Faktoriály a kombinační čísla

4. kapitola. Binomická věta

In: Jiří Sedláček (author): Faktoriály a kombinační čísla. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1964. pp. 36–49.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403519

4. kapitola

BINOMICKÁ VĚTA

Kombinační čísla se používají v tzv. binomické větě, jejíž znění si zde nejprve uvedeme (a která je čtenářům rovněž známa ze školy). *Binomická věta* zní:

Jsou-li a, b libovolná čísla (reálná nebo komplexní) a n přirozené číslo, platí

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+$$
$$+\binom{n}{n}b^n.$$

Její použití si opět procvičíme v příkladech.

Příklad 25. Pomocí binomické věty vypočtěte $(x^3 + 2y)^5$.

Řešení. Podle binomické věty platí

$$(x^3+2y)^5=\binom{5}{0}x^{15}+\binom{5}{1}x^{12}.2y+\binom{5}{2}x^9.4y^2+$$
$$+\binom{5}{3}x^6.8y^3+\binom{5}{4}x^3.16y^4+\binom{5}{5}.32y^5.$$

Binomické koeficienty $\binom{5}{0}$, $\binom{5}{1}$, ..., $\binom{5}{5}$ můžeme určit třeba z Pascalova trojúhelníka:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

. . . .

Dostáváme tak

$$(x^3+2y)^5 = x^{15}+10x^{12}y+40x^9y^2+80x^6y^3+80x^3y^4+32y^5.$$

V dalším příkladě si dokážeme dva vztahy o kombinačních číslech, které jsou dosti užitečné v mnoha úvahách.

Příklad 26. Je dáno přirozené číslo n. Dokažte, že platí

$$\text{a)}\ \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n;$$

$$\text{b)}\ \binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}+$$
$$+(-1)^n\binom{n}{n}=0.$$

Řešení. Budeme používat binomické poučky

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+$$
$$+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n.$$

a) Dosadíme sem $a = b = 1$ a dostáváme přímo vztah, který máme dokázat.

b) Dosadíme $a = 1$, $b = -1$; snadnou úpravou dostaneme pak žádaný výsledek.

Ukážeme si hned použití těchto vzorců. V dalším příkladě si totiž odvodíme trochu složitější vztah s kombinačními čísly.

Příklad 27. Je dáno přirozené číslo $n > 1$. Dokažte, že platí

$$1.\binom{n}{1}-2.\binom{n}{2}+3.\binom{n}{3}-4.\binom{n}{4}+\ldots+n(-1)^{n-1}\binom{n}{n}=0.$$

Řešení. Uvažovaný součet označíme S_n. Budeme postupovat matematickou indukcí (která ovšem začne až případem $n = 2$). Pro $n = 2$ dostáváme

$$S_2=1\,.\binom{2}{1}-2\,.\binom{2}{2}=2-2=0,$$

takže vzorec platí.*) Předpokládejme nyní, že náš vzorec platí pro některé přirozené číslo n a uvažujme součet

$$S_{n+1}=1\,.\binom{n+1}{1}-2\,.\binom{n+1}{2}+3\,.\binom{n+1}{3}-\ldots+$$
$$+(n+1)(-1)^n\binom{n+1}{n+1},$$

ve kterém k-tý člen je

$$a_k=(-1)^{k-1}\,.\,k\binom{n+1}{k}.$$

Tento výraz můžeme upravovat podle známého vzorce

$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$$

a dostáváme

$$a_k=(-1)^{k-1}\,.\,k\,.\binom{n}{k}+(-1)^{k-1}\,.\,k\,.\binom{n}{k-1}. \qquad (1)$$

Abychom vypočetli S_{n+1}, musíme sečíst všechny členy a_k pro $k = 1, 2, 3, \ldots, n+1$. Podle vzorce (1) dostáváme při tomto sčítání nejprve součet S_n (sečtením prvních n sčítanců v a_k), potom výraz

$$V=(-1)^n(n+1)\binom{n}{n+1}$$

a konečně součet

$$s=1\,.\binom{n}{0}-2\,.\binom{n}{1}+3\,.\binom{n}{2}-\ldots+(n+1)(-1)^n\binom{n}{n}.$$

