5. kapitola

NĚKOLIK OTÁZEK Z MATEMATICKÉ STATISTIKY

Představme si, že máme vyšetřit výšku a váhu patnáctiletých chlapců v naší republice. Předmětem zkoumání je tedy soubor jedinců, který obsahuje dosti značný počet prvků. Nebylo by proto hospodárné, kdybychom k získání výsledku chtěli skutečně změřit a zvážit všechny chlapce tohoto věku. Nebylo by to možné třeba ani z toho důvodu, že by tento experiment trval příliš dlouho a my máme předepsáno, abychom výsledný údaj získali v době co nejkratší. Jak budeme postupovat? Místo celého velmi početného základního souboru si vezmeme jen určitý výběr, tj. skupinu patnáctiletých chlapců, která není příliš početná a která je vybrána podle určitých zásad z celého souboru zkoumaných jedinců. Výšku resp. váhu pak měříme jen u tohoto výběru. Zmíněné zásady spočívají zejména v tom, že žádáme, aby výběr byl náhodný a co možná reprezentativní, tj. aby v určitém smyslu vzhledem ke zkoumanému znaku reprezentoval celý základní soubor.

Měli jsme tedy základní soubor, ve kterém se měl měřit některý kvantitativní znak (výška, váha) a přešli jsme k menšímu výběru. Jak se liší třeba aritmetický průměr v základním souboru od aritmetického průměru ve výběru a jaký je vztah mezi těmito čísly? Tomuto zkoumání věnujeme další úvahu. Přitom odhlédneme od konkrétního významu kvantitativního znaku a budeme pracovat prostě s čísly.

Nechť je tedy dán základní soubor, který má N prvků.

Na každém z nich je naměřen kvantitativní znak x_i, takže dostáváme skupinu N čísel $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$. Kromě toho uvažujme výběr, který má r prvků ($1 \leqq r \leqq N$). Takových výběrů existuje celkem $\binom{N}{r}$. Číslům N, resp. r, říkáme někdy též *rozsah* základního souboru, resp. výběru. Označme $\bar{x}$ aritmetický průměr v základním souboru; je tedy

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N}{N}. \tag{1}$$

Dále označme $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(s)}$ po řadě všechny aritmetické průměry ve výběrech rozsahu r; je tedy $s = \binom{N}{r}$. Jak velký je aritmetický průměr z čísel $\bar{x}^{(i)}$? Odpověď najdeme v dalším příkladě.

Příklad 34. Určete aritmetický průměr z výběrových aritmetických průměrů $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(s)}$.

Řešení. Předmětem naší úvahy je výraz

$$\frac{\bar{x}^{(1)} + \bar{x}^{(2)} + \ldots + \bar{x}^{(s)}}{s}.$$

Rozšíříme-li tento zlomek číslem r, vychází

$$\frac{r\bar{x}^{(1)} + r\bar{x}^{(2)} + \ldots + r\bar{x}^{(s)}}{rs}. \tag{2}$$

Každé z čísel $r\bar{x}^{(i)}$ si můžeme představit jako součet některých čísel x_j, přičemž sčítanců je vždy r. V čitateli zlomku (2) se tedy vyskytují všechna čísla x_j — případně vícekrát. Kolikrát je tu číslo x_1? Musíme určit, kolikrát se číslo x_1 vyskytuje ve výběrech rozsahu r ze základního souboru rozsahu N. Každý výběr obsahující prvek x_1 dostaneme tak, že k prvku x_1 přidáme libovolnou skupinu o $r-1$ prvcích; je tedy výběrů obsahujících prvek x_1 právě tolik, kolik kombinací $(r-1)$-ní třídy lze utvořit z $N-1$ prvků, tj.

