parallel QR$ bodem B_1 a přímku $r_1 \parallel RP$ bodem A_1 (viz obr. 11). Vznikne trojúhelník $\triangle A_1B_1C_1$, jehož rovina je rovnoběžná s rovinou (PQR). Jeho vrchol C_1 je jedním bodem hledaného



Obr. 11

g. m. b. naší úlohy. Bod C_1 nepadne na přímku s, neboť ani úsečka PR ani úsečka QR není rovnoběžná s rovinami α, β. *Bod* C_1 *s přímkou* s *určují rovinu* γ, o níž dokážeme, že *s vyloučením bodů přímky* s *je hledaným g. m. b.* C.

a) Nejprve dokážeme, že každá přímka $p_i \parallel PQ$ bez společného bodu s přímkou s vede k bodu C_i, který leží v rovině γ (ne však na přímce s). Nechť tedy přímka p_i (různá od p_1) protíná rovinu α resp. β v bodě A_i resp. B_i

a rovina (p_i, p_1) přímku s v bodě S_i. Potom přímka $r_i \parallel r_1$ vedená bodem A_i a přímka $q_i \parallel q_1$ vedená bodem B_i určují dvě roviny (r_i, S_i), (q_i, S_i) s průsečnicí $S_i C_1$; na přímce $S_i C_1$ leží i bod C_i, jakožto společný bod tří rovin (r_i, S_i), (q_i, S_i), (p_i, p_1). Leží tedy bod C_i v rovině γ.

b) Obráceně: Zvolme v rovině γ libovolný bod $C \neq C_i$, $(C \neq C_1)$, který neleží na přímce s, a sestrojme přímku $C C_1$; ta nechť protne přímku s v bodě S. Snadno dokážeme obráceným postupem úvahy provedené v a), že lze pro bod C sestrojit $\triangle ABC$ se stranou $CA \parallel RP$ a $CB \parallel RQ$ s vrcholy A resp. B v rovině α resp. β. (Úvahu možno sledovat na obr. 11 s pomocí bodu C_i místo C a bodu S_i místo S.)

Bod C nemůžeme volit na přímce s, neboť by pak přímky CA, CB měly ležet v rovině α resp. β, protože bod A má být v rovině α a bod B v rovině β, takže by úsečky RP $(\parallel CA)$, RQ $(\parallel CB)$ byly rovnoběžné s rovinou α resp. β, což odporuje textu naší úlohy.

Všimněme si ještě, že náš předpoklad o existenci bodu S ležícího na přímce s není pro důkaz podstatný, neboť kdyby byla přímka CC_1 rovnoběžná s přímkou s, přešla by jehlanová plocha $S_iA_1B_1C_1$, vzniklá za existence bodu S_i, v tomto případě v plochu hranolovou obsahující body $A_1B_1C_1$ s tvořícími přímkami směru s.

Případ [2]: Jsou-li dané roviny rovnoběžné, tj. $\alpha \parallel \beta$, pak zcela obdobnou cestou dokážeme, že g. m. b. C je rovina $\gamma \parallel \alpha \parallel \beta$, kterou určíme jedním bodem C_1, který sestrojíme jako v případě [1]. Příslušnou úvahu ponecháme čtenáři.

Poznámka. Trojúhelníky $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_iB_iC_i$ tvoří v prostoru dvojice trojúhelníků stejnolehlých o středu stejnolehlosti v bodě S_i (v případě [1]). V případě [2] jsou všechny trojúhelníky $A_iB_iC_i$ shodné.

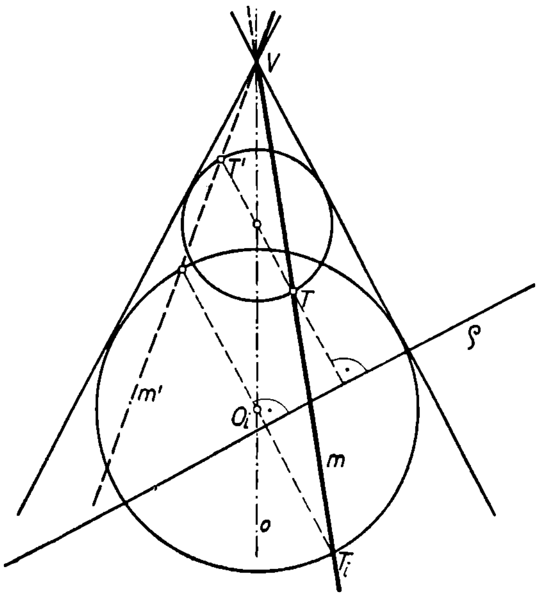
Úloha 13. Je dána přímka a, rovina β neobsahující přímku a a trojúhelník $\triangle PQR$, jehož žádná strana není rovnoběžná ani s přímkou a ani s rovinou β. Určete g. m. vrcholů C trojúhelníků $\triangle ABC$, jestliže vrchol A každého z nich leží na přímce a, vrchol B v rovině β a o jehož stranách platí: $AB \parallel PQ$, $BC \parallel QR$, $CA \parallel RP$. [Jestliže: a) přímka a a rovina β jsou různoběžné, potom g. m. vrcholů C je přímka procházející bodem $P \equiv a . \beta$ s vyloučením bodu P; b) jestliže přímka a je rovnoběžná s β (nejsou však podle textu úlohy incidentní), je g. m. vrcholů C přímka rovnoběžná s a, určená jedním bodem C_1, který splňuje podmínky úlohy a jejž snadno sestrojíme.]

7. *Je dána rotační kuželová plocha K a rovina ϱ. Do plochy K jsou vepsány kulové plochy $\varkappa_i$. Určete g. m. b. dotyku těch tečných rovin τ_i ploch $\varkappa_i$, jsou-li roviny τ_i rovnoběžné s rovinou ϱ.*

Řešení. Kulové plochy $\varkappa_i$ vepsané ploše K jsou, jak známo, navzájem v dvojicích stejnolehlé (homotetické) v stejnolehlosti (homotetii) S se středem stejnolehlosti ve vrcholu V plochy K. Středy O_i ploch $\varkappa_i$ vyplňují osu o plochy K (až na bod V) a dotykové body T_i tečných rovin τ_i ploch $\varkappa_i$ rovnoběžných s rovinou ϱ leží na kolmicích vedených body přímky o k rovině ϱ.

Rozeznávejme dva případy: *Případ* [1]. Nechť daná rovina není kolmá k ose o plochy K. Dotykové body T_i leží v rovině $\sigma \perp \varrho$ proložené přímkou o a odpovídají sobě v stejnolehlosti S, jakožto diametrálně protilehlé body na plochách $\varkappa_i$, takže leží na dvou přímkách m, m' stejnolehlosti v rovině σ a procházejí bodem V. Přímky m, m' snadno určíme, sestrojíme-li na jedné ploše $\varkappa$ vepsané do plochy K příslušné dotykové body T, T' tečných rovin rovnoběžných s rovinou ϱ. Potom je $m \equiv VT$, $m' \equiv VT'$ (viz obr. 12).

Obráceně, zvolíme-li na m (nebo na m') libovolný bod T_i (nebo T'_i) různý od V, lze sestrojit plochu $\varkappa_i$ se středem O_i (nebo $\varkappa'_i$ se středem O'_i), vedeme-li v rovině σ přímky $T_iO_i \perp \varrho$ (nebo $T'_iO'_i \perp \varrho$). Ze stejnolehlosti



Obr. 12

ploch $\varkappa_i$ a $\varkappa$ (nebo $\varkappa'_i$ a $\varkappa$) vyplývá, že plochy $\varkappa_i$ a $\varkappa'_i$ jsou vepsány do plochy K. Jsou tedy body T_i a T'_i body našeho g. m. b.

