Faktoriály a kombinační čísla

3. kapitola. Kombinace

In: Jiří Sedláček (author): Faktoriály a kombinační čísla. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1964. pp. 27–35.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403518

3. kapitola

KOMBINACE

Jsou dána dvě přirozená čísla k, n. *Kombinace k-té třídy z n prvků* jsou skupiny po k různých prvcích vybrané z množiny mající n prvků tak, že každé dvě skupiny, které se liší pouze pořadím prvků, pokládáme za totožné. Ze školy víme, že počet kombinací k-té třídy z n prvků se rovná kombinačnímu číslu $\binom{n}{k}$. Příklady nám zase ukáží, jak se pojmu kombinace užívá při řešení různých otázek.

Příklad 17. Kolika způsoby je možno na čtvercové šachovnici s 64 poli vybrat tři pole tak, aby všechna tři pole neměla stejnou barvu?

Řešení. Vybíráme tři pole ze 64 polí, tj. tvoříme kombinace 3. třídy ze 64 prvků. Těch je $\binom{64}{3}$. Šachovnice má 32 bílých a 32 černých polí. Podle našeho textu nejsou přípustné trojice složené vesměs z bílých polí — takových trojic je $\binom{32}{3}$ — ani trojice složené vesměs z černých polí — těch je rovněž $\binom{32}{3}$. Hledaný počet je tedy

$$\binom{64}{3}-2.\binom{32}{3}=41\,664-9920=31\,744.$$

Můžeme však počítat též jiným způsobem. Pole vybíráme tak, že buď jedno je bílé a dvě černé nebo jedno je černé a dvě bílá. Z toho odvodíme počet možností

$$32.\binom{32}{2}+\binom{32}{2}.32=32.32.31=31744.$$

Odpověď. Pole můžeme vybrat 31 744 způsoby.

Příklad 18. Který vypuklý n-úhelník má alespoň dvakrát tolik úhlopříček co stran?

Řešení. Ze školy si pamatujeme, že počet úhlopříček vypuklého n-úhelníka lze vyjádřit číslem

$$\binom{n}{2}-n=\frac{n(n-3)}{2}.$$

Má tedy platit nerovnost

$$\frac{n(n-3)}{2}\geqq 2n.$$

Úpravou dostáváme

$$n(n-3)\geqq 4n.$$

Protože číslo n je kladné, můžeme obě strany tímto číslem dělit a dostaneme $n-3\geqq 4$, čili $n\geqq 7$.

Odpověď. Hledaný n-úhelník má alespoň sedm stran.

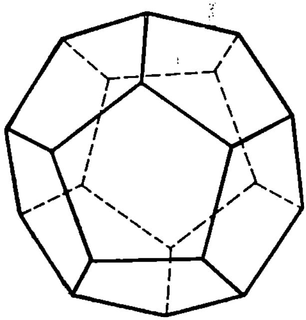
Trochu prostorové představivosti budeme potřebovat v dalším příkladě. Setkáme se tam s jedním pravidelným tělesem, které se nazývá pravidelný dvanáctistěn (dódekaedr). Abychom si o tomto tělese učinili lepší představu, podívejme se na obr. 3, který zachycuje pohled na toto těleso. Stěny dódekaedru jsou pravidelné pětiúhelníky.

Příklad 19. Kolik tělesových úhlopříček*) má pravidelný dvanáctistěn?

*) *Tělesovou úhlopříčkou* vypuklého tělesa rozumíme (jak známo) úsečku spojující dva různé vrcholy a ležící uvnitř tělesa.

Řešení. Pravidelný dvanáctistěn má 20 vrcholů. Z nich budeme vybírat dvojice, čili tvořit kombinace 2. třídy z 20 prvků. Těch je $\binom{20}{2} = 190$. To ovšem nejsou vesměs tělesové úhlopříčky, nýbrž jsou sem zahrnuty i hrany dvanáctistěnu a úhlopříčky ve stěnách. Dvanáctistěn má 30 hran, každá jeho stěna je pravidelný pětiúhelník a existuje tedy v ní pět úhlopříček. Ve stěnách je tedy celkem $12.5 = 60$ úhlopříček. Počet tělesových úhlopříček je tedy

$$190 - 30 - 60 = 100.$$



Obr. 3.

