Konvexní útvary

Kapitola 6. Věta Hellyova a některé její důsledky

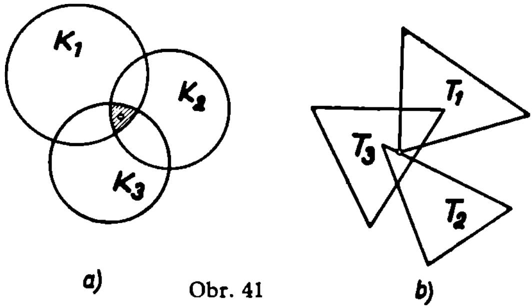
In: Jan Vyšín (author): Konvexní útvary. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1964. pp. 72–88.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403507

Kapitola 6.

VĚTA HELLYOVA A NĚKTERÉ JEJÍ DŮSLEDKY

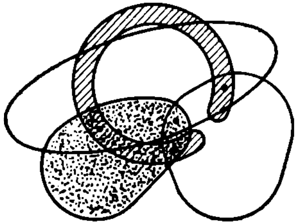
Úloha 47. a) Na obr. 41a jsou nakresleny tři kruhy K_1, K_2, K_3, které mají aspoň jeden společný bod (jejich společné body vyplňují vyšrafovanou část roviny). Pokuste se nakreslit čtvrtý kruh K_4 tak, aby průnik každé trojice kruhů K_1, K_2, K_4; K_1, K_3, K_4; K_2, K_3, K_4 obsahoval aspoň jeden bod, ale aby všechny čtyři kruhy neměly žádný společný bod.



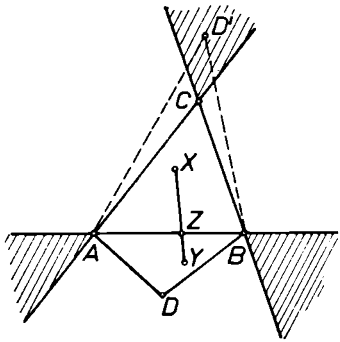
Obr. 41

b) Na obr. 41b jsou nakresleny tři trojúhelníky T_1, T_2, T_3, které mají (aspoň) jeden společný bod. Opakujte úlohu 47a pro trojúhelníky, tj. pokuste se nakreslit trojúhelník T_4, který by měl obdobné vlastnosti jako kruh K_4.

Pokusy z úloh 47a, b skončily nezdarem; stejně neúspěšné by byly obdobné pokusy, kdybychom kruhy nebo trojúhelníky nahradili libovolnými čtyřmi konvexními útvary. To v nás budí domněnku, že platí tato věta:



Obr. 42



Obr. 43

IX. *Jsou-li dány čtyři konvexní útvary v rovině, z nichž každé tři mají aspoň jeden společný bod, pak všecky čtyři útvary mají aspoň jeden společný bod.*

Věta IX, která vyjadřuje velmi důležitou vlastnost konvexních útvarů, se skutečně dá dokázat. Je to tzv. věta HELLYOVA, která se dá přenést na přímku, do prostoru, dá se zobecnit tak, že počet daných útvarů může být libovolný, po případě může být daných útvarů nekonečně mnoho. Věta HELLYOVA má značný dosah; to znamená, že s její pomocí lze odvodit řadu dalších zajímavých vlastností.

Obrázek 42 ukazuje, že předpoklad věty IX o konvexitě útvarů je nezbytný; vysvětlete to podrobněji.

Důkaz HELLYOVY věty je jednoduchý a používá jedné pomocné věty, kterou odvodíme v následujícím příkladu.

Příklad 23. Máme dokázat tuto větu: Jsou dány čtyři body v rovině, z nichž žádné tři neleží v přímce a žádný z nich nenáleží trojúhelníku určenému třemi zbývajícími. Pak tyto čtyři body jsou vrcholy konvexního čtyřúhelníka.

