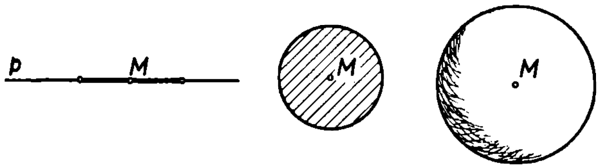
Kapitola 2.

HRANICE KONVEXNÍHO ÚTVARU

Výklad této kapitoly vychází z pojmu *okolí bodu*. Zabýváme-li se jen body jedné přímky p, rozumíme okolím bodu M jakoukoli úsečku ležící v přímce p (i s krajními



a) b) c)

Obr. 8

body), jejímž středem je bod M (obr. 8a). V planimetrii rozumíme okolím bodu M kruh (i s obvodem), jehož středem je bod M; ve stereometrii je pak okolí bodu M koule (i s povrchem), jejíž střed je opět bod M (obr. 8bc).

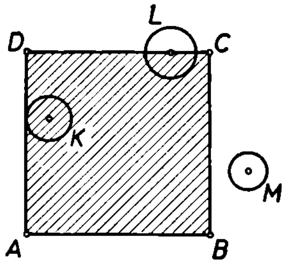
Okolí bodu je jedním z nejdůležitějších matematických pojmů; hned v dalším uvidíme jeho upotřebení.

Na obr. 9 je narýsován v rovině čtverec $ABCD$ a jsou tu vyznačeny tři body K, L, M. Bod K, který leží uvnitř čtverce, má tu vlastnost, že lze najít aspoň jedno jeho okolí, které obsahuje vesměs body čtverce $ABCD$. Bod L ležící na obvodě má tu vlastnost, že v každém jeho okolí jsou body čtverce a body, které čtverci nenáležejí. Bod M

je mimo čtverec; na obr. 9 je zakresleno okolí bodu M, které neobsahuje žádný bod čtverce.

Zavedeme tyto názvy:

Bod X je *vnitřním bodem útvaru* U, když aspoň jedno jeho okolí obsahuje vesměs body útvaru U.



Obr. 9

Bod Y je *hraničním bodem útvaru* U, když v každém jeho okolí jsou body útvaru i body, které útvaru U nenáležejí.

Bod Z je *vnějším bodem útvaru* U, když aspoň jedno jeho okolí neobsahuje žádný bod útvaru U.

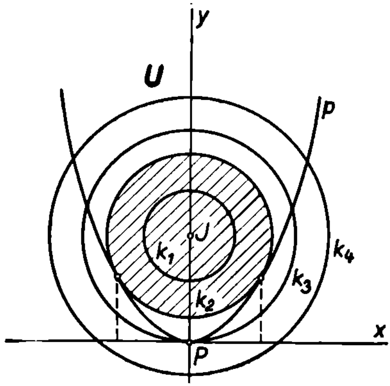
Ve všech těchto třech případech může být útvar konvexní nebo nekonvexní.

V našem příkladě z obr. 9 je tedy bod K vnitřním bodem čtverce, bod L jeho hraničním bodem, bod M jeho vnějším bodem.

Úloha 13. Udejte souřadnice (nejprve numericky) některého vnitřního bodu útvaru U z úlohy 5. Udejte jeho okolí, které obsahuje vesměs body útvaru U. Které body jsou hraniční pro tento útvar U?

Úloha 14.*Útvar z obr. 5 v úloze 4 má (podle názoru) vnitřní bod A. Sestrojte okolí bodu A s poloměrem co možná největším, které obsahuje vesměs body útvaru.

Příklad 6. Útvar U z příkladu 4 (část roviny omezená parabolou) má zřejmě vnitřní bod $J = [0, 2]$. Máme určit



Obr. 10

okolí bodu J s poloměrem co možná největším, které obsahuje vesměs body útvaru U.

Řešení. Názor napovídá, že toto okolí je omezeno kružnicí k, která má střed v bodě J a dotýká se paraboly p o rovnici $y = x^2$. Označme r poloměr kružnice k; její rovnice pak zní

$$x^2 + (y - 2)^2 = r^2. \tag{3}$$

Souřadnice x společných bodů kružnice k a paraboly p vypočteme, když do (3) dosadíme $y = x^2$; po úpravě vyjde rovnice

$$x^4 - 3x^2 + (4 - r^2) = 0. \tag{4}$$

Rovnice (4) je kvadratická v x^2; její diskriminant je $D = 4r^2 - 7$. Na obr. 10 jsou zakresleny čtyři kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 se středem J a poloměry $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{7}$, $r_3 = 2$, $r_4 = 3$. Kružnice k_2 má s parabolou p právě dva společné body (v nich se paraboly dotýká). Kruhy omezené kružnicemi k_3, k_4 obsahují i vnější body útvaru U. Poloměr kružnice k_2 byl určen z podmínky, aby rovnice (4) měla jediný kořen x^2, tj. aby o diskriminantu D rovnice (4) platilo $D = 0$. Kruh omezený kružnicí k_2 se zdá být podle názoru hledaným okolím. Zbývá dokázat, že všecky body tohoto okolí náležejí útvaru U; k tomu však postačí dokázat, že všecky body kružnice k_2 náležejí útvaru U.

