2. kapitola

NĚKTERÁ ANALOGICKÁ G. M. B. V ROVINĚ A V PROSTORU

Především je třeba, abyste si uvědomili, že právě tak jako při vyšetřování g. m. b. v rovině, musí být i při vyšetřování g. m. b. v prostoru dokazovány vždycky dvě věty:

a) *každý bod, který má danou vlastnost V, náleží určitému geometrickému útvaru G, o němž chceme dokázat, že je hledaným g. m. b.,*

b) *každý bod, který náleží útvaru G, má vlastnost V. Pak teprve platí, že útvar G je hledaným geometrickým místem.*

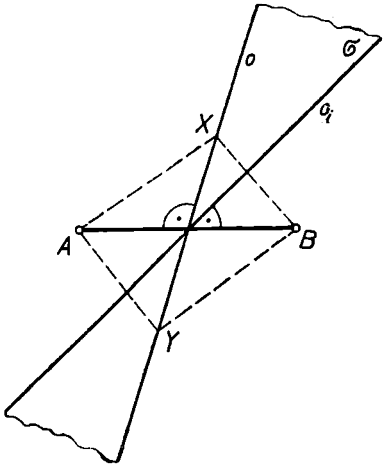
Všimněme si nyní některých g. m. b. v prostoru v souvislosti s příslušnými g. m. b. v rovině a ukažme postup vyšetřování nejdříve na nejjednodušším příkladě.

1. Víme, že v rovině platí věta: G. m. b., které mají od daných dvou různých bodů A, B vzdálenosti sobě rovné, je osa úsečky AB.

Vyšetřme v prostoru *g. m. b., které mají od daných dvou různých bodů A, B sobě rovné vzdálenosti.* Je to rovina σ kolmá k přímce AB a procházející středem úsečky AB, tj. rovina souměrnosti bodů A, B.

Důkaz. Nechť o určitém bodu X v prostoru, který neleží na přímce AB, platí vztah $AX = BX$. Potom body A, B, X určují rovinu ϱ. V této rovině, jak víte, náleží bod X přímce o, která je osou úsečky AB, a obráceně, každý další bod Y zvolený na přímce o, má od daných bodů A, B vzdálenosti sobě rovné.[2]) Přímka o je tedy v rovině ϱ g. m. b., které mají od bodů A, B sobě rovné vzdálenosti.

Můžeme však také v každé jiné rovině ϱ_i[3]) proložené



Obr. 1

[2]) Tuto vlastnost můžeme pro body Y dokázat ze shodných trojúhelníků pravoúhlých $\triangle AYS \cong BYS$, kde bod $S \equiv AB.o$ je střed úsečky AB. V trojúhelnících $\triangle AYS$, $\triangle BYS$ totiž platí: $\sphericalangle ASY = \sphericalangle BSY$, $SY \equiv SY$. Bod S má ovšem také dokazovanou vlastnost.

[3]) Indexu i používáme zde pro vyloučení omylu k označení libovolného útvaru množiny (zde např. roviny ϱ_i) vedoucího k bodům g. m. b. (zde roviny σ na přímkách o_i). Písmeno i zde použité neznamená přirozené číslo, protože prvky opatřené indexem i, jako např. roviny ϱ_i, přímky o_i, netvoří obyčejně v našich úlohách spočetné množiny.

přímkou AB (v rovině ϱ_i tzv. svazku rovin o ose v přímce AB) určit přímku o_i, která je opět osou úsečky AB (viz obr. 1). Všecky přímky o_i vyplňují, jak známo, rovinu σ kolmou k AB, procházející středem úsečky AB, tj. rovinu souměrnosti úsečky AB. O bodech roviny σ (tj. o bodech přímek o_i jako o bodech přímky o) jsme tak dokázali obě věty nahoře označené a), b). Tím je dokázáno, že rovina σ je hledaným prostorovým g. m. b.

Všimněme si, že všechny přímky o_i vyplňující rovinu σ vzniknou z přímky o jejím otáčením kolem přímky AB jakožto osy rotace, tedy určitým *shodným zobrazením.*

2. V rovině platí: G. m. b., které mají od daných dvou bodů A, B ($A \neq B$) daný součet vzdáleností rovný $2a > AB$, je elipsa s ohnisky A, B a hlavní poloosou o velikosti a.