Je zřejmě $V = 0$ a budeme se tedy zabývat součtem s. Zde můžeme k-tý člen napsat ve tvaru

$$b_k=(-1)^{k-1}k\binom{n}{k-1},$$

*) Doporučuji vám, abyste si sami vypočítali též čísla s_3, s_4, s_5, což vám přiblíží náš příklad a snad i umožní pochopit důkaz.

což lze upravit na tvar

$$b_k=(-1)^{k-1}(k-1)\binom{n}{k-1}+(-1)^{k-1}\binom{n}{k-1}.$$

Dosazujeme-li $k = 1, 2, 3, \ldots, n + 1$, dostáváme tedy výsledek

$$s=S_n+\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}.$$

Podle indukčního předpokladu a podle příkladu 26 b) je proto $s = 0$. Tím je druhý indukční krok proveden a důkaz uvedeného vztahu je podán.

Nyní si odvodíme jednu nerovnost, kterou budeme v dalším potřebovat.

Příklad 28. Pro každé přirozené číslo n a pro každé nezáporné číslo x platí $(1 + x)^n \geqq 1 + nx$. Dokažte!*)

Řešení. Nerovnost vyplývá z binomické věty

$$(1+x)^n=1+\binom{n}{1}x+\ldots$$

V místě, kde jsme napsali tři tečky, jsou členy**) tvaru $\binom{n}{k}x^k$, které jsou za našich předpokladů vesměs čísla nezáporná. Jestliže tedy na pravé straně tyto členy vynecháme, buď se tím tato strana zmenší nebo se nezmění. Vždycky tedy platí

$$(1+x)^n \geqq 1+\binom{n}{1}x,$$

což po malé úpravě již dává žádanou nerovnost.

*) Nerovnost z této úlohy se obvykle nazývá Bernoulliho nerovnost.

**) Pro $n=1$ ovšem tyto členy již neexistují, ale pro tento triviální případ je platnost Bernoulliho nerovnosti zřejmá.

Jiné řešení. Můžeme postupovat též matematickou indukcí. Než však přistoupíme k tomuto druhému řešení, připojíme ještě jednu poznámku. Obor čísel x z naší úlohy je možno totiž rozšířit a dokázat platnost Bernoulliho nerovnosti pro všechna reálná čísla $x > -1$.

Matematickou indukci začneme případem $n = 1$. Pak má nerovnost tvar

$$(1+x)^1 \geqq 1+x,$$

což je zřejmě správné. Předpokládejme tedy, že pro některé přirozené číslo n platí

$$(1+x)^n \geqq 1+nx.$$

Obě strany této nerovnosti znásobíme kladným číslem $(1+x)$; vychází

$$(1+x)^{n+1} \geqq (1+nx)(1+x). \tag{1}$$

Na pravé straně vynásobením dostáváme

$$1+nx+x+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2.$$

Číslo nx^2 je nezáporné, takže po jeho vynechání se příslušný výraz buď zmenší nebo nezmění. Z toho plyne

$$(1+nx)(1+x) \geqq 1+(n+1)x.$$

Připojíme-li toto k nerovnosti (1), dostáváme

$$(1+x)^{n+1} \geqq 1+(n+1)x.$$

Tím jsme však Bernoulliho nerovnost dokázali též pro $n+1$ a důkaz je tím podán.*)

Bernoulliho nerovnost nám umožní odvodit jeden zajímavý vztah. Tomuto odvození je věnován příklad 29.

Příklad 29. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

*) Rozmyslete si sami, zda Bernoulliho nerovnost platí též pro $x = -1$.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqq 2.$$

Řešení. Stačí dosadit $x=\frac{1}{n}$ do Bernoulliho nerovnosti. Po zkrácení již okamžitě dostáváme žádaný vztah. Prosíme čtenáře, aby si uvědomil, že znaménko $=$ v tomto vztahu platí právě tehdy, je-li $n=1$.

