1. kapitola

FAKTORIÁLY A PERMUTACE

V mnoha kombinatorických úlohách a také v teorii čísel se vyskytuje pojem faktoriálu, o kterém jsme se učili ve škole. Zopakujeme si tedy úvodem tento pojem. Je-li dáno přirozené číslo $n > 1$, pak součin

$$1 . 2 . 3 . \ldots . (n-1) . n$$

zapisujeme stručně $n!$ a čteme *n faktoriál*. Tuto definici rozšiřujeme i na případ $n=0$ a $n=1$ a klademe $0!=1$, $1!=1$. Faktoriály čísel pro malé hodnoty n lze sestavit do této tabulky:*)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040	40 320	362 880	3 628 800

Začněme několika příklady, ve kterých si můžeme procvičit některé vlastnosti faktoriálů.

Příklad 1. Rozhodněte, které ze dvou čísel $500!+503!$ a $501!+502!$ je větší.

Řešení. Protože se v příkladě vyskytují příliš velká čísla, nemůžeme se o výsledku přesvědčit přímým vý-

*) Podrobnější přehled faktoriálů najde čtenář ve většině matematických tabulek. Tak např. ve Valouchových „Pětimístných tabulkách logaritmických" jsou uvedeny faktoriály přirozených čísel až do 30!; najdeme tu též rozklady na prvočinitele těchto faktoriálů a dále logaritmy faktoriálů až do log 200!.

počtem. Poslouží nám však tato úvaha: První z čísel vyjádříme ve tvaru

$$500!+503!=500!\,.\,(1+501\,.\,502\,.\,503),$$

druhé ve tvaru

$$501!+502!=500!\,.\,(501+501\,.\,502).$$

Stačí tedy porovnávat čísla

$$x=1+501\,.\,502\,.\,503 \quad \text{a} \quad y=501+501\,.\,502.$$

Ani zde však nemusíme provádět numerický výpočet do konce, nýbrž v y vytkneme 501, takže máme $y=501\,.\,(1+502)=501\,.\,503$. Dále je zřejmě $x>501\,.\,502\,.\,503$. Součin $501\,.\,502\,.\,503$ je však zajisté větší než $501\,.\,503$, takže je $x>y$.

Odpověď. Číslo $500!+503!$ je větší než číslo $501!+502!$.

Příklad 2. Sečtěte

$$\frac{(n-1)!}{(n+1)!}+\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!},$$

kde n je dané přirozené číslo.

Řešení. První zlomek můžeme zkrátit číslem $(n-1)!$, druhý číslem $(2n+1)!$. Dostáváme tak součet

$$\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{2(n+1)(2n+3)}.$$

Můžeme ještě uvést na společného jmenovatele, jímž je $2n(n+1)(2n+3)$. Dostaneme pak po úpravě výsledek

$$\frac{5n+6}{2n(n+1)(2n+3)}.$$

Další dva příklady patří do číselné teorie; i v nich se pracuje s faktoriálem. O příkladě 3 bude ještě zmínka v pozdějších našich úvahách.

Příklad 3. Kolika nulami (v desítkové soustavě) končí číslo 300!.

Řešení. Číslo 300! je součinem všech přirozených čísel od 1 do 300. Všimněme si zde těch činitelů, které jsou dělitelné pěti. Jsou to čísla 5, 10, 15, 20, ..., 295, 300. Těchto čísel je zřejmě 60. Musíme si však uvědomit, že mezi těmito uvažovanými čísly byla zahrnuta také čísla 25, 50, 75, ..., 275, 300, z nichž každé je dělitelné číslem 5^2. Tato skupina čísel obsahuje zřejmě 12 prvků. Konečně je nutno uvážit, že jsou zde čísla 125 a 250, jež jsou dělitelná číslem 5^3.

Celkem jsme tedy zjistili, že číslo 300! je dělitelné mocninou $5^{60+12+2}$, tj. 5^{74}. Z naší úvahy též vyplývá, že 300! není dělitelné mocninou 5^{75}. Polovina z čísel 1, 2, 3, ..., 300 je sudých, takže 300! je jistě dělitelné mocninou 2^{150}. Z toho vyplývá, že 300! je dělitelné mocninou 10^{74}, avšak není dělitelné mocninou 10^{75}.

Odpověď. Číslo 300! končí 74 nulami.