Proto platí: *G. m. b. dotyku ploch $\varkappa_i$ vepaných ploše K, v nichž sestrojené tečné roviny jsou rovnoběžné s rovinou ϱ, jsou přímky m, m' s vyloučením jejich společného bodu V.*

Případ [2]. Je-li ve zvláštním případě daná rovina ϱ kolmá k přímce o, pak přímky m, m' splývají s přímkou o, která (kromě bodu V) je hledaným g. m. b. dotyku.

Úloha 14. Je dána rovina α, v ní bod A a rovina ϱ. Jsou sestrojeny kulové plochy $\varkappa_i$, které se dotýkají roviny α v bodě A. Určete g. m. b. dotyku tečných rovin ploch $\varkappa_i$, které jsou rovnoběžné s rovinou ϱ. [Jsou-li roviny α, ϱ různoběžné, pak dvě navzájem kolmé přímky procházející bodem A, z nichž je vyňat bod A, a ležící v rovině, která je kolmá k průsečnici rovin α a ϱ. Ve zvláštním případě obě výsledné přímky splývají.]

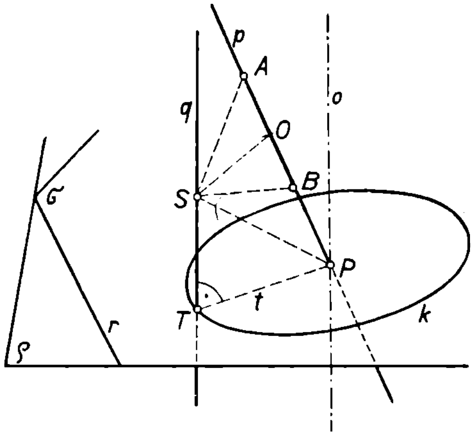
8. *Je dána rovina ϱ a uvnitř jednoho s poloprostorů vyťatých rovinou ϱ dva body A, B různě vzdálené od roviny ϱ. Určete g. m. středů kulových ploch $\varkappa_i$, které se dotýkají roviny ϱ a které procházejí body A, B* (nebo v jiné formulaci, g. m. b., které mají od roviny ϱ a bodů A, B vzdálenosti ($\neq 0$) sobě rovné).

Řešení. Nechť přímka $p \equiv AB$ protíná rovinu ϱ v bodě P. Použijeme mocnosti M bodu P ke kulovým plochám $\varkappa_i$, které procházejí body A, B. Platí vztah (viz kapitolu 2, poznámku):

$$M = PA \, . \, PB = t^2, \tag{1}$$

kde t značí délku tečen vedených z bodu P ke všem kulovým plochám, které procházejí body A, B. Délka t je vztahem (1) jednoznačně určena. Tečny PT_i ploch $\varkappa_i$, které se dotýkají roviny ϱ v bodech T_i, mají tedy dotykové body na kružnici $k \equiv (P, t)$ roviny ϱ.

Nechť tedy bod S je středem jedné z kulových ploch $\varkappa_i$. Potom a) musí být splněn vztah $SA = SB$, b) dále musí pata T kolmice z bodu S sestrojená k rovině ϱ ležet na kružnici k (viz obr. 13). Vztah a) vyžaduje, aby bod S ležel v rovině $\sigma \perp p$, a to v rovině souměrnosti bodů A, B. Aby bylo vyhověno i požadavku b), musí bod S náležet rotační válcové ploše V s řídicí kružnicí k. Proto je nutné, aby bod S byl zvolen na průseku $e = \sigma . V$. Průsekem e je,



Obr. 13

jak známo, elipsa, ve zvláštním případě kružnice, a to je-li přímka p kolmá k rovině ϱ.

Ještě dokážeme, že všecky body elipsy e náležejí poloprostoru (ϱ, A):

Podle vztahu (1) platí

$$PT = \sqrt{PA . PB}.$$

Označme O střed úsečky AB; pak je

$$PO = (PA + PB) : 2.$$

Z vlastnosti velikostí aritmetického a geometrického průměru čísel, protože je $PA \neq PB$, vyplývá nerovnost

$$\sqrt{PA.PB} < (PA + PB) : 2,$$

tj. $PO > PT$. Protože rovina $\sigma \perp AB$ prochází bodem O, platí o vzdálenosti d její průsečnice s s rovinou ϱ tím spíše, že $d > PT$, takže přímka s leží vně kružnice k a tím i všecky body elipsy e v poloprostoru (ϱ, A).

Obráceně, zvolíme-li na elipse e libovolný bod S_i, náleží rovině σ, v níž leží elipsa e, takže platí vztah: $S_iA = S_iB$. Sestrojíme-li dále bodem S_i přímku $q_i \perp \varrho$, náleží přímka q_i ploše V a protíná rovinu ϱ v bodě T_i na kružnici k. Sestrojíme-li nyní kulovou plochu $\varkappa$ o středu S_i, která prochází body A, B a má tedy poloměr $r_i = S_iA = S_iB$, pak pro mocnost M bodu P vzhledem k ploše $\varkappa$ platí jednak vztah

$$M = PA.PB = PT_i^2 \tag{1}$$

a dále vztah

$$M = (PS_i + r_i).(PS_i - r_i) = PS_i^2 - r_i^2,$$

takže je $PS_i^2 - r_i^2 = PT_i^2$.

Ale v pravoúhlém trojúhelníku $\triangle S_iT_iP$ (viz obr. 13) platí

$$PT_i^2 = PS_i^2 - S_iT_i^2,$$

takže z posledních dvou rovnic dostáváme, že

$$PS_i^2 - ST_i^2 = PS_i^2 - r_i^2$$

a odtud

$$S_iT_i = r_i \,(= S_iA = S_iB).$$

To znamená, že kulová plocha $\varkappa$ se dotýká roviny ϱ a že náleží množině $\varkappa_i$, což jsme chtěli dokázat.

Závěr. G. m. středů kulových ploch $\varkappa_i$, které se dotýkají dané roviny ϱ a které procházejí danými body A, B (pokud přímka AB není rovnoběžná s rovinou ϱ), je elipsa, která ve zvláštním případě, je-li $AB \perp \varrho$, je kružnicí.

Poznámka. K řešení naší úlohy jsme mohli také použít, kromě roviny σ, rotačního paraboloidu P s ohniskem v bodě A a s řídicí rovinou ϱ (viz úlohu 2, kap. 2). Protože je možno každou rovinu (která není rovnoběžná s osou paraboloidu P) považovat za rovinu souměrnosti ohniska A paraboloidu P a určitého bodu B, je průsek této roviny s plochou P g. m. středů kulových ploch naší úlohy. Podle řešení uvedeného dříve, dospíváme tu k známé geometrické větě o průseku e roviny σ, která není kolmá k rovině ϱ, s rotačním paraboloidem:

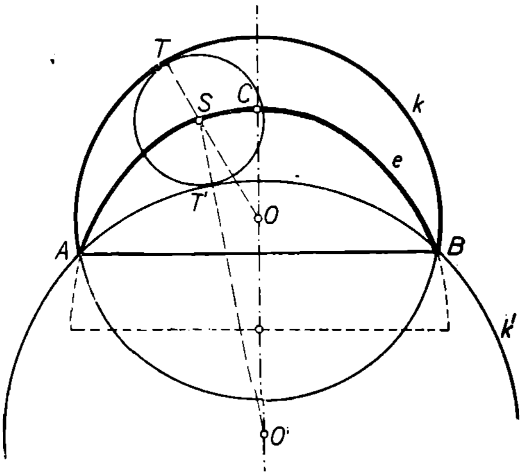
Elipsy ležící na rotačním paraboloidu promítají se kolmo na roviny, které jsou kolmé k ose paraboloidu, do kružnic (v našem případě elipsa e do kružnice k).

(Použití této věty viz v autorově stati „Užití plochy rotačního paraboloidu k řešení planimetrických úloh" v publikaci: *O rovinných konstrukcích odvozených z prostorových útvarů*, Cesta k vědění, svazek 47, JČMF 1944, str. 35—41.)