Řešení. Dané čtyři body označme A, B, C, D. Na obr. 43 jsou zakresleny body A, B, C a je tu vyznačeno 7 oblastí, na které dělí rovinu přímky AB, BC, CA. Bod D leží mimo přímky AB, BC, CA; proč?); Bod D nemůže ležet v žádné ze tří vyšrafovaných částí! jinak by např. bod C ležel v trojúhelníku ABD'. Leží-li bod D v některé ze zbývajících tří nevyšrafovaných částí, ovšem mimo trojúhelník ABC, pak spojením trojúhelníků ABC, ABD vznikne konvexní čtyřúhelník $ADBC$. Na obr. 43 je naznačena úsečka XY, jejíž krajní bod X leží uvnitř trojúhelníka ABC a krajní bod Y uvnitř trojúhelníka ABD. Tato úsečka obsahuje bod Z strany AB, neboť leží v (konvexním) úhlu $\sphericalangle\, ACB$. Obě úsečky XZ i YZ, a tedy i úsečka XY, náležejí čtyřúhelníku $ADBC$.

Příklad 24. Máme dokázat větu HELLYOVU.

Řešení. Označíme U_1, U_2, U_3, U_4 dané čtyři konvexní útvary. Dále označíme po řadě A_1, A_2, A_3, A_4 bod společný útvarům U_2, U_3, U_4, resp. U_1, U_3, U_4, resp. U_1, U_2, U_4, resp. U_1, U_2, U_3. Dále je třeba rozlišit tři případy:

a) Některé tři z bodů A_1, A_2, A_3, A_4, např. body A_1, A_2, A_3 leží v přímce.

b) Žádné tři z bodů A_1, A_2, A_3, A_4 neleží v přímce, ale některý z nich, např. A_4 náleží trojúhelníku $A_1A_2A_3$.

c) Žádné tři z bodů A_1, A_2, A_3, A_4 neleží v přímce a žádný z nich neleží v trojúhelníku daném zbývajícími třemi.

Uvědomte si, že případy a), b), c) vyčerpávají všecky možnosti a pokuste se ke každé sestrojit náčrtek. (Přitom vyjděte od bodů A_1, A_2, A_3, A_4 a pak nakreslete útvary U_1, U_2, U_3, U_4.)

Probereme nyní postupně všecky případy a), b), c). V případě a) nechť např. bod A_2 náleží úsečce A_1A_3. Oba body A_1, A_3 náleží průniku $U_2 \cap U_4$ (proč?); podle věty I náleží i bod A_2 průniku $U_2 \cap U_4$. Protože však bod A_2 náleží také průniku $U_1 \cap U_3$, náleží všem čtyřem útvarům.

V případě b) náležejí všecky tři body A_1, A_2, A_3 útvaru U_4, tj. i trojúhelník $A_1A_2A_3$ náleží útvaru U_4 (odůvodněte podrobně z definice konvexního útvaru!). Proto i bod A_4 trojúhelníka $A_1A_2A_3$ náleží útvaru U_4; mimoto však náleží A_4 průniku $U_1 \cap U_2 \cap U_3$. Bod A_4 tedy náleží všem čtyřem daným útvarům.

V případě c) jsou splněny předpoklady věty z příkladu 23; proto body A_1, A_2, A_3, A_4 jsou vrcholy konvexního čtyřúhelníka, např. v pořádku $A_1A_2A_3A_4$. Pak průsečík úhlopříček A_1A_3, A_2A_4 náleží jednak průniku $U_2 \cap U_4$ (protože náleží úsečce A_1A_3), jednak průniku $U_1 \cap U_3$ (protože náleží úsečce A_2A_4).

Tím je HELLYOVA věta úplně dokázána.

Na přímce je rozmanitost konvexních útvarů mnohem menší než je tomu v rovině; jsou to — víme jak — jen úsečka (nenulová či nulová, tj. pouhý bod) polopřímka a přímka. Zde lze dokázat HELLYOVU větu v tomto znění:

IX'. *Jsou-li dány tři konvexní útvary na přímce, z nichž každé dva mají aspoň jeden společný bod, pak všecky tři útvary mají aspoň jeden společný bod.*

Pro útvary v prostoru zní HELLYOVA věta takto:

IX″. *Je-li dáno pět konvexních útvarů v prostoru, z nichž každé čtyři mají aspoň jeden společný bod, pak všecky dané útvary mají aspoň jeden společný bod.*

Úloha 48.* a) Dokažte HELLYOVU úlohu pro útvary na přímce. (Stačí, dokážete-li ji pro úsečky nulové či nenulové.)
b) Pokuste se dokázat HELLYOVU větu pro útvary v prostoru. (Postup je obdobný k postupu v příkladu 24. Je však třeba rozlišit tyto případy: 1) čtyři z bodů $A_1, \ldots, A_5$, zavedených obdobně jako body $A_1, \ldots, A_4$ v příkladě 24, leží v rovině; 2) žádné čtyři z bodů $A_1, \ldots, A_5$ neleží v rovině, ale např. čtyřstěn $A_1A_2A_3A_4$ obsahuje bod A_5; 3) žádný ze čtyřstěnů určených čtyřmi z bodů $A_1, \ldots, A_5$ neobsahuje bod zbývající.)