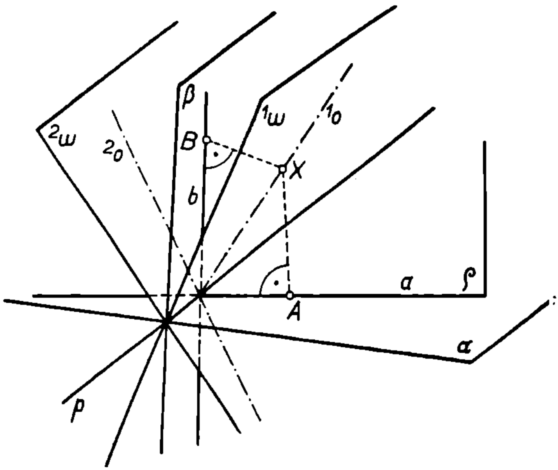
V prostoru dostáváme: *G. m. b., které mají od daných dvou různých bodů A, B daný součet vzdáleností rovný $2a > AB$, je rotační protáhlý elipsoid ε s ohnisky A, B a hlavní poloosou o velikosti a.* Přímka AB je osou rotace plochy ε.

Důkaz tohoto prostorového g. m. b. bychom provedli obdobně jako v předchozím příkladě pomocí svazku rovin o ose v přímce AB při použití otáčení jedné z rovin tohoto svazku. Proveďte sami!

Úloha 1. Určete g. m. b., které mají od daných dvou bodů A, B ($A \neq B$) daný rozdíl vzdáleností rovný $2a < AB$. [Rotační dvoudílný hyperboloid.]

Úloha 2. Určete g. m. b., které mají od dané roviny ϱ a od daného bodu A, jenž neleží v rovině ϱ, vzdálenosti sobě rovné. [Rotační paraboloid s ohniskem v bodě A a s řídicí rovinou ϱ.]

3. V rovině platí: G. m. b., které mají od dvou daných různoběžných přímek a, b sobě rovné vzdálenosti, jsou dvě přímky $o_1 \perp o_2$, a to osy souměrnosti přímek a, b (osy úhlů, které přímky a, b tvoří).



Obr. 2

Snadno přejdeme do prostoru. Platí: *G. m. b., které mají od daných dvou různoběžných rovin α, β sobě rovné vzdálenosti, jsou dvě roviny $^1\omega \perp {}^2\omega$, a to roviny souměrnosti rovin α, β* (roviny souměrnosti klínů, které roviny α, β tvoří).[4])

[4]) *Klín* se definuje jako průnik dvou poloprostorů, jejichž hraniční roviny mají společnou přímku (hranu klínu). Pro velikost úhlu a klínu platí $0 \leqq a \leqq 2R$; je-li $a = 0$, je klín *nulový*, a je-li $a = 2R$, je klín *přímý*.

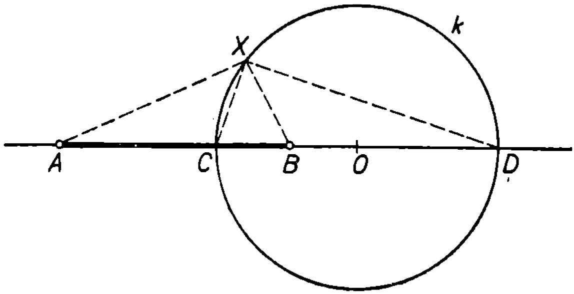
Důkaz. Nechť v prostoru pro určitý bod X, který neleží ani v rovině α ani v rovině β, platí vztah $XA = XB$, kde body A a B jsou paty kolmic sestrojených bodem X k rovinám α, β. Potom je rovina $\varrho \equiv (XAB)$ kolmá k průsečnici p rovin α, β a protíná roviny α, β v přímkách $a \equiv \alpha . \varrho$, $b \equiv \beta . \varrho$. Přímky a, b tvoří úhly, jimiž měříme velikosti daných čtyř klínů, určených rovinami α, β. (Viz obr. 2.) V rovině ϱ lze sestrojit osy souměrnosti ${}^1o$, ${}^2o$ přímek a, b a zvolený bod X je zřejmě jeden z bodů, který náleží g. m. b. tvořenému dvojicí přímek ${}^1o \perp {}^2o$. Jejich body mají od přímek a, b stejné vzdálenosti. Obdobně je tomu také v každé rovině $\varrho_i \perp p$. V ní dostaneme obdobně dvojici přímek ${}^1o_i \perp {}^2o_i$, jejichž body tvoří v ϱ_i g. m. b. požadované vlastnosti. Všecky dvojice přímek ${}^1o_i$, ${}^2o_i$ vyplňují dvě roviny ${}^1\omega \perp {}^2\omega$, jejichž body mají požadovanou vlastnost. Ze vzniku rovin ${}^1\omega$, ${}^2\omega$ vyplývá, že o jejich bodech platí, že a) každý bod, mající požadovanou vlastnost, náleží některé z rovin ${}^1\omega$, ${}^2\omega$, b) každý bod náležející rovině ${}^1\omega$ nebo ${}^2\omega$ má onu vlastnost (také ovšem body přímky p, kde jde o vzdálenosti nulové).