Úloha 15. Je dána rovina ϱ, přímka p různoběžná s rovinou ϱ a na přímce p bod $A \neq \varrho . p$. Určete g. m. středů kulových ploch, které se dotýkají roviny ϱ a přímky p v bodě A. [Buď elipsa nebo kružnice.]

9. *Je dána plocha P skládající se z dvou kulových vrchlíků o společné hraně: První vrchlík náleží kulové ploše K (O, r) a má výšku $v > r$, druhý vrchlík, který leží uvnitř prvního vrchlíku, náleží kulové ploše K' (O', r') a má výšku $v' < r'$. Určete g. m. středů S_i kulových ploch $\varkappa_i$, které jsou vepsány do plochy P.*

Řešení. Nechť bod S je středem jedné kulové plochy $\varkappa$ (S, x), která je vepsána do plochy P. Označme T dotykový bod plochy $\varkappa$ s plochou K a T' dotykový bod plochy $\varkappa$ s plochou K'. Potom leží bod T na přímce OS a bod T' na přímce $O'S$. Leží tedy body T, T', S v rovině ω, která



Obr. 14

obsahuje i body O, O'. Rovina ω prochází proto osou OO' rotační plochy P a určuje na ploše P její meridián (k, k') — viz obr. 14 — omezený oblouky kružnic k (O, r), k' (O', r') o společné tětivě AB. Na ploše $\varkappa$ určuje rovina ω její hlavní kružnici m (S, x).

Nyní lze naši prostorovou úlohu převést na úlohu planimetrickou v rovině ω: Hledejme g. m. středů kružnic m_i, které jsou vepsány rovinnému útvaru (k, k') jako kružnice m.

Podle obrázku 14 platí tyto vztahy:

$$OS = OT - ST = r - x, O'S = O'T' + T'S = r' + x.$$

Proto je

$$OS + O'S = r + r' > OO',$$

což znamená, že součet vzdáleností bodu S od daných bodů O, O' je konstantní. Odtud vyplývá, že bod S leží na oblouku ABC elipsy e, která má ohniska v bodech O, O' a která prochází body A, B. Úsečka OO' má délku, jež udává velikost dvojnásobku lineární excentricity elipsy e, a střed úsečky OO' je středem elipsy e. Tím je elipsa e určena.

Obráceně platí, že každý bod S_i, který leží uvnitř oblouku ACB (rovněž i bod C), může být středem kružnice k_i, kterou lze vepsat do útvaru (k, k'), což vyplývá z předchozích úvah.

Rotací roviny ω a oblouku ACB kolem osy $o \equiv 00'$ vytvoří oblouk ACB plochu E, a to část plochy rotačního protáhlého elipsoidu s ohnisky v bodech O, O', omezenou kruhovou hranou, která je společnou hranou daných vrchlíků. *Plocha E s vyloučením bodů své kruhové hrany je pak g. m. středů kulových ploch hledaných* v naší úloze, neboť obsahuje zřejmě středy S_i kulových ploch $\varkappa_i$, a obráceně, každý bod plochy E kromě bodů její kruhové hrany dává střed jedné kulové plochy $\varkappa_i$, jak vyplývá z předchozích úvah.

Úloha 16. Je dáno těleso T, které je průnikem dvou koulí K (O, r), K' (O', r') různých poloměrů.[7]) Určete g. m. středů kulových ploch, které jsou vepsány do tělesa T. [Část rotačního hyperboloidu dvoudílného, jehož ohniska jsou v bodech O, O'.]

[7]) Tj. za předpokladu $| r - r' | < 00' < r + r'$.

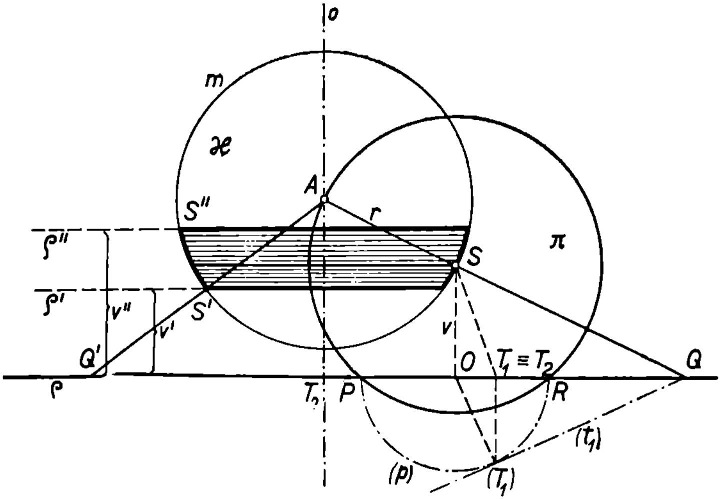
Úloha 17. Je dána polosféra na kulové ploše $\varkappa_1 \equiv (O, r)$ sestrojená nad rovinou ϱ rovníku plochy $\varkappa_1$ a kulová plocha $\varkappa_2 \equiv (O', \frac{1}{2}r)$, které se dotýká $\varkappa_1$ a ϱ. Určete g. m. středů koulí, které se dotýkají $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ a ϱ. [Kružnice v rovině rovnoběžné s ϱ o středu na úsečce OO' a poloměru velikosti $r\frac{\sqrt{2}}{2}$.]

10. *Je dána rovina ϱ a bod A, který má od roviny ϱ vzdálenost d $(0 < d \leqq 2r)$. Určete g. m. středů kružnic k_i daného poloměru $r > 0$, které se dotýkají roviny ϱ a procházejí bodem A.*

Řešení. Rovina ϱ se dotýká kružnice k, má-li s ní společný právě jeden bod. Potom i průsečnice roviny kružnice k s rovinou ϱ je tečnou kružnice k.

Střed S_i každé kružnice k_i o poloměru r, která prochází daným bodem A, má od bodu A vzdálenost $S_iA = r$. Body S_i hledaného g. m. b., pokud existují, leží tedy jedině na kulové ploše $\varkappa$ se středem v bodě A a s poloměrem velikosti r. Sestrojíme-li jeden bod S našeho g. m., pak všechny body S_i vzniklé z bodu S otočením kolem přímky o, která prochází bodem A a je kolmá k rovině ϱ, náležejí hledanému g. m. Přímka o je totiž osou nejen plochy $\varkappa$, ale i roviny ϱ. Body S_i odvozené z bodu S touto rotací vyplní na ploše $\varkappa$ kružnici ležící v rovině rovnoběžné s rovinou ϱ. Stačí tedy vyhledat body S_i na meridiánu m (viz obr. 15a) plochy $\varkappa$, který tvoří obrys pravoúhlého průmětu plochy $\varkappa$ do roviny proložené přímkou o. Z nich dostaneme potom všecky ostatní body hledaného g. m. otočením kolem přímky o.

Nechť bod S zvolený na meridiánu m plochy $\varkappa$ je tedy bodem našeho g. m. Pak přímka SA je průměrem kružnice k o středu S. Všecky kružnice o středu S a poloměru rovném r vyplní kulovou plochu π (S, r). Z nich vedou k řešení dané úlohy ty kružnice na ploše π, jež se dotýkají průsečnice své roviny σ s rovinou ϱ. Rovina σ protne tedy rovinu ϱ v tečně kulové plochy π.