Větu HELLYOVU (a to větu IX, IX′, IX″) lze indukcí rozšířit na libovolný počet konvexních útvarů.

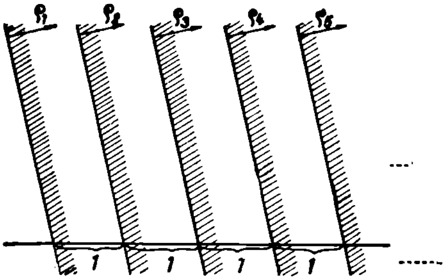
Příklad 25. Máme dokázat toto rozšíření věty HELLYOVY: Je-li dáno v rovině n konvexních útvarů ($n \geqq 4$), z nichž každé tři mají aspoň jeden společný bod, pak všecky útvary mají aspoň jeden společný bod.

Řešení. Větu dokážeme matematickou indukcí. Víme, že platí pro $n = 4$; předpokládejme, že platí pro jisté n a dokažme, že pak platí pro $n + 1$.

Nechť je tedy dáno $n + 1$ konvexních útvarů v rovině, označených $U_1, U_2, \ldots, U_n, U_{n+1}$, z nichž každé tři mají aspoň jeden společný bod. Vyšetřujeme n útvarů

$$U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}, U'_n = U_n \cap U_{n+1}; \qquad (39)$$

ty jsou vesměs konvexní (proč?) a každé tři z nich mají aspoň jeden společný bod. Skutečně, zvolíme-li např. trojici U_1, U_2, U_3, pak je tato podmínka splněna podle předpokladu věty. Zvolíme-li např. trojici U_1, U_2, U_n',



Obr. 44

pak užijeme první věty HELLYOVY: podle ní mají útvary U_1, U_2, U_n, U_{n+1} aspoň jeden společný bod (odůvodněte podrobně!) a tento bod náleží i útvaru $U'_n = U_n \cap U_{n+1}$.

Podle indukčního předpokladu mají útvary (39) aspoň jeden společný bod a ten náleží všem útvarům $U_1, U_2, \ldots, U_n, U_{n+1}$; tím je rozšíření HELLYOVY věty dokázáno.

Poznámka. Větu HELLYOVU lze rozšířit i na nekonečně mnoho konvexních útvarů v rovině; v tomto případě však je potřeba ještě požadovat, aby útvary byly *omezené*. Obr. 44 ukazuje nekonečně mnoho konvexních útvarů neomezených (jsou to poloroviny $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$), z nichž každé tři mají sice aspoň jeden společný bod, ale žádný bod není společný všem těmto polorovinám.

Příklad 26. V rovině je vyznačeno n bodů ($n \geqq 4$). Pokusy jsme zjistili, že každé tři z nich lze zakrýt korunovou mincí. Dokonce se nám podařilo zakrýt korunovou mincí všech n bodů zároveň. Máme zjistit, zda tato poslední skutečnost je náhodná, způsobená jen zvláštní polohou daných bodů, nebo zda se dá odvodit z výsledků pokusů.

Řešení. Výsledek pokusu se dá geometricky formulovat takto: v rovině je dáno n bodů, z nichž každé tři leží v kruhu o poloměru r. Máme zjistit, zda z toho vyplývá, že všech n bodů leží v jistém kruhu o témž poloměru r.

Kolem každého z daných bodů $A_1, A_2, \ldots, A_n$ opíšeme kruh o poloměru r. Tak dostaneme kruhy $\mathsf{K}_1, \mathsf{K}_2, \ldots, \mathsf{K}_n$. Existuje-li kruh K o poloměru r, který obsahuje všechny dané body, má jeho střed S od každého z daných bodů vzdálenost menší nebo rovnou číslu r, tj. střed S náleží všem kruhům $\mathsf{K}_1, \mathsf{K}_2, \ldots, \mathsf{K}_n$.