S příkladem 29 úzce souvisí další nerovnost, která rovněž podává informaci o mocnině $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Příklad 30. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Řešení. Pro $n=1$ dostáváme

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2 < 3,$$

takže nerovnost skutečně platí. V dalším textu budeme předpokládat, že přirozené číslo n je větší než 1. Podle binomické věty máme

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\binom{n}{3}\frac{1}{n^3}+\ldots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}=$$
$$=1+1+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots+$$
$$+\frac{n(n-1)\ldots 1}{1.2.\ldots.n}\cdot\frac{1}{n^n}.$$

Ve zlomcích

$$\frac{n(n-1)}{1.2},\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3},\ \ldots,\ \frac{n(n-1).\ldots.1}{1.2.\ldots.n}$$

upravíme čitatele tím, že zde každého činitele nahradíme číslem n. Tím se každý z těchto zlomků zvětší a přejde na tvar

$$\frac{n^2}{2!}, \frac{n^3}{3!}, \quad \ldots, \frac{n^n}{n!}.$$

Dosadíme-li tyto zvětšené hodnoty do našeho výpočtu, vidíme, že můžeme krátit a dostáváme tak nerovnost

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}. \tag{1}$$

Zbývá odhadnout číslo

$$a=\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

Zde ve jmenovatelích budeme místo čísel $2!, 3!, \ldots, n!$ klást čísla $2^1, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$. Tím se zřejmě (počínaje od druhého členu) každý jmenovatel zmenší a pro číslo a tím nacházíme odhad

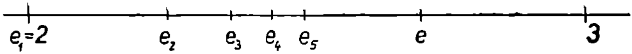
$$a<\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=1-\frac{1}{2^{n-1}}<1.$$

Je tedy $a < 1$. Vrátíme-li se ke vzorci (1) a použijeme-li zde výsledku právě dosaženého, dostáváme tím už okamžitě nerovnost, kterou jsme měli dokázat.

Zůstaňme ještě na chvíli u příkladů 29 a 30. Zde se vyskytuje výraz

$$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

který má v matematické analýze dosti časté upotřebení. Dosazujeme-li totiž do e_n po řadě $n = 1, 2, 3, \ldots$, dostáváme tak posloupnost čísel, jež jsou — jak jsme právě viděli — vesměs větší nebo rovna než číslo 2 a menší než číslo 3. Na obr. 4 vidíme část číselné osy a na ní jsme zobrazili část naší posloupnosti, to je čísla e_1, e_2, e_3, e_4, e_5. Dá se dokázat, že tato posloupnost je rostoucí, tj. že pro každé



Obr. 4.

n platí $e_n < e_{n+1}$. Již z názoru je patrné, že se tato čísla e_n musí „hromadit“ kolem určité hodnoty; toto „mezní“ číslo označujeme písmenem e. Výpočet ukazuje, že je e $\doteq$ 2,71828. Mnozí naši čtenáři jistě umějí počítat s limitami a vědí proto, že se v takovém případě mluví o **konvergenci** posloupnosti $e_1, e_2, e_3, \ldots$ a že se píše

$$\lim_{n\to\infty} e_n = e.$$

Říkáme, že číslo e je **limitou** posloupnosti $e_1, e_2, e_3, \ldots$ *)

Nerovnosti, které jsme až dosud probrali, nám umožní odvodit některé věty o faktoriálech. Těmto odvozením jsou věnovány další příklady.

Příklad 31. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n.$$

Řešení. Budeme postupovat matematickou indukcí. Pro $n=1$ máme

$$1! > \frac{1}{3},$$

což zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že pro některé

*) Čtenáře, kteří se zajímají o pojem limity, odkazujeme na dvě přístupně psané knihy. První má název „Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu“ a napsal ji K. Hruša; druhá má název „Diferenciální počet pro začátečníky“ a jejím autorem je K. Havlíček.

přirozené číslo n uvažovaná nerovnost platí a budeme dokazovat nerovnost

$$(n+1)! > \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}. \qquad (1)$$

Levou stranu nerovnosti (1) lze upravovat podle indukčního předpokladu takto:

$$(n+1)! = n!\,.\,(n+1) > \left(\frac{n}{3}\right)^n.(n+1). \qquad (2)$$

Abychom dokázali vztah (1), musíme poslední výraz v řádku (2) porovnat s číslem $\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}$. Ptejme se, zda může platit