Obr. 15a

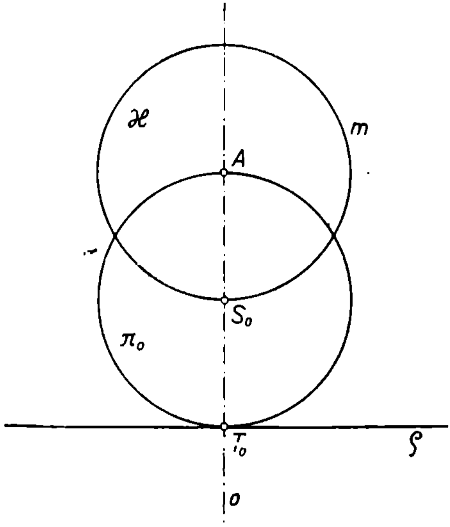
Aby bylo možno tento požadavek splnit, je třeba a stačí, aby

a) kulová plocha π měla s rovinou ϱ alespoň společný bod a aby současně

b) průsečík Q přímky AS s rovinou ϱ, jímž jde průsečnice hledané roviny σ s rovinou ϱ, neležel uvnitř koule omezené plochou π. Poznamenejme, že v případě, že bod Q neexistuje, tj. je-li $AS \parallel \varrho$, je průsečnice roviny hledané kružnice s rovinou ϱ rovnoběžná s přímkou AS.

Je tedy zřejmě nutné, aby o vzdálenosti v bodu S od roviny ϱ platilo:

Jednak a) $v \leqq r$ a dále b) $v \geqq \frac{1}{2} d$ (neboť musí platit $SQ \geqq SA$, tj. $SQ \geqq \frac{1}{2} AQ$ a proto $v \geqq \frac{1}{2} d$). Body S_i nemohou podle toho ležet vně kulového pásu omezeného



Obr. 15b

rovinami $\varrho' \parallel \varrho$, $\varrho'' \parallel \varrho$, přičemž roviny ϱ' a ϱ'', ležící v poloprostoru (ϱ, A), mají od roviny ϱ vzdálenosti $\frac{1}{2} d$ resp. r.

Odtud ihned vyplývá:

a) G. m. naší úlohy je *jediný bod* S_0 plochy $\varkappa$ v případě, kdy je $d = 2r$ (viz obr. 15 b). Všechny kružnice k_i (S_0, r), které procházejí bodem A a dotýkají se roviny ϱ v společněm bodě T_0 ($AT_0 \perp \varrho$), vyhovují požadavkům úlohy a žádné jiné.

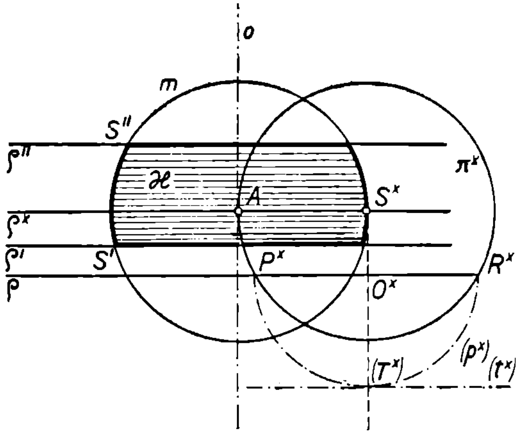
b) Jestliže je $d > 2r$, je třeba body S_i hledat jenom na té části meridiánu m plochy $\varkappa$, která náleží kulovému pásu určenému rovinami ϱ', ϱ''. A skutečně, zvolíme-li na oblouku m libovolný bod S uvnitř kulového pásu (ϱ', ϱ''), tj. ve vzdálenosti v od roviny ϱ, o níž platí $\frac{1}{2}d < v < r$, potom plocha π (S, r) protne rovinu ϱ v kružnici p. (Na obr. 15a je (p) obrazem kružnice p sklopené do roviny meridiánu m.) Dále: z bodu Q, který leží v tomto případě vně plochy π a tedy i vně kružnice p, lze vésti k p dvě tečny, t_1 a t_2, — dvě průsečnice rovin σ_1 a σ_2 s rovinou ϱ; v rovině $\sigma_1 \equiv (A, t_1)$ a $\sigma_2 \equiv (A, t_2)$ lze sestrojit dvě kružnice, k_1 a k_2, které procházejí bodem A, mají poloměr velikosti r a dotýkají se roviny ϱ, jak žádá naše úloha.

Zvolíme-li dále bod S' v rovině ϱ', tj. ve vzdálenosti $v' = \frac{1}{2}d$ od roviny ϱ, potom příslušný bod Q' padne na kružnici p' a tečna v něm sestrojená k p' je průsečnicí roviny jediné kružnice k', která vyhovuje požadavkům úlohy. Její rovina je kolmá k rovině meridiánu m.

Konečně, zvolíme-li bod S'' v rovině ϱ'', tj. ve vzdálenosti $v'' = r$ od roviny ϱ, pak plocha π'' (S'', r) se dotýká roviny ϱ v bodě T''. Rovina $\sigma_2 \equiv (AS''T'')$ je totožná s rovinou meridiánu m a v té leží také kružnice k'', jež splňuje podmínky úlohy.

Podle toho každý bod oblouku $\widehat{S'S''}$ patří vyšetřovanému g. m. Otočením oblouku $\widehat{S'S''}$ kolem osy o vznikne *kulový pás* (ϱ', ϱ'') *omezený kružnicemi plochy* $\varkappa$, *které leží v rovinách* ϱ' *a* ϱ''; ten *tvoří hledané g. m.*

Poznámka. Na obr. 15 c) je znázorněn případ b) takový, kdy naše g. m. obsahuje také rovník plochy $\varkappa$ v rovině $\varrho^\star$. Pro body $S^\star$ rovníku dostaneme dvě kružnice, $k^\star{}_1$, $k^\star{}_2$, neboť sestrojíme-li plochu $\pi^\star \equiv (S^\star, r)$ potom $\pi^\star$ nutně protne rovinu ϱ v kružnici $p^\star$ o středu $O^\star$ (její obraz na obr. 15 c) je úsečka $P^\star R^\star$). Její dvě tečny rovnoběžné s přímkou AS určují s bodem A roviny kružnic $k^\star_1$, $k^\star_2$, které odpovídají podmínkám naší úlohy.



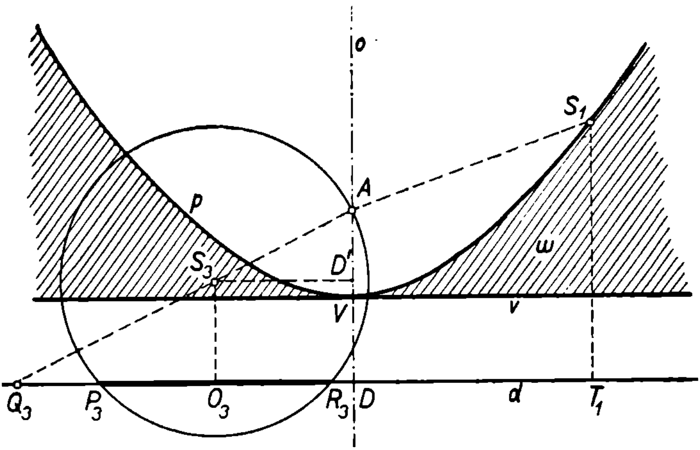
Obr. 15c

11. *Je dána rovina ϱ a bod A, jehož vzdálenost od roviny ϱ má velikost $d > 0$. Určete g. m. středů kružnic, které procházejí bodem A a které se dotýkají roviny ϱ.*

Řešení. Víme, že rovina ϱ a bod A určují plochu P rotačního paraboloidu jakožto g. m. středů kulových ploch, které se dotýkají roviny ϱ a které procházejí bodem A. Přitom bod A je ohniskem a rovina ϱ řídicí rovinou paraboloidu P (viz úlohu 2 kapit. 2). Libovolná rovina μ proložená bodem A kolmo k rovině ϱ má s plochou P společnou parabolu p, která má ohnisko v bodě A a řídicí přímku v průsečnici d roviny μ s rovinou ϱ (viz obr. 16). Parabola p tvoří jeden meridán plochy P.