Existenci kruhu K, resp. jeho středu S zjistíme podle věty HELLYOVY. Zvolme libovolné tři z kruhů $\mathsf{K}_1, \mathsf{K}_2, \ldots, \mathsf{K}_n$, např. kruhy $\mathsf{K}_1, \mathsf{K}_2, \mathsf{K}_3$. Jejich středy A_1, A_2, A_3 leží v jistém kruhu K_{123} o středu S_{123} a poloměru r. Bod S_{123} má tedy od každého z bodů A_1, A_2, A_3 vzdálenost menší nebo rovnou r, proto náleží všem třem kruhům $\mathsf{K}_1, \mathsf{K}_2, \mathsf{K}_3$.

To znamená, že každé tři z kruhů $\mathsf{K}_1, \mathsf{K}_2, \ldots, \mathsf{K}_n$ mají aspoň jeden společný bod; tyto kruhy splňují tedy předpoklad věty HELLYOVY a tím je existence středu S zaručena.

Další důsledky věty HELLYOVY, které uvedeme bez odvození, jsou věta JUNGOVA a věta BLASCHKEOVA.

X. *Každý rovinný útvar konvexní či nekonvexní o průměru d se dá umístit do kruhu o poloměru* $\dfrac{d}{\sqrt{3}}$ (věta JUNGOVA).

XI. *Do každého omezeného konvexního útvaru v rovině, který má šířku s, lze umístit kruh o poloměru* $\frac{1}{2}s$ (věta BLASCHKEOVA).

Poznámky k obsahu vět X, XI.

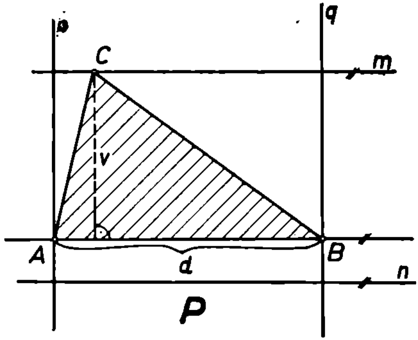
Je-li U rovinný útvar o průměru d, pak je patrné, že jej lze umístit do kruhu K o poloměru d. Stačí totiž zvolit za střed S kruhu K libovolný bod útvaru U; pro vzdálenost kteréhokoli bodu X útvaru U od bodu S platí podle úlohy 27 vztah $SX \leqq d$. Proto leží všechny body útvaru U v kruhu K.

Význam věty JUNGOVY spočívá v jejím tvrzení, že poloměr kruhu K lze (při vhodné volbě středu S) zmenšit na hodnotu $\frac{d}{\sqrt{3}} < d$.

Obdobně je tomu s větou BLASCHKEOVOU. Tato věta vyjadřuje výsledek, ke kterému se dospělo při hledání co největšího kruhu, který se dá umístit do omezeného konvexního útvaru šířky s. Ukázku hledání takového kruhu předvádí příklad 27.

Příklad 27. Je dán omezený konvexní rovinný útvar U šířky s. Máme zjistit, zda existuje kruh, jehož poloměr závisí jen na šířce s a o němž lze bezpečně tvrdit, že jej lze umístit do útvaru U.

Řešení. Označme d průměr útvaru U, p, q obě opěrné přímky, jejichž vzdálenost je d. Každá z přímek p, q obsahuje právě jeden hraniční bod; označme tyto hraniční body A, B; podle věty V víme, že je $AB \perp p$, $AB \perp q$, $AB = d$ (obr. 45). Veďme dále obě opěrné přímky m, n rovnoběžné s přímkou AB. Protože vzdálenost přímek m, n je aspoň s a protože pás roviny P jimi omezený obsahuje úsečku AB (která náleží útvaru U), má aspoň jedna z přímek m, n od přímky AB vzdálenost větší nebo rovnou $\frac{1}{2}s$; budiž to přímka m. Na přímce m leží v pásu P aspoň jeden hraniční bod C útvaru U.