$\binom{N-1}{r-1}$. Číslo x_1 je tedy v čitateli zlomku (2) právě $\binom{N-1}{r-1}$--krát a totéž platí ovšem i o každém z dalších čísel x_2, x_3, ..., x_N. Čitatele zlomku (2) tedy můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\binom{N-1}{r-1}.(x_1+x_2+\ldots+x_r).$$

Podle (1) má proto čitatel tvar

$$\binom{N-1}{r-1}.N.\bar{x}=\frac{(N-1)!}{(r-1)!(N-r)!}.N.\bar{x}=\frac{N!}{(r-1)!(N-r)!}.\bar{x}.$$

Jmenovatel zlomku (2) je

$$r.s=r.\binom{N}{r}=r.\frac{N!}{r!(N-r)!}=\frac{N!}{(r-1)!(N-r)!}.$$

Dělením tedy dostáváme podíl $\bar{x}$.

Odpověď. Aritmetický průměr ze všech výběrových aritmetických průměrů se rovná aritmetickému průměru v základním souboru.

Další důležitou charakteristikou, která se vyskytuje v matematické statistice, je tzv. *směrodatná odchylka* σ. Jsou-li dána čísla x_1, x_2, ..., x_N, pak σ je definováno vztahem

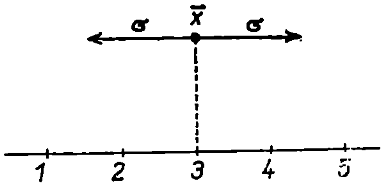
$$\sigma=\sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_N-\bar{x})^2}{N}}.$$

Směrodatná odchylka σ je mírou, jak se hodnoty x_i „rozptylují" nebo „kupí" kolem aritmetického průměru $\bar{x}$; to je vidět z toho, že σ závisí na odchylkách $x_i - \bar{x}$. Jsou-li odchylky malé, je σ malé, jsou-li odchylky velké, je σ velké.

Uvedeme si numerický příklad. Čísla 1, 2, 3, 4, 5 mají aritmetický průměr 3, takže

$$\sigma=\sqrt{\frac{(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2}{5}}=\sqrt{2}.$$

Bývá zvykem znázorňovat daná čísla na ose číselné a připojit tam též směrodatnou odchylku. Pro náš případ je toto znázornění vidět na obr. 5.



Obr. 5.

Vraťme se ještě k výběrovým aritmetickým průměrům a studujme otázku, jak se tato čísla $\bar{x}^{(i)}$ „kupí" kolem aritmetického průměru $\bar{x}$. Srovnáme tedy směrodatnou odchylku všech těchto výběrových aritmetických průměrů se směrodatnou odchylkou čísel x_j v základním souboru. Tomuto srovnání je věnován další příklad.

Příklad 35. Znáte-li rozsah základního souboru a rozsah výběrů (čísla N a r) a směrodatnou odchylku σ v základním souboru, vypočtěte směrodatnou odchylku všech výběrových aritmetických průměrů $\bar{x}^{(i)}$.

Řešení. Případ $r = 1$ je triviální, neboť pak je hledaná směrodatná odchylka rovna přímo číslu σ. V dalším textu tedy uvažujme jen případ $r \geqq 2$. Použijme výsledku z předcházejícího příkladu, podle něhož čísla $\bar{x}^{(i)}$ mají aritmetický průměr $\bar{x}$. Jejich směrodatnou odchylku $\bar{\sigma}$ vypočteme tedy podle vzorce

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{(\bar{x}^{(1)} - \bar{x})^2 + (\bar{x}^{(2)} - \bar{x})^2 + \ldots + (\bar{x}^{(s)} - \bar{x})^2}{s}}.$$

Budeme zatím pracovat jen se zlomkem pod odmocninou, který rozšíříme číslem r^2. Dostáváme tak zlomek

$$\frac{(r\bar{x}^{(1)}-r\bar{x})^2+(r\bar{x}^{(2)}-r\bar{x})^2+\ldots+(r\bar{x}^{(s)}-r\bar{x})^2}{r^2 s}. \tag{3}$$