Protože daný útvar, tj. rovina ϱ a bod A nemění svou polohu při otáčení kolem osy o, je hledané g. m. útvarem rotačním s osou o.

Najdeme-li tedy v rovině μ středy S_i kružnic k_i, které vyhovují podmínkám naší úlohy, pak body vzniklé otočením všech bodů S_i kolem přímky o vyplní hledané g. m.



Obr. 16

Hledejme proto zatím jenom body S_i v rovině paraboly p.

a) Každý bod S_1, který leží na parabole p, náleží hledanému g. m., neboť lze z každého bodu paraboly p sestrojit kružnici k_1 (S_1, S_1A), která se dotýká přímky d, a proto i roviny ϱ, v bodě T_1 na přímce d, jak plyne z definice paraboly p.

b) Body S_2, zvolené uvnitř paraboly p, mají tu vlastnost, že jejich vzdálenosti od přímky d jsou větší než délka úsečky S_2A, takže příslušná kulová plocha π_2 (S_2, S_2A) nemá s rovinou ϱ žádný společný bod, což znamená, že body S_2 nenáležejí hledanému g. m.

c) Zvolíme-li dále bod S_3 vně paraboly p, a jak hned ukážeme, pouze v oblasti ω roviny μ, ohraničené parabolou p a její vrcholovou tečnou v, náleží i bod S_3 našemu g. m. Každý bod S_3 ležící uvnitř oblasti ω má, jak známo, tu vlastnost, že jeho vzdálenost od přímky d je menší než délka úsečky S_3A. Sestrojíme-li tedy kulovou plochu π_3 (S_3, S_3A), protne rovinu ϱ v kružnici p_3 o středu O_3 (na obr. 16 je zobrazena kružnice p_3 jako úsečka P_3R_3). Přímka AS_3, pokud není rovnoběžná s přímkou d, protne rovinu ϱ (a přímku d) v bodě Q_3, který padne vně kružnice p_3. Je totiž $S_3O_3 > S_3A$ (neboť je $D'D > AD'$), a tedy bod O_3 vně plochy π_3. Z bodu Q_3 lze pak vést ke kružnici p_3 dvě tečny t_3 a t'_3 s dotykovými body T_3 a T'_3. Potom je už možno sestrojit kružnice k_3 (S_3, S_3A) a k'_3 (S_3, S_3A) v rovinách $\sigma_3 \equiv (S_3, t_3)$ a $\sigma'_3 \equiv (S_3, t'_3)$, které procházejí bodem A a dotýkají se roviny ϱ, tj. její přímky t_3 resp. t'_3 v bodě T_3 resp. T'_3. Kružnice k_3 a k'_3 splňují podmínky naší úlohy, takže bod S_3 náleží hledanému g. m.

Ještě poznamenejme, že v případě, kdyby bylo $AS_3 \parallel d$, byly by příslušné tečny t_3 a t'_3 rovnoběžné s přímkou AS_3.

d) Rovněž body S_i přímky v náležejí našemu g. m.; odůvodnění je stejné jako pro body S_3 jen s tím rozdílem, že v tomto případě padne příslušný bod $Q_i \equiv S_iA\,.\,d$ na kružnici $p_i \equiv \pi_i\,.\,\varrho$, kde π_i je kulová plocha obdobná ploše π_3.

e) Zvolíme-li konečně bod S_4 uvnitř poloroviny vyťaté přímkou v, která obsahuje přímku d, nevede bod S_4 k řešení naší úlohy. Důkaz ponecháme už čtenáři.

V odstavcích a) až e) jsme uvažovali o všech bodech roviny μ, takže naše úloha je úplně řešena. Odtud vyplývá tento závěr:

G. m. středů kružnic, které procházejí daným bodem A a které se dotýkají dané roviny ϱ, je část poloprostoru (ϱ', A), vyťatého vrcholovou tečnou rovinou ϱ' paraboloidu P, vzniklá z něho vyloučením všech bodů, které leží uvnitř rotačního paraboloidu P.

Body tohoto g. m. dostaneme z bodů rovinné oblasti ω, ohraničené parabolou p a její vrcholovou tečnou v, rotací oblasti ω kolem přímky o, která je osou souměrnosti oblasti ω.

12. *Jsou dány dvě rovnoběžné (různé) roviny $\varrho \parallel \sigma$ a přímka p, která neleží v žádné z nich. Určete g. m. středů* a) *kulových ploch,* b) *kružnic, které se dotýkají rovin ϱ, σ a přímky p.*

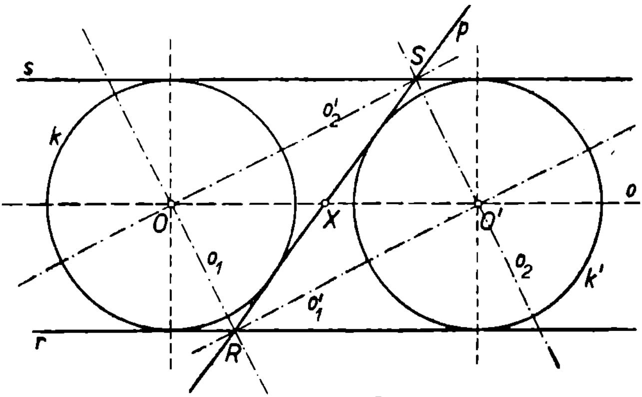
Řešení. a) Kulové plochy $\varkappa_i$, které se dotýkají dvou rovnoběžných rovin ϱ, σ, jichž vzdálenost má velikost $v > 0$, tj. jsou vepsány do rovinové vrstvy o výšce velikosti v, mají průměr rovný $v = 2r$, kde r je velikost poloměru ploch $\varkappa_i$. Středy ploch $\varkappa_i$ vyplňují rovinu $\omega \parallel \varrho$ (σ) souměrnosti dané vrstvy.

Je-li přímka p tečnou kulové plochy $\varkappa$, která má poloměr velikosti r, potom střed S plochy $\varkappa$ má od přímky p vzdálenost velikosti r. Středy S_i všech ploch $\varkappa_i$ (r), které se dotýkají přímky p, vyplní rotační válcovou plochu V o ose v přímce p a poloměru řídicí kružnice o velikosti rovné r.

Odtud plyne, že střed S_i kulové plochy $\varkappa_i$, která se dotýká rovin ϱ, σ a přímky p, leží na průseku e roviny ω a plochy V. Obráceně, zvolíme-li na průseku e libovolný bod S_i, potom jeho vzdálenost od rovin ϱ a σ i od přímky p má velikost r; lze tedy okolo bodu S_i opsat kulovou plochu $\varkappa_i$, která se dotýká roviny ϱ a σ i přímky p. Proto *g. m. b. S_i je průsek $e \equiv \omega . V$*, a to:

(1) *elipsa (nebo kružnice)* v případě, že je daná přímka p různoběžná s rovinou ϱ (i σ),

(2) *dvě přímky* (náležející ploše V) ležící v rovině ω v případě, že přímka p je rovnoběžná s rovinou ϱ a σ a leží uvnitř rovinové vrstvy (ϱ, σ).



Obr. 17

(3) Úloha *nemá řešení*, leží-li přímka $p \parallel \varrho$ (σ) vně rovinové vrstvy (ϱ, σ). Případ, kdy p leží v ϱ (nebo σ) je v textu úlohy vyloučen.

b) *Případ* (1). Nechť přímka p je různoběžná s rovinou ϱ (i σ). Je-li přímka p tečnou kružnice k, o níž předpokládáme, že vyhovuje naší úloze, leží k v rovině α proložené přímkou p. Má-li se dále kružnice k dotýkat roviny ϱ a σ, musí rovina α obsahovat dvě tečny kružnice k, které tvoří průsečnice $r \equiv \alpha . \varrho$ a $s \equiv \alpha . \sigma$; při tom zřejmě platí, že je $r \parallel s$ (viz obr. 17). Proto kružnice k je vepsána do rovnoběžného pásu (r, s) roviny α a dotýká se přímky p. Jsou tedy v rovině α dvě kružnice k (O, u) a k' (O', u), které vyhovují podmínkám úlohy. Jejich poloměr má velikost $u = \frac{1}{2} d$, kde d značí vzdálenost přímek $r \parallel s$.