Rovnici kružnice k_2 dostaneme z rovnice (3) pro $r = \frac{1}{2}\sqrt{7}$; po úpravě vyjde

$$x^2 + y^2 - 4y + \frac{9}{4} = 0. \tag{5}$$

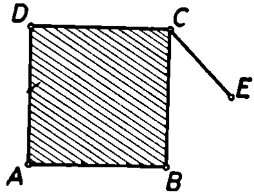
Vypočtěme pro body kružnice k_2 výraz $y - x^2$; pomocí (3) dostaneme

$$y - x^2 = y + y^2 - 4y + \frac{9}{4} = y^2 - 3y + \frac{9}{4} =$$
$$= (y - \frac{3}{2})^2 \geq 0.$$

To však znamená, že každý bod kružnice k_2 náleží útvaru U; tím je řešení úplně provedeno.

Množina všech hraničních bodů útvaru se nazývá jeho *hranice*. Tak např. hranice kruhu je jeho obvod, hranice vnitřku kruhu je také jeho obvod. Hranice trojúhelníka je jeho obvod, hranice vnitřku trojúhelníka je také jeho obvod. Hranice krychle je její povrch, hranice poloprostoru ϱA je rovina ϱ.

Útvar, který obsahuje svou hranici, se nazývá *uzavřený*. Je tedy např. kruh uzavřený útvar, naproti tomu vnitřek kruhu není uzavřený útvar. Vyslovíme si na tomto místě úmluvu, že nadále *všecky útvary, které budeme studovat, budou uzavřené;* to znamená, že k nim budeme počítat všecky jejich hraniční body.



Obr. 11

Úloha 15. Určete hranici útvaru U z obr. 11; útvar U se skládá z uzavřeného čtverce *ABCD* a úsečky *CE*. Je výsledek týž, pokládáme-li útvar U za část roviny nebo za část prostoru? [Uvědomte si, jak je definováno okolí v rovině a jak v prostoru.] Je útvar U konvexní?

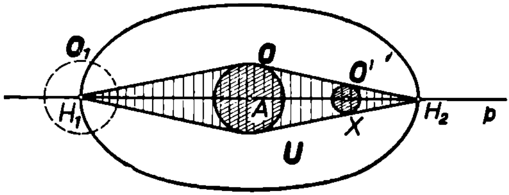
Hovořili jsme už o konvexních útvarech na přímce; mimo množinu o jednom bodě jsou to úsečka (s jedním nebo oběma krajními body, nebo vnitřek úsečky), polopřímka (s počátkem nebo bez něho) a sama přímka. Jiný konvexní útvar na přímce si nedovedeme představit. Tuto skutečnost vyslovujeme větou, která je jednou z nejdůležitějších vět geometrie:

II. *Omezený konvexní útvar na přímce, který má aspoň dva body, je úsečka*).*

*) Tato věta je geometrickým zněním tzv. *Dedekindova* axiomu spojitosti.

Z věty II vyplývá tato základní vlastnost konvexních útvarů:

III. *Přímka, která obsahuje aspoň jeden vnitřní bod omezeného konvexního útvaru v rovině nebo v prostoru, protíná jeho hranici právě ve dvou bodech.*

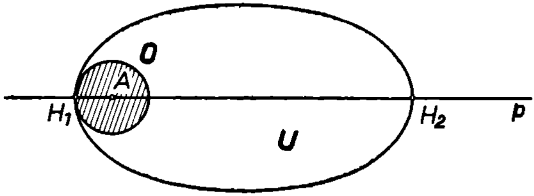


Obr. 12a

Příklad 7. Máme dokázat větu III pro konvexní útvary v rovině pomocí věty II.