Součin $r\bar{x}^{(i)}$ si zase můžeme představit jako součet některých čísel x_j, takže rozdíl $r\bar{x}^{(i)} - r\bar{x}$ lze převést na tvar

$$(x_a-\bar{x})+(x_b-\bar{x})+\ldots+(x_t+\bar{x}),$$

který se týká jednoho výběru. Čitatele zlomku (3) lze tedy vyjádřit jako součet, v němž jsou jednak sčítanci tvaru $(x_a-\bar{x})^2$, jednak sčítanci tvaru $2(x_a-\bar{x})(x_b-\bar{x})$ (při $a \neq b$). Kolikrát je zde sčítanec $(x_1-\bar{x})^2$? Stejná úvaha jako v předcházejícím příkladě nás vede k výsledku $\binom{N-1}{r-1}$. Také každý ze sčítanců

$$(x_2-\bar{x})^2, (x_3-\bar{x})^2, \ldots, (x_N-\bar{x})^2$$

má v čitateli zlomku (3) stejnou násobnost.

Kolikrát se v čitateli zlomku (3) vyskytuje sčítanec tvaru $2(x_1-\bar{x})(x_2-\bar{x})$? Jsme tu vedeni ke kombinačnímu číslu $\binom{N-2}{r-2}$, které se ovšem týká i dalších sčítanců uvedeného tvaru.

Čitatel zlomku (2) je tedy součtem dvou výrazů; první má tvar

$$A=\binom{N-1}{r-1}\cdot[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_N-\bar{x})^2],$$

druhý má tvar

$$B=\binom{N-2}{r-2}\cdot[2(x_1-\bar{x})(x_2-\bar{x})+\ldots+2(x_{N-1}-\bar{x})(x_N-\bar{x})].$$

Víme, že platí

$$\binom{N-1}{r-1}=\binom{N-2}{r-2}+\binom{N-2}{r-1},$$

takže v součtu $A+B$ si můžeme nejprve všímat jen těch sčítanců, jež mají u sebe jako koeficient kombinační číslo $\binom{N-2}{r-2}$. Je vidět, že součet těchto sčítanců lze vyjádřit jako

$$[(x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+\ldots+(x_N-\bar{x})]^2,$$

což podle vzorce (1) je zřejmě rovno nule. Součet $A+B$ v čitateli zlomku (3) se tedy převádí na tvar

$$\binom{N-2}{r-1}.[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_N-\bar{x})^2].$$

Podle definice směrodatné odchylky lze tento výsledek vyjádřit jako

$$\binom{N-2}{r-1}.N\sigma^2=\frac{(N-2)!}{(r-1)!(N-r-1)!}.N\sigma^2.$$

Upravujme ještě jmenovatele zlomku (3). Máme

$$r^2s=r^2\binom{N}{r}=r^2\frac{N!}{r!(N-r)!}=r\frac{N!}{(r-1)!(N-r)!}.$$

Zlomek (3) se tedy rovná

$$\frac{N-r}{r(N-1)}\sigma^2.$$

Odpověď. Směrodatnou odchylku všech výběrových aritmetických průměrů určuje vzorec

$$\bar{\sigma}=\sigma\sqrt{\frac{N-r}{r(N-1)}}.$$

Výsledek, ke kterému jsme právě dospěli, se zdá na první pohled trochu složitý, avšak pro praktické případy jej můžeme ještě zjednodušit. Obvykle bývá totiž číslo N velmi veliké a číslo r poměrně malé. V takovém případě můžeme ještě upravovat zlomek, který se vyskytuje ve výsledném vzorci pro $\bar{\sigma}$. Platí

$$\frac{N-r}{r(N-1)}=\frac{1-\frac{r}{N}}{r-\frac{r}{N}},$$

přičemž zlomek $\frac{r}{N}$ je „poměrně malý". V praktických příkladech můžeme dokonce předpokládat, že se rovná nule; tím dostáváme přibližnou rovnost