Jiné řešení. Určeme, kolik tělesových úhlopříček vychází z pevně zvoleného vrcholu. Každý vrchol patří ke třem stěnám, takže z něho vycházejí tři hrany a šest stěnových úhlopříček. Zbývá tedy ještě deset vrcholů, k nimž ze zvoleného vrcholu vedou tělesové úhlopříčky. Tato úvaha platí ovšem pro každý vrchol. Vrcholů je 20. Součin 20.10 znamená tedy dvojnásobně braný počet všech tělesových úhlopříček a to již vede k výsledku odvozenému v předcházejícím řešení.

Odpověď. Pravidelný dvanáctistěn má 100 tělesových úhlopříček.

Příklad 20. Vraťte se k příkladu 8 na str. 13. Ukažte, jak se změní výsledek, žádáme-li, aby ani v oddělení A ani v oddělení B nezůstala dvě volná místa.

Řešení. Je zakázán každý případ, kdy v A jsou dvě volná místa a také každý případ, kdy v B jsou dvě volná místa. V oddělení A, které má 12 míst, lze vybrat dvě volná místa zřejmě $\binom{12}{2}$ způsoby. Ostatní místa (je jich 24) jsou pak obsazena; žáky na ně můžeme umístit celkem 24! způsoby. Počet zasedacích pořádků, v nichž jsou dvě volná místa v oddělení A, je pak $\binom{12}{2}.24!$. Podobně pro dvě volná místa v oddělení B máme $\binom{14}{2}$ možností a na zbylých místech ve třídě lze žáky zase rozesadit 24! způsoby. Číslo $\binom{14}{2}.24!$ tedy udává počet zasedacích pořádků, v nichž jsou vždy dvě volná místa v oddělení B.

Odpověď na původní otázku tedy dává číslo

$$x = \frac{26!}{2!} - \binom{12}{2}.24! - \binom{14}{2}.24!.$$

Snadno nahlédneme, že je $x = (24!).168$. Logaritmický výpočet dává*)

$$\log x \doteq 23{,}7927 + 2{,}2253 = 26{,}0180$$

a po odlogaritmování $x \doteq 1{,}043 . 10^{26}$.

Příklad 21. V rovině jsou dány dvě různé rovnoběžky a, b. Na přímce a je dáno m různých bodů A_1, A_2, ...,

*) Můžete opět použít Valouchových tabulek, kde lze najít přibližnou hodnotu čísla log 24!.

A_m a na přímce b je dáno n různých bodů $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Určete počet všech trojúhelníků, jejichž všechny vrcholy leží na přímkách a, b, a to právě v bodech A_i, B_j.

Řešení. Celkem se v této úloze vyskytuje $m + n$ různých bodů, ze kterých máme tvořit trojice.

Utvoříme tedy nejprve všechny kombinace 3. třídy z $m + n$ prvků. Těchto kombinací je $\binom{m+n}{3}$. Toto číslo ovšem neznamená počet všech trojúhelníků, které nás zajímají v dané úloze. Zahrnuli jsme sem totiž také trojice bodů, které leží na přímce a a rovněž trojice ležící na přímce b. Je tedy nutné odečíst jednak $\binom{m}{3}$, jednak $\binom{n}{3}$, takže konečný výsledek je

$$\binom{m+n}{3} - \binom{m}{3} - \binom{n}{3}.$$

Jiné řešení. Příklad 21 lze řešit též touto úvahou. Z $m + n$ daných bodů budeme vybírat nejprve ty trojice, ve kterých dva body leží na přímce a a jeden na přímce b. Tvoříme tedy kombinace 2. třídy z m prvků — těch je $\binom{m}{2}$ — a ke každé z nich připojíme některý z bodů na přímce b. To je možno provést celkem $\binom{m}{2} . n$ způsoby.