Protože osy vedlejších úhlů přímek r, p a s, p jsou dvojice přímek o_1, o'_1 a o_2, o'_2 k sobě kolmých a přitom je $o_1 \parallel o_2$ a $o'_1 \parallel o'_2$, jsou pravoúhlé trojúhelníky $\triangle\, ROS$, $\triangle\, SO'R$ shodné s pravými úhly ve vrcholu O a O'. Označíme-li velikost jejich společné přepony $RS = q$, platí o jejich těžnicích OX a $O'X$ vztah

$$OX = O'X = \tfrac{1}{2}\, RS = \tfrac{1}{2}\, q,$$

což je úsečka dané velikosti. A to platí analogicky pro všechny roviny α_i svazku rovin o ose v přímce p. Leží tedy body O_i, O'_i na kružnici m $(X, \frac{1}{2}\, q)$, která leží v rovině $\omega \parallel \varrho\ (\sigma)$, v rovině souměrnosti dané vrstvy (ϱ, σ).

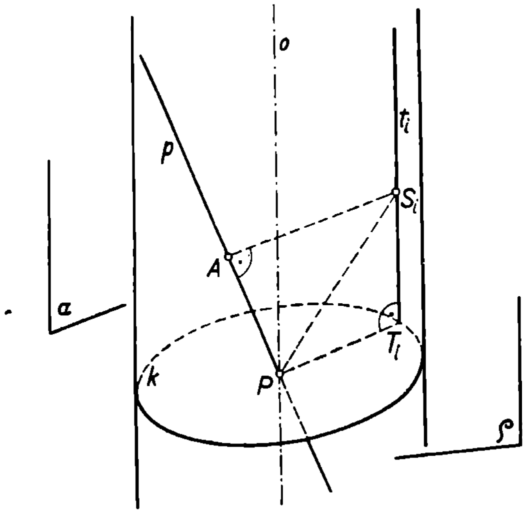
Obráceně, zvolíme-li na kružnici m libovolný bod O_i, potom lze v rovině $\alpha_i \equiv (O_i p)$ vždy sestrojit kružnici k_i, která vyhovuje podmínkám úlohy. Proto *g. m. středů kružnic, které se dotýkají daných rovin ϱ, σ a přímky p je kružnice m právě popsaná.*

Případ (2). Je-li daná přímka p rovnoběžná s rovinou ϱ (σ), ale neleží v žádné z nich, *nemá úloha řešení.*

Úloha 18. Jsou dány dvě rovnoběžné roviny (různé) ϱ, σ a přímka p, která leží v jedné z nich. Určete g. m. středů a) kulových ploch, b) kružnic, které se dotýkají rovin ϱ, σ a přímky p. [a) Přímka $m \parallel p$, která je průsečnicí dvou rovin: roviny $\omega \parallel \varrho\ (\sigma)$ souměrnosti vrstvy (ϱ, σ) a roviny γ, proložené přímkou p tak, že je $\gamma \perp \omega$, b) rovina ω.]

13. *Je dána rovina ϱ, přímka p různoběžná s rovinou ϱ a na přímce p bod A, který neleží v rovině ϱ. Určete g. m. středů* a) *kulových ploch,* b) *kružnic, které se dotýkají roviny ϱ a přímky p v bodě A.*

Řešení. a) Nechť přímka p protíná rovinu ϱ v bodě P. Označme T dotykový bod roviny ϱ a plochy $\varkappa$, která splňuje podmínky úlohy. Potom délky úseček PA a PT, tj. délky tečen vedených z bodu P k ploše $\varkappa$ jsou si rovny,

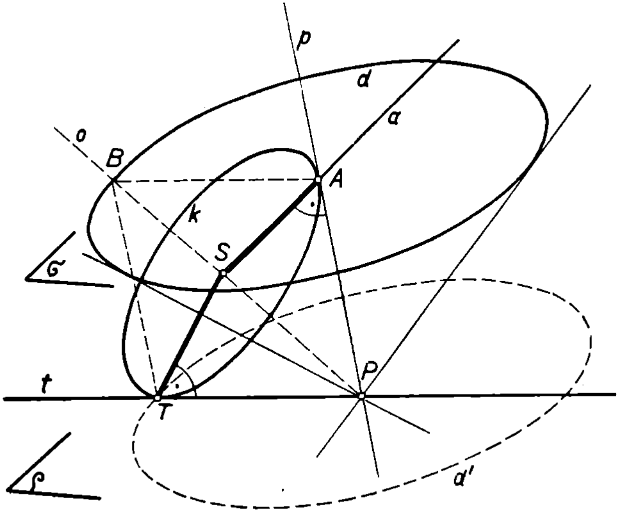


Obr. 18

tedy $PA = PT$. Pro různé plochy $\varkappa_i$ naší úlohy leží jejich dotykové body T_i s rovinou ϱ na kružnici k (P, PT_i) a středy S_i ploch $\varkappa_i$ na přímkách t_i vedených body T_i kolmo k rovině ϱ. (Viz obr. 18.) Přímky t_i vytvoří tedy rotační válcovou plochu V o ose $o \perp \varrho$ procházející bodem P; kružnice k je její řídicí kružnicí.

Dále víme, že g. m. středů kulových ploch, které se dotýkají přímky p v bodě A, je rovina α vedená bodem A kolmo k přímce p. Proto leží středy ploch $\varkappa_i$ na průseku e roviny

a s plochou V. Obráceně, zvolíme-li na e libovolný bod S_i, potom lze z bodu S_i opsat kulovou plochu $\varkappa_i$ (S_i, r_i), která se dotýká přímky p v jejím bodě A, a jak hned dokážeme, i roviny ϱ v určitém bodě T.



Obr. 19

Důkaz. Bod S_i leží jednak v rovině α, jednak na ploše V, jejíž povrchová přímka $t_i \perp \varrho$ prochází zvoleným bodem S_i a protíná rovinu ϱ v bodě T_i; přitom platí rovnost $PT_i = PA$. Proto jsou pravoúhlé trojúhelníky $\triangle PS_iA$ a $\triangle PS_iT_i$ shodné (mají společnou přeponu PS_i a shodné odvěsny PT_i, PA), takže je také $S_iA = S_iT_i = r_i$. Proto předpokládaný dotykový bod $T \equiv T_i$.

Je tedy *g. m. středů kulových ploch, které splňují podmínky* *naší úlohy, elipsa* $e \equiv a.V$, *která je v případě, že je* $p \perp \varrho$, *kružnicí.*

b) Kružnice k, která vyhovuje podmínkám úlohy b), leží v určité rovině α proložené přímkou p, jíž se kružnice k dotýká v bodě A; kružnice k se dotýká také přímky $t \equiv \equiv \alpha . \varrho$ v bodě T. Střed S kružnice k leží proto na ose o úhlu $\sphericalangle APT$ a dále na přímce a roviny α, vedené bodem A kolmo k přímce p (viz obr. 19). Bude účelné sestrojit v rovině α přímku o jako úhlopříčku PB rovnoběžníka $PABT$, který je kosočtvercem (případně čtvercem), neboť platí rovnost $PA = PT$ (délky tečen vedených z bodu P ke kružnici k jsou stejně dlouhé).

