DODATEK

V teorii konvexních útvarů se pracuje ustavičně s některými pojmy, které se týkají tzv. *uspořádání bodů na přímce, v rovině i v prostoru*. Základním vztahem uspořádání je vztah „*mezi*"; říkáme, že *bod C leží mezi body A, B* (nebo *B*, *A*), když náleží vnitřku úsečky s krajními body *A*, *B*. Táž skutečnost se někdy také vyjadřuje rčením, že *bod C odděluje body A, B*.

Daná přímka *m* je rozdělena libovolným svým bodem *P* ve dvě části (množiny bodů), které nazýváme *polopřímkami*, a to polopřímkami navzájem *opačnými*. Bod *P* nazýváme *počátkem polopřímky* a počítáme ho k oběma opačným polopřímkám. Leží-li tedy např. bod *C* mezi body *A*, *B*, jsou polopřímky *CA*, *CB* opačné.

Rovina je rozdělena libovolnou svou přímkou *p* ve dvě části, které nazýváme *polorovinami*, a to polorovinami navzájem *opačnými*. Přímku *p* nazýváme jejich *hranicí* a počítáme ji k oběma opačným polorovinám. Jak poznáme, zda dva body *X*, *Y* roviny, ležící mimo přímku *p*, náležejí téže polorovině s hranicí *p* nebo polorovinám opačným? Neleží-li mezi body *X*, *Y* žádný bod přímky *p*, jsou *X*, *Y* body téže poloroviny; leží-li mezi nimi bod přímky *p*, jsou to body polorovin navzájem opačných. Leží-li mezi body *X*, *Y* nějaký bod přímky *p* (na níž body *X*, *Y* neleží), říkáme stručně, že *přímka p odděluje body X*, *Y*. To je jen jiné vyjádření situace, že body *X*, *Y* náležejí opačným polorovinám s hranicí *p*.

Je-li dán trojúhelník ABC a přímka p jeho roviny, která neprochází žádným jeho vrcholem, ale odděluje např. body A, B, pak přímka p odděluje buď body A, C nebo body B, C. Tato, z názoru zcela zřejmá věta má v geometrii veliký význam a nazývá se větou PASCHOVOU.

Situace v prostoru je obdobná jako v rovině. Rovinou ϱ je prostor rozdělen ve dvě části, které nazýváme *poloprostory*, a to poloprostory navzájem *opačnými*. Rovinu ϱ nazýváme jejich *hraniční rovinou* a počítáme ji k oběma poloprostorům. Čtenář si dovede jistě sám vysvětlit rčení, že *rovina ϱ odděluje body X, Y* a dovede také vyslovit podmínku pro to, aby dva body X, Y ležící mimo rovinu ϱ náležely témuž poloprostoru s hraniční rovinou ϱ nebo opačným poloprostorům s touž hraniční rovinou.

V několika úlohách naší brožury se hovoří o *čtyřúhelníku*. Čtyřúhelník — jako všecky mnohoúhelníky — skládáme obvykle z nepřekrývajících se trojúhelníků. Trojúhelník XYZ je množina všech bodů, které jsou společné polorovinám XYZ, YZX, ZXY: neboli je to průnik těchto polorovin (viz příklad 1). Podle tohoto vytvoření patří k trojúhelníku i všecky jeho strany, tj. jeho obvod. Říkáme, že dva trojúhelníky se nepřekrývají, když buď nemají žádný společný bod nebo když jejich společné body náležejí jen jejich obvodům.

Čtyřúhelník $ABCD$ je množina všech bodů dvou trojúhelníků ACB, ACD, které leží v opačných polorovinách s hranicí AC; přitom žádné tři z bodů A, B, C, D nesmějí ležet v přímce. Oba vytvořující trojúhelníky ACB, ACD se podle předchozího nepřekrývají; obvykle říkáme, že čtyřúhelník $ABCD$ (záleží na pořádku vrcholů!) je sjednocením nepřekrývajících se trojúhelníků ACB, ACD. Protože přímka AC odděluje body B, D, leží mezi nimi bod Q přímky AC. A nyní mohou nastat dvě situace:

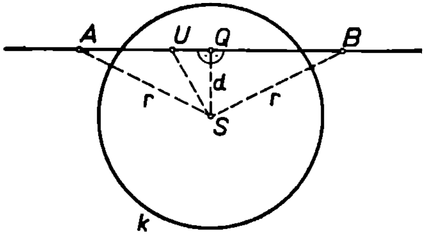
a) buď bod Q leží mezi body A, C; b) nebo bod Q leží mimo úsečku AC. Načrtněte si příslušné obrázky a uvědomte si, proč nemůže být $Q \equiv A$ nebo $Q \equiv C$.