Podobně určíme počet těch trojic, kde jeden bod leží na přímce a a dva na přímce b. Tu máme $m . \binom{n}{2}$ možností. Celkový počet trojúhelníků je tedy

$$\binom{m}{2} . n + \binom{n}{2} . m.$$

Dvě řešení, jež jsme podali u předcházejícího příkladu, nám poskytla dva výsledky, které se na první pohled od sebe liší. Z úvahy, kterou jsme provedli, vyplývá, že oba výsledky jsou si rovny, že tedy platí

$$\binom{m+n}{3}-\binom{m}{3}-\binom{n}{3}=\binom{m}{2}.n+\binom{n}{2}.m.$$

Tento vzorec je nám ostatně už znám z příkladu 11, kde jsme jej dokazovali výpočtem. Nyní jsme vlastně tedy dokazovali tento vzorec znova, přičemž jsme užili geometrického znázornění a vhodné kombinatorické úvahy. Čtenář nechť sám posoudí, která z obou cest pro důkaz našeho vzorce se mu jeví schůdnější.

Někdy se v matematice vyskytují též tzv. k o m b i n a c e s o p a k o v á n í m; s tímto pojmem se seznámíme v dalších řádcích. I tato otázka však úzce souvisí s jedním problémem z teorie čísel. Abychom této souvislosti lépe porozuměli, vyřešíme nejprve dva příklady, které na první pohled nijak nesouvisejí s kombinacemi. Při řešení druhého z nich však hned poznáme, že se s výhodou dá použít kombinačních čísel.

Příklad 22. Je dána rovnice

$$x+y+z=3.$$

Uveďte všechny uspořádané trojice celých nezáporných čísel (x, y, z), jež vyhovují naší rovnici.*)

Řešení. Úloha je celkem jednoduchá, jen si musíme dát pozor, abychom nezapomněli na žádný případ, který vyhovuje dané rovnici. Budeme proto postupovat systematicky.

Největší z hledaných čísel nemůže být větší než 3; tak nacházíme případy (3, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 3). Nyní vezmeme v úvahu ty trojice, ve kterých největší číslo je 2 — jedna z nich je (2, 1, 0) — a konečně ty, v nichž největší

*) Setkáváme se tu tedy s dalším případem neurčité (diofantské) rovnice.

číslo je 1 — taková je jen jediná, totiž (1, 1, 1). Výsledek můžeme zapsat do tohoto přehledu:

$$(3, 0, 0);\ (0, 3, 0);\ (0, 0, 3);\ (2, 1, 0);\ (2, 0, 1);$$
$$(1, 2, 0);\ (1, 0, 2);\ (0, 2, 1);\ (0, 1, 2);\ (1, 1, 1).$$

Odpověď. Našli jsme celkem 10 trojic, jež vyhovují daným podmínkám.

V dalším příkladě se budeme zabývat ještě obecnějším případem diofantské rovnice a budeme hledat počet řešení. Rozřešením příkladu 23 bude nalezena i odpověď na příklad 22, takže se může pokročilejšímu čtenáři zdát příklad 22 zbytečný. Zařadili jsme jej sem však přesto — nejen jako přípravu k další úvaze, ale aby si čtenář skutečně prošel všechny trojice vyhovující dané rovnici.

Příklad 23. Je dána rovnice

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_r = n,$$

kde r, n jsou daná přirozená čísla. Určete, kolik existuje uspořádaných r-tic čísel $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r$, jež splňují danou rovnici a jsou celá nezáporná.