Připomeňme si, že každá dvojice přímek ${}^1o_i$, ${}^2o_i$, vyplňující roviny našeho prostorového g. m. b., vznikne z přímek ${}^1o$, ${}^2o$ roviny ϱ opět určitým shodným zobrazením, a to *rovnoběžným posunutím* přímek ${}^1o$, ${}^2o$ ve směru daném přímkou p.

Úloha 3. Určete g. m. b., které mají stejné vzdálenosti od dvou daných rovnoběžných (různých) rovin. [Rovina souměrnosti daných rovin s nimi rovnoběžná.]

Úloha 4. Určete g. m. b., které mají od dané roviny vzdálenost rovnou dané délce $d > 0$. [Dvě roviny s danou rovinou rovnoběžné.]

Úloha 5. Určete g. m. b., které mají od daných dvou a) různoběžných, b) rovnoběžných rovin vzdálenosti v daném poměru $0 < p : q \neq 1$. [a) Dvě roviny náležející svazku daných rovin, b) dvě roviny s danými rovinami rovnoběžné.]



Obr. 3

4. V rovině platí: G. m. b., které mají od daných dvou bodů A, B ($A \neq B$) daný poměr vzdáleností λ, $0 < \lambda \neq 1$, je kružnice k (A, B, λ), tzv. Apolloniova. Její střed O leží na přímce AB a o krajních bodech C, D jejího průměru platí (viz obr. 3):

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} = \lambda \neq 1.$$

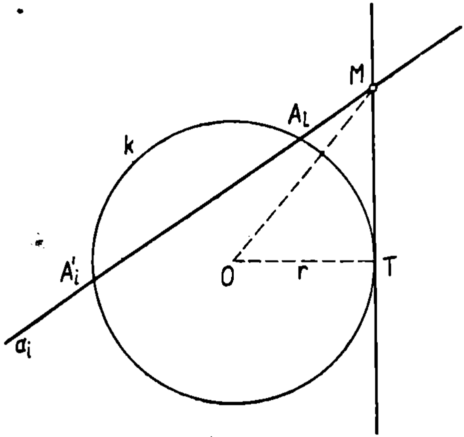
Důkaz najde čtenář v knížce: *Jaroslav Šedivý*, O podobnostech v geometrii, str. 14—16. (Škola mladých matematiků, sv. 7, 1963.)

V prostoru platí: *G. m. b., které mají od daných dvou různých bodů* A, B *daný poměr vzdáleností* λ, $0 < \lambda \neq 1$, *je kulová plocha* $\varkappa$ (A, B, λ) *Apolloniova*, jejíž střed O leží na přímce AB a pro jejíž krajní body C, D průměru AB platí:

$$|(ABC)| = |(ABD)| = \lambda.$$

(Přitom symbol (ABC) značí tzv. *dělicí poměr* bodu C na přímce AB vzhledem k základním bodům A, B; je tedy $(ABC) = AC : BC$.)

Důkaz této věty se provede pomocí svazku rovin o ose v přímce AB a plochu $\varkappa$ dostaneme otáčením Apolloniovy kružnice k (A, B, λ) kolem přímky AB. Proveďte sami!