Obr. 45

Tak jsme dostali trojúhelník ABC, jehož všechny vrcholy náležejí útvaru U; proto trojúhelník ABC i kruh K omezený kružnicí k jemu vepsanou náleží útvaru U. Odhadneme poloměr ϱ kružnice k; k tomu použijeme známého vzorce

$$\varrho = \frac{2\Delta}{o} \tag{40}$$

kde Δ je obsah trojúhelníka ABC, o délka jeho obvodu. Pro výšku v na stranu AB platí zřejmě

$$\frac{1}{2}s \leqq v \leqq s \leqq d; \tag{41}$$

obsah Δ tedy splňuje vztah

$$\Delta = \frac{1}{2} d v \geqq \frac{1}{4} d s. \tag{42}$$

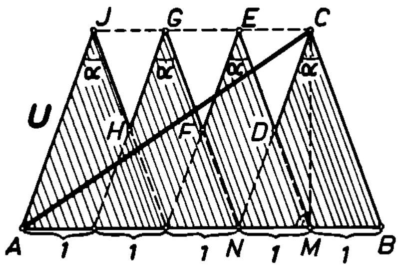
Protože vrchol C leží uvnitř pásu P, je velikost každé ze stran AC, BC nejvýše $\sqrt{d^2 + v^2}$, platí tedy podle (41)

$$o \leqq d + 2\sqrt{d^2 + v^2} \leqq d + 2\, d\sqrt{2} \leqq 3d\sqrt{2}. \tag{43}$$

Spojíme-li nerovnosti (42), (43) s formulí (40), dostaneme

$$\varrho \geqq \frac{1}{2} \frac{ds}{3d\sqrt{2}} = \frac{s\sqrt{2}}{12} \doteq 0{,}118\, s.$$

Tím je odhad pro poloměr ϱ kruhu K nalezen. Tento odhad je však příliš nízký; věta BLASCHKEOVA dává odhad příznivější $\varrho = \frac{1}{3}\, s \doteq 0{,}333\, s$.



Obr. 46

Větu JUNGOVU i BLASCHKEOVU budeme nyní ilustrovat několika příklady.

Příklad 28. Na obr. 46 je nakreslen nekonvexní devítiúhelník $ABCDEFGHJ$; jeho konstrukce je patrná z náčrtu:

$AB = 5$, $CE = EG = GJ = DF = FH = 1$, $\sphericalangle AJH = \sphericalangle HGF = \sphericalangle FED = \sphericalangle DCB = \alpha < 90°$. Máme stanovit úhel α tak, aby průměrem devítiúhelníka byla délka úsečky AC a máme ověřit větu JUNGOVU.

Řešení. Abychom zjistili průměr, musíme najít dvě rovnoběžné opěrné přímky, z nichž každá obsahuje jediný hraniční bod; spojnice těchto dvou hraničních bodů musí být kolmá k oběma opěrným přímkám (věta V). To je možné u daného devítiúhelníka U jen dvojím způsobem: příslušné hraniční body jsou buď A, B, nebo A, C (B, J). Vypočteme vzdálenost AC z pravoúhlého trojúhelníka AMC: platí $AM = 4$, $CM = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \alpha$, tj.

$$AC = \sqrt{16 + \operatorname{cotg}^2 \frac{1}{2} \alpha}. \tag{44}$$

Položíme podmínku $AC > AB$, tj.

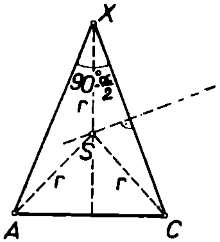
$$\sqrt{16 + \operatorname{cotg}^2 \frac{1}{2} \alpha} > 5;$$

odtud plyne po úpravě

$$\operatorname{cotg} \frac{1}{2} \alpha > 3,$$

tj. $\alpha < 18°26'$ (přibližně). Dále je $\sphericalangle ABC = 90° - \frac{1}{2}\alpha$, $\sphericalangle AJC = 90° + \frac{1}{2}\alpha$. To znamená, že všemi čtyřmi body A, B, C, J lze proložit kružnici k o středu S, která obsahuje uvnitř i body E, G, D, F, H, tj. celý devítiúhelník $ABCDEFGHJ$.