Příklad 4. Ukažte, že číslo $18!+1$ je dělitelné číslem 23.

Řešení. Máme-li po ruce vhodné tabulky, můžeme v nich vyhledat, že platí

$$18! = 6\,402\,373\,705\,728\,000.$$

Pak budeme dělit

$$6\,402\,373\,705\,728\,001 : 23.$$

Čtenář vidí, že tato cesta pro důkaz našeho tvrzení je dosti pracná, i když jsme většinu námahy „přenechali" tabulkám. Nemáme-li po ruce příslušné tabulky, musíme hledat jiný způsob k řešení. Ukážeme si, jak lze postupovat v tomto případě.

Zřejmě je $4! = 24 = 23 + 1$
a dále*)

$$6! = (4!) \,.\, 30 = (23+1) \,.\, (23+7) = 23^2 + 8 \,.\, 23 + 7 = 23a + 7.$$

Podobně počítáme dále

$$\begin{aligned}
8! &= (6!) \,.\, 56 = (23a+7) \,.\, (23 \,.\, 2 + 10) = 23b + 1,\\
10! &= (8!) \,.\, 90 = (23b+1) \,.\, (23 \,.\, 3 + 21) = 23c + 21,\\
12! &= (10!) \,.\, 132 = (23c+21) \,.\, (23 \,.\, 5 + 17) = 23d + 12,\\
14! &= (12!) \,.\, 182 = (23d+12) \,.\, (23 \,.\, 7 + 21) = 23e + 22,\\
16! &= (14!) \,.\, 240 = (23e+22) \,.\, (23 \,.\, 10 + 10) = 23f + 13,\\
18! &= (16!) \,.\, 306 = (23f+13) \,.\, (23 \,.\, 13 + 7) = 23g + 22.
\end{aligned}$$

Závěrem tedy nacházíme

$$18! + 1 = 23g + 23 = 23(g+1),$$

čímž je prokázáno, že číslo $18! + 1$ je dělitelné číslem 23.

Otázka, se kterou jsme se setkali v příkladě 4, souvisí s tzv. Wilsonovou větou.**): *Číslo* $(p-1)! + 1$ *je dělitelné číslem* p *právě tehdy, je-li* p *prvočíslo*. Důkaz této věty zde nebudeme provádět, neboť je dosti obtížný a převyšuje rámec této knížky. Všimněme si však, který důsledek plyne z Wilsonovy věty pro číslo $18! + 1$. Položíme $p = 19$ (což je prvočíslo) a vidíme, že číslo $18! + 1$ je dělitelné číslem 19. Připojíme-li to k výsledku známému z příkladu 4, máme: Číslo $18! + 1$ je dělitelné součinem $19 \,.\, 23$ čili číslem 437.

Zopakujme si nyní definici permutace, známou ze školy. *Permutace* z n různých prvků jsou skupiny, které vzniknou záměnou pořadí prvků množiny, která obsahuje n různých prvků. Jejich počet se obvykle označuje $P(n)$. Dá se dokázat, že počet permutací z n prvků je dán

*) Písmena $a, b, \ldots, g$ v další úvaze znamenají vhodná přirozená čísla.

**) Název této věty nám připomíná jméno Johna Wilsona (1741—1793).

vzorcem $P(n)=n!$. Vyřešíme si dva příklady o permutacích.

Příklad 5. Jsou dána přirozená čísla $1, 2, 3, \ldots, m-1, m$. Kolik můžeme z nich sestavit permutací takových, že lichá čísla zůstávají na místech lichých*) a sudá na místech sudých?

Řešení. Počet všech uvažovaných permutací označme $\overline{P}(m)$. Budeme rozlišovat dva případy. Nejprve nechť je m sudé, v druhém případě liché.

a) Je-li $m=2k$, pak máme k lichých čísel $1, 3, 5, \ldots, 2k-1$ a také k sudých čísel $2, 4, 6, \ldots, 2k$. Nejprve uvažujeme permutace sestavené z čísel lichých; těch je zřejmě $k!$. Na sudých místech mají být čísla sudá $2, 4, 6, \ldots, 2k$, jichž je také k. Z nich lze tedy sestavit rovněž $k!$ permutací. Pro celkový počet permutací $\overline{P}(m)$ tedy máme $\overline{P}(m)=k!\,.\,k!=(k!)^2$.

b) Je-li $m=2k-1$, pak existuje opět k lichých čísel $1, 3, 5, \ldots, 2k-1$; z nich můžeme sestavit $k!$ permutací. Sudých čísel $2, 4, 6, \ldots, 2k-2$ je pouze $k-1$, takže máme $(k-1)!$ permutací. Pro $\overline{P}(m)$ tedy vychází $\overline{P}(m)=k!\,.\,(k-1)!$.