Obr. 4

Úloha 6. Je dána rovina ϱ a mimo ni dva různé body A, B; přitom přímka AB není kolmá k ϱ. Určete v rovině ϱ g. m. b., jichž spojnice s body A, B mají od roviny ϱ stejné odchylky $\neq 90°$. [Apolloniova kružnice k (A', B', λ), kde body A', B' jsou pravoúhlé průměty bodů A, B do roviny ϱ a poměr $\lambda = \dfrac{A'M}{B'M} = \dfrac{AM}{BM}$ (body M náležejí kružnici k). V případě, že dané body A, B jsou od dané roviny ϱ stejně vzdáleny, je hledaným g. m. b. osa úsečky $A'B'$.]

Poznámka. Pro vyšetřování některých g. m. b. v prostoru budeme později potřebovat pojem tzv. *mocnosti bodu ke kulové ploše;* proto si zde tento pojem vysvětlíme.

Začneme opět s obdobným pojmem v rovině. Je-li dána kružnice k a v její rovině bod M, pak víme, že o kružnici k (O, r) a bodu M platí důležitá planimetrická vlastnost, která dochází hojného užití při konstruktivních úlohách o kružnici, a která vyjadřuje tzv. mocnost bodu M ke kružnici k. Viz obr. 4.

Sestrojíme-li bodem M sečny a_i kružnice k a označíme-li A_i, A'_i společné body kružnice k a sečen a_i, pak platí o velikostech úseček MA_i, MA'_i vztah

$$(^*) \qquad MA_i . MA'_i = MO^2 - r^2 \ (= \text{konst.}).$$

Číslo $MO^2 - r^2$ se nazývá mocnost bodu M ke kružnici k.[5]) Důkaz vztahu (*) viz v knížce *J. Šedivého*, citované v odst. 4 na str. 23—24.

Nyní snadno dokážeme platnost prostorového vztahu, který vyjadřuje mocnost bodu M ke kulové ploše $\varkappa$ (O, r).

Plochu $\varkappa$ můžeme vytvořit otáčením kružnice k (O, r) kolem osy MO, takže vztah (*) platí hned také pro všechny kružnice plochy $\varkappa$, vzniklé otáčením kružnice k kolem osy MO (za předpokladu $M \not\equiv O$) a číslo $MO^2 - r^2$ udává i mocnost bodu M k ploše $\varkappa$. Je-li $M \equiv O$, otáčíme kružnici k kolem libovolné přímky procházející bodem O.

Než přistoupíme k dalším výkladům, bude prospěšné, když čtenář sám rozřeší následující úlohy, jejichž výsledky v dalším použijeme.

[5]) Je-li $MO > r$, tj. leží-li bod M vně kružnice k, je mocnost $MO^2 - r^2$ bodu M kladné číslo rovné MT^2, druhé mocnině délky tečny sestrojené z bodu M ke kružnici k; je-li $MO = r$, tj. leží-li bod M na kružnici k, je jeho mocnost rovna nule; je-li $MO < r$, tj. leží-li bod M uvnitř kružnice k, je jeho mocnost záporné číslo.

Úloha 7. Určete g. m. středů kulových ploch, které procházejí danými třemi body $A \neq B \neq C$. [Přímka kolmá k rovině $\varrho \equiv (ABC)$, která prochází středem kružnice opsané trojúhelníku $\triangle ABC$.]

Úloha 8. Jsou dány rovnoběžné roviny ϱ, σ ($\varrho \neq \sigma$). Určete g. m. středů všech úseček, z nichž každá má jeden krajní bod v rovině ϱ a druhý krajní bod v rovině σ. [Rovina souměrnosti $\omega \parallel \varrho$ ($\parallel \sigma$) rovinové vrstvy (ϱ, σ) určené rovinami ϱ, σ.]

Úloha 9. Jsou dány mimoběžné přímky a, b. Určete g. m. středů všech úseček, z nichž každá má jeden krajní bod na přímce a, druhý krajní bod na přímce b. [Rovina σ souměrnosti nejkratší příčky XY daných mimoběžek ($\sigma \perp XY$), srovn. s obr. 7.]