Vypočteme poloměr kružnice k z délky tětivy AC a obvodového úhlu velikosti $90° - \frac{1}{2}\alpha$. Z rovnoramenného trojúhelníka ACX se základnou AC a protějším úhlem velikosti $90° - \frac{1}{2}\alpha$ (viz obr. 47) vyplývá pro poloměr r kružnice k:



Obr. 47

$$r = \frac{\frac{1}{2}AC}{2\sin\left(45° - \frac{1}{4}\alpha\right)} \cdot \frac{1}{\cos\left(45° - \frac{1}{4}\alpha\right)} =$$

$$= \frac{AC}{2\sin\left(90° - \frac{1}{2}\alpha\right)} = \frac{AC}{2\cos\frac{1}{2}\alpha}. \qquad (45)$$

Střed S tedy sestrojíme jako vrchol rovnoramenného trojúhelníka ACS se základnou AC, ležícího v polorovině ACB; přitom známe ze vzorců (44), (45) délky všech stran tohoto trojúhelníka. Protože je $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha > 3$, je

$$\frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}\alpha} = 1 + \operatorname{cotg}^2\frac{1}{2}\alpha > 10, \qquad -\sin^2\frac{1}{2}\alpha > -\frac{1}{10},$$

$$\cos^2 \frac{1}{2}\alpha > \frac{9}{10}, \qquad \cos \frac{1}{2}\alpha > \frac{3}{\sqrt{10}}, \qquad \frac{1}{\cos \frac{1}{2}\alpha} < \frac{\sqrt{10}}{3}$$

tj. podle (45) platí

$$r = \frac{1}{2}\,\frac{AC}{\cos \frac{1}{2}\alpha} < AC\,\frac{1}{6}\sqrt{10} < AC\,\frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ *)}$$

což souhlasí s větou JUNGOVOU.

Úloha 49.* Na obr. 48 je nekonvexní útvar U omezený dvěma polokružnicemi k_1, k_2 a dvěma úsečkami BC, CS; je $AS = BS = 2BC = 1$. Zjistěte průměr útvaru U a ověřte větu JUNGOVU.

Úloha 50. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, jehož průměr je délka strany AB. Nad tětivou AB sestrojte kružnici o poloměru $\frac{AB}{\sqrt{3}}$ tak, aby její střed ležel v polorovině ABC a ověřte větu JUNGOVU. [Návod: zkoumejte velikost úhlů $\sphericalangle ACB$, $\sphericalangle ADB$.]

b) Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, jehož průměr je délka úhlopříčky AC. Ověřte větu JUNGOVU obdobně jako v úloze 50 a).

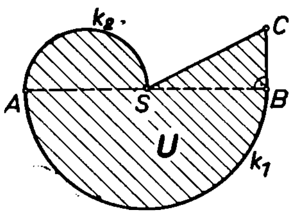
c) Pokuste se rozřešit obdobné úlohy pro nekonvexní čtyřúhelník.

Úloha 51. a) Ověřte větu JUNGOVU pro rovnostranný trojúhelník. Jaký význam má tato zcela jednoduchá úloha?

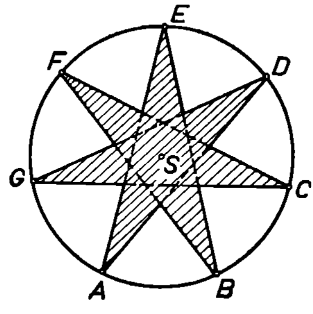
*) Platí $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{6}\sqrt{3} = \frac{1}{6}\sqrt{12}$; odtud plyne správnost poslední nerovnosti.

b) Na obr. 49 je nakreslen pravidelný hvězdicový sedmiúhelník. Zjistěte jeho průměr a ověřte větu JUNGOVU.

Poznámka. Je-li v kruhu o poloměru r umístěn (omezený) útvar (konvexní či nekonvexní), lze tvrdit, že pro jeho



Obr. 48



Obr. 49

průměr d platí nerovnost $d \leqq 2r$; to plyne z výsledku úlohy 28. Obráceně, když omezený útvar U v rovině má průměr d, pak zřejmě pro poloměr r nejmenšího kruhu K, do něhož se dá útvar U umístit, platí $r \geqq \frac{1}{2} d$; význam věty Jungovy je v tom, že omezuje poloměr r kruhu K shora.

Příklad 29. V devítiúhelníku U z příkladu 28 máme zvolit úhel α tak, aby šířkou útvaru U byla vzdálenost rovnoběžek AB, CJ. Máme zjistit, zda pro nekonvexní útvar U platí či neplatí tvrzení věty BLASCHKEOVY.