Odpověď. Je-li m sudé, potom platí

$$\overline{P}(m)=\left(\left(\frac{m}{2}\right)!\right)^2;$$

je-li m liché, je

$$\overline{P}(m)=\left(\frac{m+1}{2}\right)!\,.\left(\frac{m-1}{2}\right)!\,.$$

Čtenář si může uvědomit, že ze vzorce $P(m)=m!$

*) *Lichým místem* v permutaci $a_1, a_2, \ldots, a_m$ rozumíme to místo, jež přísluší prvku s lichým indexem. Obdobně lze definovat *místo sudé.*

a ze dvou vzorců právě odvozených plynou tyto nerovnosti:

$$m! > \left(\left(\frac{m}{2}\right)!\right)^2 \quad \text{pro } m \text{ sudé;}$$

$$m! \geqq \left(\frac{m+1}{2}\right)! \, . \left(\frac{m-1}{2}\right)! \quad \text{pro } m \text{ liché.*)}$$

Příklad 6. V rovině je dán vypuklý n-úhelník $A_1A_2A_3 \dots A_n$ (kde $n \geqq 4$) a jsou sestrojeny všechny jeho úhlopříčky. Kolika způsoby můžeme projít všechny vrcholy n-úhelníka tak, že vyjdeme z A_1, postupujeme po stranách nebo úhlopříčkách, každým z vrcholů A_2, A_3, ..., A_{n-1} projdeme právě jednou a skončíme ve vrcholu A_n.

Řešení. Tvoříme vlastně skupiny z n prvků (vrcholů mnohoúhelníka), přičemž A_1 se vždy vyskytne jako první a A_n jako poslední. Dva prvky jsou tedy pevné, kdežto zbývající $n-2$ prvky mění své pořadí. Hledaný počet je tedy $P(n-2) = (n-2)!$.

Často se vyskytuje případ, že se mezi danými n prvky jeden opakuje r-krát a druhý s-krát. Počet různých skupin (permutací), které se liší pořadím prvků, je pak — jak víme ze školy — dán vzorcem

$$P(n; r, s) = \frac{n!}{r!s!} \, .$$

Připomeneme si tuto problematiku na jednom příkladě.

Příklad 7. Určete počet všech čtyřciferných čísel dělitelných devíti, která lze napsat užitím číslic 0, 1, 2, 5, 7. Přitom se mohou číslice v čísle i opakovat.

*) Rozmyslete si sami, proč v první z těchto nerovností je znaménko $>$, kdežto v druhé $\geqq$.

Řešení. Vzpomeneme si nejprve na znak dělitelnosti číslem 9. Číslo (v desítkové soustavě) je dělitelné devíti právě tehdy, je-li jeho ciferný součet dělitelný devíti. V našem případě přicházejí v úvahu pouze ciferné součty 9 nebo 18, neboť ciferný součet 27 nelze pomocí daných číslic vytvořit (a samozřejmě nemůžeme vytvořit ani součty 36, 45, ...).

Kolika způsoby lze v našem případě vytvořit součet 9? Nejprve nebudeme hledět na pořadí a v zápisech uspořádáme jednotlivé sčítance podle velikosti třeba „sestupně“. Platí

$$9=7+2+0+0, \quad 9=7+1+1+0,$$

$$9=5+2+2+0, \quad 9=5+2+1+1.$$

Podobně pro součet 18 najdeme

$$18=7+7+2+2, \quad 18=7+5+5+1.$$

Vraťme se tedy k zápisu $9=7+2+0+0$. Kolik čtyřciferných čísel lze napsat, máme-li užít číslic 7, 2, 0, 0? Jde zřejmě o permutace ze čtyř prvků, přičemž se jeden prvek opakuje dvakrát. Počet těchto permutací je určen číslem

$$\frac{4!}{2!} = 12.$$

Z tohoto počtu ovšem musíme vyloučit čísla, která mají na prvním místě (zleva) číslici 0. Kolik je těchto případů? Tvoříme permutace ze zbývajících tří prvků 7, 2, 0 — a těchto permutací je $3!=6$. Zápisu $9=7+2+0+0$ odpovídá tedy $12-6=6$ případů.