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n(n+1) \leqq \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}. \qquad (3)$$

Kdyby tato nerovnost platila, pak bychom po vynásobení (kladným) číslem 3^{n+1} dostali

$$3\,.\,n^n.(n+1) \leqq (n+1)^{n+1}.$$

Dále lze krátit číslem $n+1$, což dává

$$3\,.\,n^n \leqq (n+1)^n.$$

Dělíme-li obě strany číslem n^n, pak po snadné úpravě pravé strany vychází

$$3 \leqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

To však je spor s tím, co jsme dokázali v předcházejícím příkladě. Vztah (3) tedy neplatí a naopak je správná nerovnost

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n(n+1) > \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}.$$

Připojíme-li tuto nerovnost k řádku (2), dostáváme závěrem vztah (1), čímž je hotov druhý indukční krok. Důkaz uvedené nerovnosti je tím podán.

Příklad 32. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n \geqq 6$ platí

$$n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n. \tag{1}$$

Řešení. I zde použijeme matematické indukce, ale ta začne u čísla $n = 6$. Pro tento případ totiž dostáváme $6! < 3^6$, čili $720 < 729$, což je zřejmě správná nerovnost. Předpokládejme tedy, že nerovnost (1) platí pro některé přirozené číslo $n \geqq 6$ a budeme dokazovat obdobnou nerovnost pro číslo $n + 1$. Platí

$$(n+1)! = n!(n+1) < \left(\frac{n}{2}\right)^n (n+1). \tag{2}$$

Porovnáme nyní čísla

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n (n+1) \quad \text{a} \quad \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}.$$

Kdyby platilo

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n (n+1) > \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1},$$

pak by odtud plynulo

$$2 . n^n (n+1) > (n+1)^{n+1},$$

čili po další malé úpravě

$$2 . n^n > (n+1)^n.$$

Obě strany bychom dělili číslem n^n a dostali bychom

$$2 > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

To však je spor s příkladem 29. Našli jsme tak vztah

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n (n+1) \leqq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1},$$

který připojíme ke (2). Tak vychází

$$(n+1)! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}.$$

Tím jsme prokázali platnost také pro číslo $n + 1$ a důkaz je hotov.

Ještě několik slov k předcházejícím dvěma příkladům. Výsledky, se kterými jsme se tam seznámili, můžeme shrnout do stručného vyjádření

$$\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n, \tag{1}$$

což platí pro všechna „dostatečně velká" přirozená čísla n.

Z počítání s faktoriály víme, že číslo $n!$ vzrůstá, dosazujeme-li za n po řadě čísla 1, 2, 3, ... Vyjádření (1) ukazuje, že $n!$ vzrůstá „rychleji" než $\left(\frac{n}{3}\right)^n$ a „pomaleji" než $\left(\frac{n}{2}\right)^n$. Tak např. pro $n = 300$ máme odhad*)

$$100^{300} < 300! < 150^{300}.$$

Platí $100^{300} = 10^{600}$, což je číslo, které má (v desítkové soustavě) celkem 601 místo. Z toho je tedy patrné, že číslo 300! má také alespoň 601 místo. Z druhé strany jsme číslo 300! odhadli číslem 150^{300}. Abychom si uvědomili, kolik číslic má (v desítkové soustavě) číslo 150^{300}, budeme počítat logaritmicky. V logaritmických tabulkách najdeme, že $\log 150 = 2{,}1761$. Musíme si ovšem uvědomit, že toto je neúplné číslo, které zastupuje vyjádření

$$2{,}17605 \leqq \log 150 \leqq 2{,}17615.$$

Odtud plyne

$$300 \,.\, 2{,}17605 \leqq 300 \,.\, \log 150 \leqq 300 \,.\, 2{,}17615,$$

čili

$$652{,}815 \leqq \log 150^{300} \leqq 652{,}845.$$

*) Srovnej též výsledek, k němuž jsme došli v příkladě 3.