Řešení. Označme U daný konvexní útvar v rovině, p přímku, která obsahuje jeho vnitřní bod A (obr. 12a). Dále označíme O okolí bodu A, které obsahuje vesměs body útvaru U. Průnik P přímky p s útvarem U je podle věty I konvexní útvar; protože útvar U je omezený, je i útvar P omezený. Mimo to obsahuje útvar P průnik přímky p s okolím O (proč?), tj. obsahuje nekonečně mnoho bodů. Je tedy podle věty II útvar P jistá úsečka H_1H_2. Krajní body H_1, H_2 této úsečky jsou hraniční body útvaru U; neboť např. v každém okolí O_1 bodu H_1 jsou body přímky p, které náležejí útvaru U (úsečce H_1H_2) a body, které mu nenáležejí.

Podle naší úmluvy o uzavřenosti útvarů náležejí body H_1, H_2 útvaru U. Vedeme-li z nich tečny ke kružnici omezující okolí O, dostaneme vyšrafovanou část roviny (obr. 12a), jejíž všecky body náležejí útvaru U (proč?). Nyní snadno sestrojíme ke každému bodu X ležícímu mezi H_1, H_2 okolí O′, které obsahuje vesměs body útvaru U; vyložte jeho konstrukci podrobně podle obr. 12a.



Obr. 12b

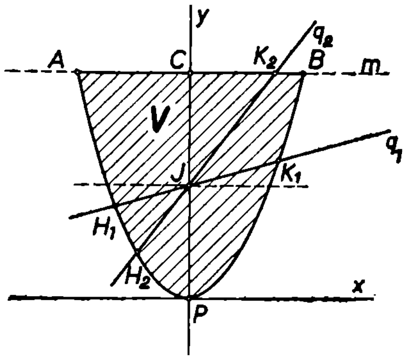
Závěr. Každý bod přímky p ležící mezi H_1, H_2 je vnitřní bod útvaru U; bod ležící vně úsečky H_1H_2, nenáleží útvaru U, proto není ani vnitřní, ani hraniční. Na přímce p leží tedy jen dva hraniční body H_1, H_2.

A nakonec všetečná otázka: Co kdyby situace vypadala např. tak, jako na obr. 12b?

Úloha 16. Dokažte větu III pro konvexní útvary v prostoru.

Úloha 17. Útvar V je průnik útvaru U z úlohy 5 a poloroviny mP, kde P je počátek souřadnic a m je přímka o rovnici $x + y - 4 = 0$. Načrtněte obrázek, vyjádřete útvar V nerovnostmi a zjistěte, zda bod $A = [1; 2]$ je jeho vnitřním bodem. Určete hraniční body útvaru V, které leží na přímce AP.

Příklad 8. Útvar V je průnik útvaru U z příkladu 4 a poloroviny mP, kde P je počátek souřadnic a m je přímka o rovnici $y = 4$. Bod $J = [0; 2]$ je vnitřním bodem útvaru V. Máme jím vést takovou přímku, aby hranice útvaru V na ní vyťala úsečku délky nejvýše 3.



Obr. 13

Řešení. Obr. 13 znázorňuje situaci. Zřejmě postačí zkoumat jen přímky procházející bodem J, které mají nezáporné směrnice, neboť útvar V a bod J jsou souměrné podle osy y. Dvě z těchto přímek jsou na obr. 13 zakresleny: je to přímka q_1, která protíná hranici útvaru V v hraničních bodech H_1, K_1, jež oba náležejí parabole; dále je to přímka q_2, která protíná hranici útvaru V v bodě H_2 náležejícím parabole a v bodě K_2 náležejícím přímce m.

Označme a ($\geqq 0$) směrnici přímky q_1, jejíž rovnice pak je

$$y = a x + 2. \tag{6}$$

Souřadnice x bodů H_1, K_1 dostaneme řešením kvadratické rovnice

$$x^2 - a x - 2 = 0.$$

Tato rovnice má kořeny

$$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 2}\,. \tag{7}$$

Souřadnice y bodů H_1, K_1 vypočteme z rovnice (6) pomocí (7); vyjde

$$y = \frac{1}{2}a^2 + 2 \pm a\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 2}\,.$$

Je tedy

$$H_1 = \left[\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 2}\,;\ \frac{1}{2}a^2 + 2 - a\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 2}\right],$$

$$(7')$$

$$K_1 = \left[\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 2}\,;\ \frac{1}{2}a^2 + 2 + a\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + 2}\right]$$

Přitom pro číslo a máme tyto nerovnosti

$$0 \leqq a \leqq 1,$$

neboť přímka q_1 má největší směrnici, splyne-li s přímkou JB (viz obr. 13).