Podobně zápisu $9=7+1+1+0$ odpovídá počet

$$\frac{4!}{2!}-\frac{3!}{2!}=12-3=9.$$

Stejný výsledek dostaneme zřejmě pro zápis $9=5+2+2+0$.

Součtu $9=5+2+1+1$ odpovídá počet

$$\frac{4!}{2!}=12.$$

Pro ciferný součet 9 jsme tedy našli celkem 36 případů.

Nyní budeme uvažovat o ciferném součtu 18. Vyjádření $18=7+7+2+2$ odpovídají permutace ze čtyř prvků, přičemž jeden prvek se opakuje dvakrát a další také dvakrát. Jak známo, je počet těchto permutací roven číslu

$$\frac{4!}{2!\,.\,2!}=6.$$

Konečně zápisu $18=7+5+5+1$ odpovídá $\frac{4!}{2!}=12$ případů. Pro ciferný součet 18 jsme tedy našli celkem 18 případů.

Odpověď. Z daných číslic lze celkem sestavit 54 čtyřciferných čísel dělitelných devíti.

Obrátíme se nyní k obecnějšímu pojmu — k variacím. Dejme tomu, že jsou dána dvě přirozená čísla k, n, o nichž platí $1 \leqq k \leqq n$. *Variace k-té třídy* z n různých prvků jsou skupiny po k prvcích, vybrané z množiny obsahující n prvků tak, že každé dvě skupiny, které se liší pořadím prvků, pokládáme za různé. Počet variací k-té třídy z n prvků se obvykle označuje $V_k(n)$. Dá se dokázat, že pro $k > 1$ platí

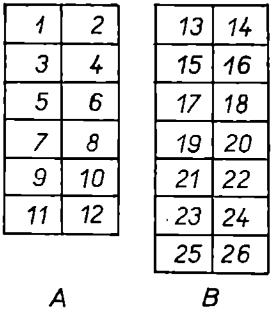
$$V_k(n)=n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1),$$

a pro $k=1$ je $V_1(n)=n$. To lze psát pomocí faktoriálů též takto

$$V_k(n)=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

Ze školy víme, že permutace z n prvků jsou zvláštním případem variací (dostaneme je pro $k=n$). O variacích si nyní rozřešíme jeden příklad.

Příklad 8. Ve třídě jsou 24 žáci a 26 míst (viz obr. 1). Kolika způsoby je možno sestavit zasedací pořádek?



Obr. 1.

Řešení. Představme si nejprve, že jsou jednotlivá místa ve třídě očíslována tak, jak je to uvedeno na obr. 1. Máme-li nyní rozesadit 24 žáky, tvoříme vlastně skupiny po 24 prvcích z 26 prvků, přičemž záleží na pořadí. Tyto skupiny jsou tedy variace 24. třídy z 26 prvků a je jich

$$V_{24}(26)=26 \,.\, 25 \,.\, 24 \,.\, \ldots \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3=\frac{26!}{2!}\cdot$$

Přistupme nyní k numerickému výpočtu. Podle Valouchových „Pětimístných tabulek logaritmických“ platí

$$26!=403\,291\,461\,126\,605\,635\,584\,000\,000,$$

takže pro hledaný počet máme výsledek

$$201\,645\,730\,563\,302\,817\,792\,000\,000.$$

Tento paragraf skončíme příkladem trochu jiného druhu. Budeme se zabývat jednou rovnicí, ve které za neznámé x, y, z, t připouštíme jen přirozená čísla. Takováto úloha se v teorii čísel — jak mnozí čtenáři jistě vědí — nazývá neurčitá (diofantská) rovnice.*) Příklad 9 je trochu myšlenkově náročnější a proto doporučujeme, abyste si řešení dobře promysleli.

Příklad 9. Je dána rovnice

$$x!\,.\,y!\,.\,z! = t!. \tag{1}$$

Ukažte, že existuje nekonečně mnoho čtveřic přirozených čísel x, y, z, t větších než 1 takových, že vyhovují rovnici (1).