Protože v každé rovině α_i svazku rovin o ose p platí $AB_i \# PT_i = AP$, vyplní body B_i kružnici d (A, AB), která leží v rovině $\sigma \parallel \varrho$. Přímky PB_i, tj. osy úhlů $\sphericalangle APT_i$, vytvoří kuželovou plochu K, která má vrchol v bodě P a řídicí kružnici d. Protože dále přímky a_i jakožto kolmice sestrojené k přímce p v bodě A leží v rovině $\omega \perp p$, jsou body S_i na průseku m roviny ω s plochou K.

K tomu ještě připomeňme, že body T_i leží v rovině ϱ na kružnici d' (P, PA), shodné s kružnicí d.

Obráceně, zvolíme-li na průseku m libovolný bod S_i, potom lze kolem bodu S_i opsat kružnici k_i (S_i), která se dotýká přímky p v bodě A a roviny ϱ v určitém bodě T_i.

Důkaz. Bodem S_i prochází na kuželové ploše K povrchová přímka PS_i, která určuje na kružnici d bod B_i. Rovina $\alpha_i \equiv (p, S_i)$ protíná rovinu σ v přímce AB_i a rovinu ϱ v přímce $PT_i \parallel AB_i$, kde bod T_i je bodem kružnice d'. Úhlopříčka vzniklého kosočtverce B_iAPT_i je přímka PB_i, která obsahuje bod S_i. Přímka $S_iA \equiv \sigma . \omega$ je kolmá k přímce p. Ze souměrnosti kosočtverce B_iAPT_i podle jeho úhlopříčky PS_i vyplývá, že úsečka S_iT_i kolmá k PT_i je rovna úsečce S_iA, takže $S_iT_i = S_iA$ je poloměr hledané kružnice k_i.

Odtud vyplývá: *G. m. středů kružnic* k_i, *které splňují podmínky úlohy, je průsek* $m \equiv \omega . K$, *tj.* buď *elipsa,*[8]) *nebo kružnice*, a to ve zvláštním případě, je-li přímka p kolmá k rovině ϱ.

Úloha 19. Je dána rovina ϱ, přímka p rovnoběžná s rovinou ϱ (neleží však v ϱ) a na přímce p bod A. Určete g. m. středů kružnic, které se dotýkají přímky p v bodě A a roviny ϱ. [Přímka $m \equiv \omega . \sigma$, průsečnice roviny ω vedené bodem A kolmo k přímce p a roviny $\sigma \parallel \varrho$, při čemž rovina σ má od přímky p i od roviny ϱ vzdálenosti sobě rovné.]

14. *Je dána kulová plocha* $\varkappa$ (S, r) *a vně plochy* $\varkappa$ *bod* V. *Do plochy* $\varkappa$ *jsou vepsány komolé kužele* K_i *tak, že bod* V *je společným vrcholem úplných kuželů, příslušných kuželům* K_i. *Určete g. m. b., které náležejí obvodům středních řezů* M_i *komolých kuželů* K_i.

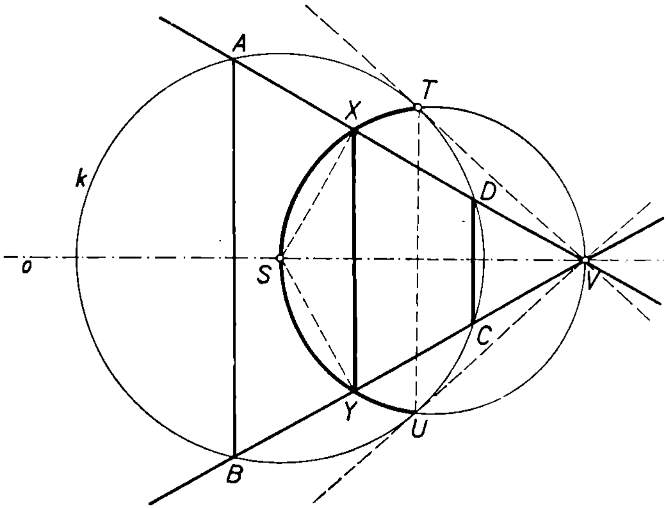
Poznámka. Ke každému komolému kuželi lze sestrojit příslušný kužel doplňkový, který spolu s ním tvoří příslušný kužel úplný. Z tohoto kužele vznikne obráceně daný komolý kužel řezem, který leží ve vhodné rovině rovnoběžné s rovinou podstavy úplného kužele.

Řešení úlohy. Komolý kužel K vepsaný do plochy $\varkappa$ je nutně rotační, neboť obvody jeho podstav leží na ploše $\varkappa$; jsou to tedy kružnice v rovnoběžných rovinách, takže přímka o, která obsahuje středy těchto podstav, prochází středem S plochy $\varkappa$ a je osou komolého kužele K i plochy $\varkappa$. Osa o prochází zřejmě i bodem V.

Sestrojme libovolnou rovinu ω obsahující přímku o. Řez vzniklý na našem útvaru rovinou ω je znázorněn na obr. 20. Na ploše $\varkappa$ je to kružnice k (S, r) a na kuželi K

[8]) Elipsa je to proto, že všechny přímky PB_i kuželové plochy K svírají s přímkou PA úhly menší než R, při čemž rovina průseku je kolmá k přímce PA, takže protíná všechny přímky kuželové plochy K.

rovnoramenný lichoběžník $ABCD$, jehož ramena se v prodloužení protínají v bodě V. Náš prostorový útvar vznikne otáčením uvažovaného řezu ležícího v rovině ω kolem přímky o, takže se vyšetřování hledaných obvodů M_i převede na planimetrickou úlohu v rovině ω.



Obr. 20

Střední řez M na kuželi K protíná rovinu ω v úsečce XY, která tvoří střední příčku lichoběžníka $ABCD$. Její krajní body X, Y, jakožto středy úseček AD resp. BC leží na kruhovém oblouku $\overset{\frown}{TSU}$, který náleží Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem SV, neboť je $SX \perp AD$ a $SY \perp BC$.

Obráceně: Zvolíme-li kterýkoliv vnitřní bod X_i oblouku $\widehat{TSU}$ (kromě bodu S), lze jím sestrojit tětivu X_iY_i v oblouku $\widehat{TSU}$, kolmou k přímce o; úsečka X_iY_i určuje střední příčku příslušného lichoběžníka $A_iB_iC_iD_i$, kde body A_i, D_i leží na přímce VX_i a body B_i, C_i na přímce VY_i. Je totiž $SX_i \perp A_iD_i$ a proto platí $A_iX_i = X_iD_i$. Z vnitřních bodů oblouku $\widehat{TSU}$ je nutno vyloučit bod S, neboť nedává na oblouku $\widehat{TSU}$ žádnou tětivu. Také krajní body T, U oblouku $\widehat{STU}$ nevedou ke konstrukci lichoběžníka, protože přímky VT, VU jsou tečnami kružnice k a nevzniknou na nich žádné tětivy kružnice k, jež by měly být rameny lichoběžníka. Tím jsme dokázali planimetrickou větu: G. m. středů ramen všech rovnoramenných lichoběžníků vepsaných do dané kružnice k, přičemž ramena každého z těchto lichoběžníků se protínají v bodě V daném vně kružnice k, je kruhový oblouk $\widehat{TSU}$ až na jeho body T, S, U.

Rotací bodů X_i, Y_i kolem přímky o vznikají pak obvody středních řezů M_i kuželů K_i. Proto platí: *Obvody středních řezů M_i komolých kuželů K_i naší úlohy vyplní kulový vrchlík*, který je průnikem plochy $\varkappa$ a Thaletovy kulové plochy sestrojené nad průměrem SV *s vyloučením jeho hrany a jeho bodu ležícího na jeho ose.* Tím je hledané g. m. b. určeno.