Vzdálenost H_1K_1 vypočteme podle známého vzorce pro vzdálenost dvou bodů $H_1 = [x_1, y_1]$, $K_1 = [x_2, y_2]$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,;$$

v našem případě je podle (7')

$$\overline{H_1K_1}^2 = 4\left(\frac{1}{4}a^2 + 2\right) + 4a^2\left(\frac{1}{4}a^2 + 2\right) =$$
$$= (a^2 + 8)(a^2 + 1). \tag{8}$$

Podle podmínky úlohy má být $H_1K_1 \leqq 3$, tj. podle (8) $(a^2 + 8)(a^2 + 1) \leqq 9$ neboli po úpravě

$$a^4 + 9a^2 \leqq 1.$$

To je kvadratická nerovnost pro a^2; rozřešíme ji úpravami

$$a^4 + 9a^2 + \frac{81}{4} \leqq \frac{85}{4},$$

$$\left(a^2 + \frac{9}{2}\right)^2 \leqq \frac{85}{4},$$

$$a^2 \leqq \frac{\sqrt{85} - 9}{2};$$

protože je a nezáporné, dostáváme

$$a \leqq \sqrt{\frac{\sqrt{85} - 9}{2}} \doteq 0{,}33. \tag{9}$$

Obrácení postupu ukáže, že pro všecka a splňující nerovnost (9) je skutečně $H_1K_1 \leqq 3$.

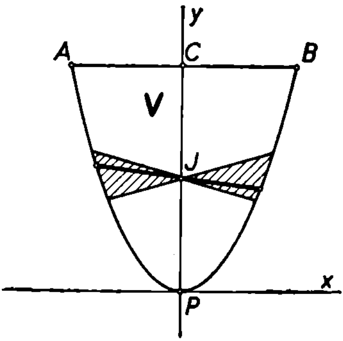
Zbývá dokázat to, co nám napovídá názor: že totiž pro všecky přímky q_2 je $H_2K_2 > 3$. Předně je $JK_2 > JC = 2$ (viz obr. 13). Nyní použijeme výsledku z příkladu 6; tam jsme zjistili, že kružnice se středem J a poloměrem $\frac{1}{2}\sqrt{7}$ náleží útvaru U (a tedy i útvaru V); proto je jistě $H_2J \geqq \frac{1}{2}\sqrt{7}$. Sečteme-li nerovnosti $JK_2 > 2$, $H_2J \geqq \frac{1}{2}\sqrt{7}$, dostaneme

$$H_2K_2 > 2 + \frac{1}{4}\sqrt{7} < 2 + 1{,}32 = 3{,}32 > 3.$$

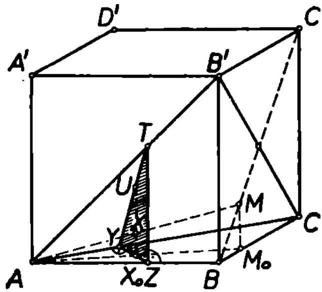
Protože je také $CP = 4 > 3$, jsou přímky žádané vlastnosti jen nalezené přímky q_1 a přímky s nimi souměrně sdružené podle osy y.

Všecka řešení úlohy jsou zakreslena na obr. 14; příslušné úsečky vyplňují vyšrafovanou část roviny.

Příklad 9. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$ o hraně délky 1, M je bod úhlopříčky BC', pro který platí $C'M = 3\,BM$. Z krychle je oddělen čtyřstěn $ABCB'$ a je sestrojen střed X úsečky AM. Máme dokázat, že bod X je vnitřním bodem čtyřstěnu a máme určit největší okolí bodu X, které náleží čtyřstěnu.



Obr. 14

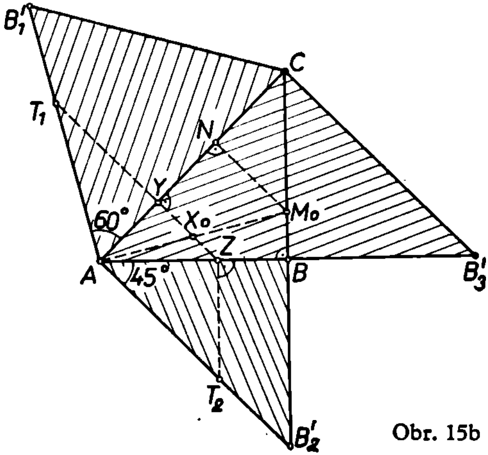


Obr. 15a

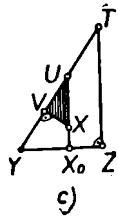
Řešení. Na obr. 15a jsou M_0, X_0 paty kolmic spuštěných po řadě z bodů M, X na rovinu ABC. Bod X náleží úsečce AM a není bodem povrchu čtyřstěnu $ABCB'$, je tedy jeho bodem vnitřním. Vzdálenost bodu X od roviny ABC je délka úsečky XX_0; pro ni platí

$$XX_0 = \frac{1}{2}MM_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}CC' = \frac{1}{8}. \qquad (10)$$

Vzdálenost bodu X od roviny ABB' je táž jako vzdálenost bodu X_0 od přímky AB, tj. $\frac{1}{2} BM_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} BC = \frac{1}{8}$. Vzdálenost bodu X od roviny BCB' je táž jako vzdálenost bodu X_0 od přímky BC, tj. $\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}$.