$$\frac{N-r}{r(N-1)}\doteq\frac{1}{r}$$

a pro směrodatnou odchylku přibližný vzorec

$$\bar{\sigma}\doteq\frac{\sigma}{\sqrt{r}}.$$

Zamysleme se ještě nad tím, jaký význam má výsledek dosažený v příkladě 35. Zjistili jsme, že se výběrové aritmetické průměry „hromadí" kolem průměru $\bar{x}$ mnohem více než původně uvažovaná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Směrodatná odchylka nás poučuje o tom, jak jsou čísla na číselné ose roztroušena. Bereme-li z velkého základního souboru např. výběry rozsahu 25, pak směrodatná odchylka $\bar{\sigma}$ je zhruba pětinou směrodatné odchylky σ. Abychom si mohli lépe představit, jak se výběrové průměry hromadí kolem $\bar{x}$, vypočteme si ještě jeden numerický příklad. V něm jsme zvolili jen malá čísla, protože při větších rozsazích a větších číslech x_j velmi rychle vzrůstají technické potíže s numerickým výpočtem.

Příklad 36. V základním souboru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ sestrojte všechny výběry rozsahu 3. Vypočtěte výběrové aritmetické průměry a jejich směrodatnou odchylku. Znázorněte výsledek graficky.

Řešení. Víme již (viz str. 52), že $\bar{x}=3$, $\sigma=\sqrt{2}\doteq 1{,}41$. Další výpočet můžeme upravit do tabulky

výběr	$\bar{x}^{(i)}$	$\bar{x}^{(i)}-\bar{x}$	$(\bar{x}^{(i)}-\bar{x})^2$
1, 2, 3	2	-1	1
1, 2, 4	$2\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$
1, 2, 5	$2\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1, 3, 4	$2\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1, 3, 5	3	0	0
1, 4, 5	$3\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
2, 3, 4	3	0	0
2, 3, 5	$3\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
2, 4, 5	$3\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$
3, 4, 5	4	1	1

Sečteme čísla v posledním sloupci a dostáváme výsledek $3\frac{1}{3}$. Protože je celkem 10 výběrů, dělíme

$$3\frac{1}{3}:10=\frac{1}{3}$$

a pak odmocníme. Je tedy

$$\bar{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\sqrt{3}\doteq 0{,}58.$$

To je ve shodě se vzorcem pro $\bar{\sigma}$, který jsme odvodili výše. Podle něho je totiž

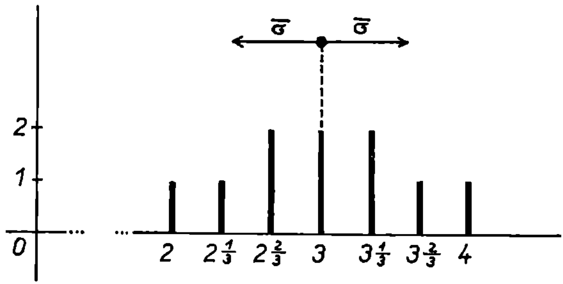
$$\bar{\sigma}=\sqrt{2}\,.\sqrt{\frac{5-3}{3.(5-1)}}=\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Přibližný vzorec pro $\bar{\sigma}$ zde ovšem nemůžeme uplatnit, neboť je

$$\frac{r}{N}=\frac{3}{5}=0{,}6,$$

což nelze považovat za číslo „skoro rovné" nule.

Ještě ke grafickému znázornění. Protože se zde některé výběrové průměry $\bar{x}^{(i)}$ opakují, použijeme ke znázornění tzv. sloupkového diagramu. Na ose číselné u čísla $\bar{x}^{(i)}$ je připojen sloupek, jehož délka uvádí, kolikrát se toto číslo v úvaze vyskytuje. Výsledek je vidět na obr. 6, kde



Obr. 6.

jsme také znázornili směrodatnou odchylku $\bar{\sigma}$. Srovnejte tento sloupkový diagram s obr. 5, který se týká základního souboru.*)

*) Příklady, které jsme zde řešili, patří do oddílu matematické statistiky, nazývaného teorie výběrových šetření (z konečných souborů).

Úlohy

23. Graficky znázorněte přibližný vzorec

$$\bar{\sigma} \doteq \frac{\sigma}{\sqrt{r}};$$

přitom volte $\sigma = 10$, na vodorovnou osu nanášejte r a na svislou $\bar{\sigma}$.