15. *Je dán rotační válec V, jehož podstava má poloměr r a výška válce je v. Určete g. m. středů S_i koulí $\varkappa_i$ o poloměru dané velikosti ϱ, které lze celé umístit ve válci V.*

Řešení. Předpokládejme, že jsme z bodu S sestrojili kouli $\varkappa$ (S, ϱ), která je celá umístěna ve válci V. Potom bod S leží uvnitř válce V a má od všech bodů jeho povrchu vzdálenosti, které jsou větší nebo rovné ϱ. Musí tedy bod S splňovat dvě podmínky; označme je A a B:

A) Bod S musí být od rovin podstav válce V vzdálen o délku větší nebo rovnou ϱ. Leží proto v průniku P dvou poloprostorů: jednoho opačného k (σ, O), druhého opačného k (σ', O'), kde body O, O', jsou středy podstav daného válce, a to O střed podstavy ležící v rovině π, O' střed podstavy ležící v rovině π'; přitom rovina $\sigma \parallel \pi$ náleží poloprostoru (π, O') a je od roviny π vzdálena o délku rovnou ϱ a rovina $\sigma' \parallel \pi$ náleží poloprostoru (π', O) a je od roviny π' vzdálena opět o délku rovnou ϱ.

Obráceně, zvolíme-li libovolný bod S_p v útvaru P, lze z bodu S_p opsat kouli $\varkappa_p$ (S_p, ϱ), která nemá společné body s žádnou z rovin π, π', nebo se v krajním případě roviny π nebo π' dotýká. To znamená, že průnik P, pokud není prázdný, tj. pokud je $\varrho \leqq \frac{v}{2}$, je g. m. středů S_p koulí $\varkappa_p$, které splňují podmínku A.

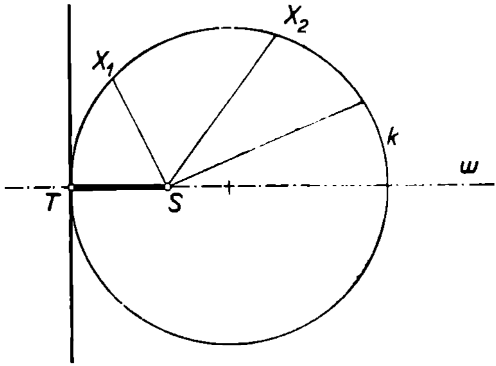
B) Bod S musí být od všech bodů pláště válce V vzdálen o délku větší nebo rovnou ϱ.

Tažme se dříve po vzdálenostech bodu S, který leží uvnitř válce V, od jeho stran.

Tyto vzdálenosti zjistíme v rovině μ proložené bodem S kolmo ke stranám válce V, tj. k jeho ose o. Jedná se zřejmě o vzdálenosti bodu S od bodů T, X_1, X_2, ... ležících na obvodu k kruhového řezu, který je průsekem válce V s rovinou μ (viz obr. 21a). Kdyby bod S ležel na ose OO' válce V, byly by jeho vzdálenosti od všech stran válce V stejné a měly by velikost rovnou r. Leží-li bod S mimo úsečku OO', lze mluvit o jeho nejmenší vzdálenosti od stran válce V. Je to úsečka $ST = d < r$, obsažená v rovině $\omega \equiv (S, o)$.

Úsečka ST je také nejmenší ze všech úseček, které bychom dostali spojením bodu S s body pláště válce V; nazveme ji *vzdáleností bodu S od pláště válce V.*

Rovnoběžným posunutím bodu S ve směru přímky o tak, aby zůstal ve válci V, nebo otočením bodu S kolem přímky o, se vzdálenost d od pláště nezmění. Body tak

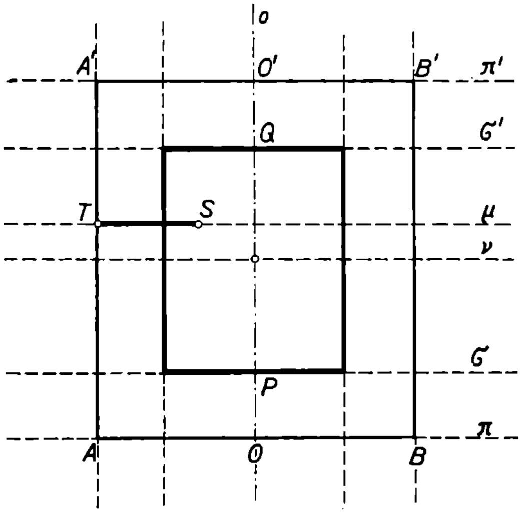


Obr. 21a

vzniklé vyplní plášť rotačního válce o ose OO' a poloměru rovném $r - d$. Každý bod tohoto válce má od pláště válce V vzdálenost větší nebo rovnou d a současně menší nebo rovnou r.

Podmínce B je tedy možno vyhovět jenom tehdy, když daný poloměr ϱ je menší nebo roven r, takže bod S náleží buď rotačnímu válci V' o ose OO' a poloměru $r - \varrho$, když je $\varrho < r$, nebo náleží úsečce OO' v případě, že je $\varrho = r$.

Obráceně, zvolíme-li libovolný bod S_0 tak, aby náležel válci V' případně úsečce OO', je podle předchozí úvahy vzdálen od všech bodů pláště válce V o délku větší nebo řovnou ϱ a lze z něho opsat kouli $\varkappa_v$ (S_v, ϱ), která nemá s pláštěm válce V žádný společný bod, nebo se v krajním případě pláště válce V dotýká. Dospěli jsme tak ke g. m. středů S_v koulí $\varkappa_v$, které splňují podmínku B.



Obr. 21b

V průniku obou g. m. P a V', odvozených v odstavcích A, B, dostáváme už řešení naší úlohy, aniž je třeba pro důkaz tohoto řešení úvahu ještě obracet. *G. m. hledaných středů S_i koulí $\varkappa_i$ naší úlohy je průnik útvarů P a V'.*

Závěr. a) Je-li $\varrho < r$ a také $\varrho < \frac{v}{2}$, je g. m. středů koulí $\varkappa_i$ *válec* (na obr. 21b je vyznačen jeho osový řez) souosý a soustředný s válcem V; jeho podstavy mají poloměr rovný $r - \varrho$ a jeho výška má velikost $v - 2\varrho$.

b) Je-li $\varrho < r$ a $\varrho = \frac{v}{2}$ (možno jen když je $v < 2r$), je g. m. středů koulí $\varkappa_i$ *kruh*, a to průsek roviny $\nu \parallel \pi$, která je rovinou souměrnosti rovinové vrstvy (π, π'), s válcem V'. Tento kruh má střed na přímce o a poloměr rovný $r - \varrho$.

c) Je-li $\varrho = r$ a $\varrho < \frac{v}{2}$ (možno jen když je $v > 2r$) je g. m. středů ploch $\varkappa_i$ *úsečka* PQ ležící na ose o válce V (viz obr. 21b).

d) Je-li $\varrho = r$ a také $\varrho = \frac{v}{2}$, je hledaným g. m. pouze *jeden bod*, a to střed válce V. Je to střed koule vepsané rovnostrannému válci V.

e) Je-li $\varrho > r$ nebo $\varrho > \frac{v}{2}$, *nemá* naše úloha *řešení*.

Úloha 20. Určete g. m. středů koulí o daném poloměru ϱ, které lze celé umístit do kvádru o daných rozměrech $a \geqq b > c$. [Kvádr, který má týž střed jako daný kvádr, stěny rovnoběžné se stěnami daného kvádru z rozměry $a - 2\varrho$, $b - 2\varrho$, $c - 2\varrho$.]

Úloha 21. Je dán rotační kužel K, jehož podstava má poloměr $r > 0$ a výška kužele je $v > 0$. Určete g. m. středů koulí, o daném poloměru $\varrho > 0$, které lze celé umístit do kužele K. [Rotační kužel souosý s daným kuželem a jemu podobný (popř. jediný bod, když je $\varrho = \dfrac{rv}{r + \sqrt{r^2 + v^2}}$).]