V prvním případě říkáme, že *se úhlopříčky* AC, BD *protínají v bodě* Q; dá se dokázat, že v tomto případě je čtyřúhelník $ABCD$ *konvexní* útvar. V druhém případě dostaneme čtyřúhelník, jaký je např. na obr. 1; je to útvar *nekonvexní.*

Věta II na str. 21 byla označena názvem DEDEKINDŮV *axiom spojitosti* s upozorněním, že jde o jednu z nejdůležitějších vět matematiky. Její význam je v tom, že mnoho geometrických poznatků, zdánlivě velmi různorodých, lze z DEDEKINDOVA axiomu odvodit deduktivně. To činíme, i když mnohé z těchto poznatků se zdají zřejmé z názoru, neboť jejich odvození nám ukazuje jejich vzájemnou souvislost a souvislost s jinými matematickými disciplínami. Z DEDEKINDOVA axiomu spojitosti lze odvodit např. větu, že dvě kružnice, jejichž vzdálenost středů je menší než součet obou poloměrů a větší než rozdíl obou poloměrů, se protínají ve dvou bodech. Z axiomu spojitosti lze odvodit větu, že každé kladné číslo je při pevně zvolené jednotce délky velikostí některé úsečky. Z axiomu spojitosti lze odvodit větu, že každé dva mnohoúhelníky téhož obsahu se dají rozložit v konečný počet trojúhelníků po dvou shodných, a mnohé jiné věty. Z axiomu DEDEKINDOVA lze však také odvodit větu VIII i větu, že každý omezený dvojrozměrný konvexní útvar lze rozdělit dvěma navzájem kolmými přímkami ve čtyři části téhož obsahu a další.

Pro zvídavého čtenáře uvedeme na ukázku aspoň jedno odvození geometrické věty z DEDEKINDOVA axiomu spojitosti. Naznačíme důkaz věty: *Má-li přímka* p *od středu* S *kružnice* $k \equiv (S; r)$ *vzdálenost* $d < r$, *má s kružnicí dva navzájem různé společné body.*

Důkaz. Prochází-li přímka p středem S, není co dokazovat. Neprochází-li přímka p středem S, označíme Q patu kolmice spuštěné z bodu S na p; pak je $SQ = d < r$. Na obou polopřímkách vymezených na přímce p bodem Q sestrojíme body A, B tak, aby platilo $QA = QB = r$



Obr. 52

(viz obr. 52). Pak je $SA = SB > AQ = BQ = r$. Utvoříme množinu M všech bodů X přímky p, pro něž platí $SX \leqq r$. Do množiny M patří bod Q, ale nepatří body A, B. Snadno dokážeme, že množina M je konvexní útvar (pokuste se o to!); množina M náleží úsečce AB (proč?); je proto omezená. Množina M však obsahuje ještě další body mimo bod Q; tak např. sestrojíme-li na polopřímce QA bod U, pro který platí $QU = r - d$, je podle trojúhelníkové nerovnosti

$$SU < SQ + QU = d + (r - d) = r;$$

bod $U \neq Q$ náleží tedy také do množiny M.

Podle DEDEKINDOVA axiomu spojitosti je množina M jistá úsečka CD. Dá se dokázat nepřímým důkazem, že např. pro bod C neplatí ani nerovnost $SC > r$ ani nerovnost $SC < r$; je tedy $SC = r$, tj. bod C náleží kružnici k*). Stejný závěr dostaneme pro bod D. Protože přímka p nemůže mít s kružnicí více než dva společné body, je tím naše věta dokázána.

Důkazy vět pomocí axiomu spojitosti nejsou nijak jednoduché, i když jde o zdánlivě průzračné situace. Proto je pochopitelné, že se o axiomu spojitosti a o jeho důsledcích na střední škole nemluví.

*) Kdyby platilo např. $SC < r$, sestrojili bychom na polopřímce QC bod C' tak, aby bylo $QC' = QC + (r - SC)$. Podle trojúhelníkové nerovnosti bychom dostali z trojúhelníka SCC'

$$SC' < SC + CC' = SC + (QC' - QC) = r.$$

To znamená, že bod C' by náležel množině M; to je však nemožné, neboť bod C' leží mimo úsečku CD.