Řešení. Vzdálenost rovnoběžek AB, CJ je $\operatorname{cotg} \alpha$. Opěrné přímky útvaru U, které jsou navzájem rovnoběžné, procházejí buď vrcholy A, C (B, $\mathcal{J}$) nebo vrcholy A, B. V prvním případě se vzdálenost rovnoběžných opěrných přímek pohybuje mezi vzdálenostmi AC, CM, přičemž je vždy $AC > CM$, a mezi vzdáleností AC a výškou v trojúhelníku ABC na stranu BC. V druhém případě se vzdálenost rovnoběžných opěrných přímek pohybuje mezi výškou v trojúhelníka ABC na stranu BC a větší z obou vzdáleností AB, AC. Pro výšku v dostaneme z $\triangle ABC$

$$v = 5 \cos \frac{1}{2} a, \tag{46}$$

neboť $\sphericalangle ABC = 90° - \frac{1}{2} a$. Vzdálenost CM je tedy šířkou útvaru U jen v tom případě, když platí zároveň $CM \leqq AB$, $CM \leqq v$; protože je $v < AB$ (úhel $\sphericalangle ABC$ je ostrý), je vzdálenost CM šířkou útvaru U jen v tom případě, když platí $CM \leqq v$, neboli vzhledem k (46)

$$\operatorname{cotg} \frac{1}{2} a \leqq 5 \cos \frac{1}{2} a. \tag{47}$$

Úpravou nerovnosti (47) dostaneme nerovnost $\sin \frac{1}{2} a \geqq \frac{1}{5}$ a odtud z tabulek přibližně $a \geqq 23°04'$.

Největší kruh, který lze umístit do devítiúhelníka U, je omezen kružnicí k, opsanou rovnoramennému trojúhelníku DFN (obr. 50); pokuste se toto tvrzení dokázat. K výpočtu poloměru r kružnice k užijeme vzorce pro poloměr opsané kružnice

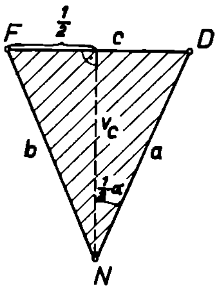
$$r = \frac{abc}{4\Delta}.$$

kde a, b, c jsou délky stran trojúhelníka, Δ jeho obsah.

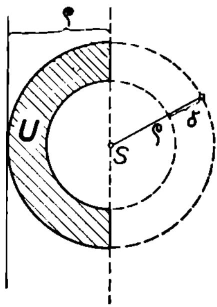
V našem případě (obr. 50) vypočteme $a = b = \dfrac{1}{2 \sin \frac{1}{2} \alpha}$,

$c = 1$, $v_c = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \alpha$; odtud dále $\Delta = \frac{1}{4} \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \alpha$ a konečně

$$r = \frac{1}{4 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2 \sin \alpha}. \tag{48}$$



Obr. 50



Obr. 51

Protože v našem příkladě je šířka útvaru U dána vzorcem $s = CM = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \alpha$, je $\frac{1}{3} s = \frac{1}{3} \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \alpha$. Podle (48) snadno zjistíme, že je $r > \frac{1}{3} s$, neboť tato nerovnost je ekvivalentní s nerovností $\frac{3}{2} > \cos^2 \frac{1}{2} \alpha$ a ta je splněna pro každé α.

Tvrzení věty BLASCHKEOVY tedy platí v tomto případě i pro nekonvexní útvar.

Úloha 52. Na obr. 51 je nekonvexní útvar U, který je vyťat z mezikruží šířky δ, a to průměrem větší kružnice; poloměr větší kružnice je ϱ. Zjistěte, za jaké podmínky neplatí pro útvar U tvrzení BLASCHKEOVY věty. [Vyjde $\delta < \frac{2}{3}\varrho$.]

Úloha 53.* Zjistěte, zda pro nekonvexní útvar U z úlohy 49 (obr. 48) platí tvrzení věty BLASCHKEOVY. Určete konvexní obal $\overline{U}$ útvaru U a ověřte si pro něj větu BLASCHKEOVU.

Úloha 54. Pomocí šířky trojúhelníka (úloha 26) ověřte, že pro trojúhelník platí věta BLASCHKEOVA. Jaký poloměr má největší kruh, který lze umístit do trojúhelníka? Vyslovte domněnku a odůvodněte ji.