Řešení. Zvolme libovolné přirozené číslo $n > 2$**) a položme $x = n$, $y = n! - 1$, $z = (n!)! - 1$. Součin $x!\,.\,y!$ lze pak psát jako

$$n!\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,\ldots\,.\,(n!-2)(n!-1) = (n!)!.$$

Podobně pro $x!\,y!\,z!$ máme

$$[(n!)!]\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,\ldots\,.\,[(n!)!-2]\,.\,[(n!)!-1] = [(n!)!]!.$$

Pro takto zvolenou trojici přirozených čísel x, y, z vychází tedy $t = (n!)!$. Protože takovou konstrukci lze provést pro libovolné přirozené číslo $n > 2$, je vidět, že rovnici (1) skutečně vyhovuje nekonečně mnoho čtveřic přirozených čísel větších než 1.

Zamysleme se ještě nad předcházejícím příkladem. V řešení jsme si ukázali, že existuje nekonečně mnoho

*) Označení diofantská rovnice nám připomíná Diofanta z Alexandrie, který žil okolo r. 275 n. l. Někdy se neznámé v diofantské rovnici omezují též na čísla celá, jindy na celá nezáporná apod.

**) Z další úvahy pochopíme, proč se zde omezujeme na případ $n > 2$. Je to proto, aby v úvaze vystupovala jen přirozená čísla větší než 1.

čtveřic požadované vlastnosti, ale nezkoumali jsme, zda postupem uvedeným v předcházejících řádcích jsou vyčerpána všechna řešení rovnice (1). Je samozřejmé, že jsme mohli začít tím, že položíme např. $y=n$, $x=n!-1$, $z=(n!)!-1$, což znamená vlastně záměnu písmen (x, y, z) v předcházející konstrukci. Kdybychom měli hledat všechny čtveřice přirozených čísel x, y, z, t, které vyhovují rovnici (1), byl by to jistě mnohem složitější a obtížnější úkol než to, co bylo obsahem příkladu 9. Pokud je nám známo, nebyla tato otázka dosud úplně vyřešena.

Úlohy

1. Rozhodněte, které ze dvou čísel $500!.503!$ a $501!.502!$ je větší.

2. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

a) $n!.(n+3)!>(n+1)!.\,(n+2)!$;

b) $n!+(n+3)!>(n+1)!+(n+2)!$.

3. Dokažte správnost těchto vzorců:

a) $(1!).1+(2!).2+(3!).3+\ldots+(n!).n=(n+1)!-1$;

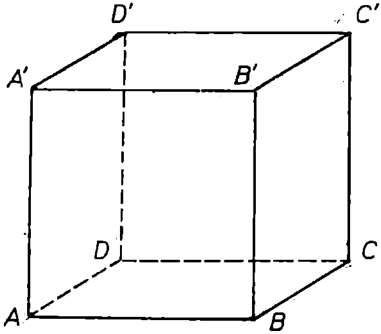
b) $\frac{0}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}=1-\frac{1}{n!}$.

4. Mám sedm knih českých a pět slovenských. Kolika způsoby je mohu postavit do řady na poličku tak, že nejprve jsou zařazeny všechny knihy české a pak všechny slovenské.

5. Vrcholy vypuklého n-úhelníku z příkladu 6 na str. 10

máme projít po stranách a úhlopříčkách tak, že začneme v A_1, každý z vrcholů $A_2, A_3, \ldots, A_n$ projdeme právě jednou a skončíme v A_1. Kolika způsoby je to možné?

6. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$ (viz obr. 2). Rozhodněte, zda můžeme projít její vrcholy tak, že vyjdeme



Obr. 2.

z A, jdeme po hranách krychle, každý z vrcholů B, D, A', B', C', D' projdeme právě jednou a skončíme ve vrcholu C.

7. Je dána rovnice

$$x!.y!.z!.t!=u!.$$

Ukažte, že existuje nekonečně mnoho pětic přirozených čísel x, y, z, t, u větších než 1 takových, že vyhovují dané rovnici.

8. Je dána rovnice

$$x!+y!=z!.$$

Určete všechny trojice přirozených čísel x, y, z, jež vyhovují dané rovnici.

9. Určete nejmenší přirozené číslo x, které má tuto vlastnost: Není možno najít žádné přirozené číslo n tak, že $n!$ má v desítkové soustavě právě x číslic.