Řešení. Zavedeme pomocné neznámé $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_r$ tím, že položíme

$$\begin{aligned}
y_1 &= 1 + x_1,\\
y_2 &= 2 + x_1 + x_2,\\
y_3 &= 3 + x_1 + x_2 + x_3,\\
y_4 &= 4 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_r &= r + x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_r.
\end{aligned}$$

Protože původní neznámé x_i jsou čísla nezáporná, platí o nových neznámých y_i zřejmě vztah

$$1 \leqq y_1 < y_2 < y_3 < \ldots < y_r = n + r.$$

Povšimněme si zde, že číslo y_r je rovno číslu $n + r$, takže je $y_{r-1} \leqq n + r - 1$. Máme tedy $r - 1$ přirozených čísel $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{r-1}$, o nichž platí $1 \leqq y_i \leqq n + r - 1$.

Ke každé r-tici celých nezáporných čísel $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r$ umíme tedy přiřadit jedinou $(r-1)$-tici $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{r-1}$ a obráceně lze ke každé $(r-1)$-tici $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{r-1}$, jež splňuje vztah

$$1 \leqq y_1 < y_2 < y_3 < \ldots < y_{r-1} \leqq n + r - 1,$$

najít příslušná čísla $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r$. Otázka se tedy převádí na tento úkol: Máme určit, kolika způsoby lze vybrat $r - 1$ různých přirozených čísel z celkového počtu $n + r - 1$ daných přirozených čísel. Vidíme, že jde o kombinace $(r-1)$-ní třídy z $n + r - 1$ prvků, takže hledaný počet je vyjádřen kombinačním číslem

$$\binom{n+r-1}{r-1}.$$

Odpověď. Daná neurčitá rovnice má $\binom{n+r-1}{r-1}$ řešení.*)

Přistupme nyní k definici kombinací s opakováním. *Kombinacemi n-té třídy* z r různých prvků *s opakováním* nazýváme skupiny po n prvcích z daných r prvků (bez zřetele k uspořádání ve skupině), v nichž se každý prvek může opakovat až n-krát. O počtu kombinací s opakováním se dozvíme v dalším příkladě.

Příklad 24. Jsou dána dvě přirozená čísla n, r. Určete počet kombinací n-té třídy z r různých prvků s opakováním.

Řešení. Daných r prvků označme po řadě $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Každou kombinaci s opakováním lze úplně popsat tím,

*) Pro $r = 3$, $n = 3$ dostáváme $\binom{3+3-1}{3-1} = 10$, což souhlasí s výsledkem dosaženým v příkladě 22.

že uvedeme, kolikrát se v ní vyskytuje prvek a_i (pro $i = 1, 2, \ldots, r$). Označíme-li x_i násobnost prvku a_i v uvažované kombinaci s opakováním, je r-tice $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ tvořena celými nezápornými čísly a platí

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_r = n.$$

Tím je otázka převedena na řešení neurčité rovnice, kterou jsme se zabývali v předcházejícím příkladě.

Odpověď. Počet kombinací n-té třídy z r různých prvků s opakováním je $\binom{n+r-1}{r-1}$.

Úlohy

14. Kolika způsoby je možno na čtvercové šachovnici s 64 poli vybrat tři pole tak, aby všechna neležela v témž sloupci?

15. Je dán vypuklý n-úhelník, jehož žádné tři úhlopříčky nemají společný vnitřní bod. V tomto n-úhelníku jsou sestrojeny všechny úhlopříčky. Kolik průsečíků úhlopříček tím vznikne?

16. Je dán pravidelný dvanáctistěn (dódekaedr). Každé tři jeho různé vrcholy určují jednu rovinu. Kolik rovin je celkem určeno, uvažujeme-li všech 20 vrcholů? Kolik z těchto rovin prochází vnitřkem dódekaedru?

17. V prostoru jsou dány dvě mimoběžky a, b. Na přímce a je dáno m různých bodů $A_1, A_2, \ldots, A_m$ a na přímce b je dáno n různých bodů $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Určete počet všech čtyřstěnů, jejichž všechny vrcholy leží na přímkách a, b, a to v bodech A_i, B_j.