Obr. 15b



Obr. 15c

Bod X má tedy od rovin tří stěn čtyřstěnu $ABCB'$ vzdálenosti $\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}$; zbývá zjistit jeho vzdálenost od roviny ACB'. K tomu použijeme pravoúhlého trojúhelníka YZT (viz obr. 15a), který dostaneme jako průsek čtyřstěnu $ABCB'$ s rovinou ϱ kolmou k přímce AC vedenou bodem X. Rovina ϱ je určena přímkou $XX_0 \perp AC$ a přímkou $YZ \perp AC$. Chceme-li trojúhelník YZT narýsovat, musíme zjistit skutečné délky jeho stran; to je možné pomocí sítě čtyřstěnu, která je narýsována na obr. 15b. Ze sítě zjistíme také skutečnou délku úsečky YX_0, z obr. 15a skutečnou délku úsečky XX_0; pak dovedeme narýsovat obr. 15c a z něho určíme vzdálenost VX bodu X od roviny ACB'.

Popsanou konstrukci budeme sledovat výpočtem. Platí (viz obr. 15b)

$$\left.\begin{aligned}
M_0N &= CN = \frac{3}{8}AC = \frac{3}{8}\sqrt{2},\\
YX_0 &= \frac{1}{2}M_0N = \frac{3}{16}\sqrt{2},\\
AY &= YZ = \frac{1}{2}AN = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}\sqrt{2} = \frac{5}{16}\sqrt{2},\\
YT &= YT_1 = AY\,\mathrm{tg}\,60^0 = \frac{5}{16}\sqrt{6},\\
ZT &= ZT_2 = AZ = AY\sqrt{2} = \frac{5}{8}.
\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

Z podobnosti $\triangle YX_0U \sim \triangle YZT$ plyne $UX_0 = \frac{ZT}{YZ}\cdot YX_0$ a dále podle (11)

$$UX_0 = \frac{3}{8}. \qquad (12)$$

Nyní vypočteme pomocí (10), (12)

$$UX = UX_0 - XX_0 = \frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}. \qquad (13)$$

Z podobnosti $\triangle XVU \sim \triangle YZT$ vyplývá podle vztahů (11), (13)

$$VX = \frac{UX}{YT} \cdot YZ = \frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{12}\sqrt{3}. \qquad (14)$$

Podle (14) je tedy $VX > \frac{1}{12} \cdot 1{,}732 > 0{,}144 > \frac{1}{8}$. Nejmenší ze vzdáleností bodu X od stěn čtyřstěnu $ABCB'$ je tudíž $\frac{1}{8}$. Hledané okolí je koule se středem X a poloměrem $\frac{1}{8}$; tato koule se dotýká rovin ABC, ABB'.

Úloha 18. Určete konstruktivně i početně délku úsečky, kterou čtyřstěn $ABCB'$ z příkladu 9 vytíná na přímce $B'X$.

Úloha 19.* Je dán pravidelný hranol čtyřboký $ABCD\,A'B'C'D'$, jehož hrana podstavy $ABCD$ má délku a, hrana pobočná AA' má délku v. Bod P je střed čtverce $A'B'C'D'$, M je střed úsečky AP. Bod X probíhá obvod čtverce $ABCD$. Zakreslete lomenou čáru, kterou probíhá druhý průsečík X' přímky MX s povrchem kvádru. Která z úseček XX' je nejdelší? Stačí vypočítat délky úseček XX' pro $X \equiv A$, $X \equiv B$, $X \equiv C$; je třeba provést diskusi vzhledem k proměnným a, v.

Úloha 20. a) Kolik hraničních bodů obsahuje přímka, procházející vnitřním bodem neomezeného konvexního útvaru? Udejte všecky možnosti, odůvodněte je a uveďte příklady z těch konvexních útvarů, které znáte.

b) Útvar U v rovině má tuto vlastnost: Každá přímka procházející *určitým* jeho vnitřním bodem obsahuje právě dva hraniční body. Lze tvrdit, že útvar U je konvexní?

Poznámka. Platí-li vlastnost v úloze 20b) pro *každý* vnitřní bod útvaru U, pak lze tvrdit, že útvar U je konvexní.