Toto vyjádření však znamená, že číslo 150^{300} má (v desítkové soustavě) právě 653 číslice. Celkem je tedy vidět z řádku (1), že číslo 300! má nejvýše 653 číslice.

Souhrnně lze tedy říci, že číslo 300! má alespoň 601 číslici a nejvýše 653 číslice. Tento odhad je ovšem jen velmi hrubý; kdybychom chtěli určit přesný počet číslic v čísle 300!, potřebovali bychom k tomu zřejmě velmi zdlouhavý numerický výpočet. V integrálním počtu se odvozuje tzv. Stirlingův vzorec, který dovoluje určit číslo $n!$ poměrně dosti přesně, jestliže číslo n je „dostatečně velké". V tomto vzorci se vyskytuje číslo e, o kterém již byla řeč na stránkách této knížky. Stirlingův vzorec má tvar

$$n! \doteq \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Ukázali jsme si tedy, že binomická věta slouží k odvození některých vztahů, jež jsou dosti užitečné i při numerickém počítání. Tento paragraf ukončíme jedním příkladem, který nám osvětlí užitečnost binomické věty i v teorii čísel.

Příklad 33. Nechť p je libovolné prvočíslo a n libovolné přirozené číslo. Potom rozdíl $n^p - n$ je dělitelný prvočíslem p. Dokažte.

Řešení. Budeme postupovat matematickou indukcí podle n. Přitom ovšem budeme prvočíslo p pokládat za pevné. Pro $n = 1$ je uvedený rozdíl roven nule, takže tvrzení platí. Předpokládejme, že tvrzení je dokázáno pro některé přirozené číslo n a budeme je dokazovat pro číslo $n + 1$. Budeme tedy pracovat s výrazem $(n + 1)^p - (n + 1)$, který můžeme upravit podle binomické věty na tvar

$$\{n^p - n\} + \binom{p}{1} n^{p-1} + \binom{p}{2} n^{p-2} + \binom{p}{3} n^{p-3} + \ldots + \binom{p}{p-1} n.$$

Výraz $n^p - n$ je dělitelný číslem p podle indukčního předpokladu, zatímco každý ze zbývajících členů je dělitelný prvočíslem p podle příkladu 14. Je tedy také rozdíl $(n+1)^p - (n+1)$ dělitelný prvočíslem p. Druhý indukční krok je tím proveden a důkaz je podán.

Poučka, s níž jsme se setkali v příkladě 33, se nazývá malá věta Fermatova. Připomíná nám jméno francouzského matematika a právníka P. Fermata (1601—1665), který našel řadu vět z teorie čísel. Přívlastkem „malá" odlišujeme tuto větu od jiného tvrzení, které vyslovil rovněž P. Fermat a které se dnes nazývá velká věta Fermatova. Toto druhé tvrzení se týká neurčité rovnice $x^n + y^n = z^n$, kde n je dané přirozené číslo. Fermat se zabýval případem $n \geqq 3$ a pokoušel se dokázat, že uvedená rovnice nemá žádné řešení přirozenými čísly x, y, z. Ze zápisu, jenž se nám zachoval, je vidět, že se Fermatovi žádné řešení nepodařilo najít; domníval se dokonce, že našel důkaz pro nemožnost takového řešení. V jeho úvaze však byla jistě nějaká chyba, neboť tento problém nebyl dodnes rozřešen a o velké větě Fermatově existuje již velmi obsáhlá literatura.

Úlohy

18. Vypočtěte: a) $(1+\sqrt{3})^6$; b) $(1+i)^7$.

19. Je dáno přirozené číslo n a reálné číslo x, o němž platí $|x| \leqq 1$. Dokažte nerovnost

$$(1+x)^n+(1-x)^n \geqq 2.$$

20. S přesností na dvě desetinná místa vypočtěte

$$e_{100} = 1{,}01^{100}.$$

21. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí*)

$$n! \leqq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

22. Podle Stirlingova vzorce vypočtěte přibližně $300!$.

*) Srovnej tuto úlohu s příkladem 32.