O rovnicích s parametry

3. kapitola. Kvadratické rovnice

In: Jiří Váňa (author): O rovnicích s parametry. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1964. pp. 45–[63].

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403496

3. kapitola

KVADRATICKÉ ROVNICE

●

Dříve, než uvedeme několik řešených příkladů, připomeňme, že nám v této kapitole půjde především o zkoumání řešitelnosti kvadratické rovnice v oboru reálných čísel. Víme, že o řešitelnosti a počtu řešení kvadratické rovnice s reálnými koeficienty, tj. rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

kde je $a \neq 0$, rozhoduje její diskriminant

$$D = b^2 - 4ac.$$

Je-li $D < 0$, nemá rovnice (1) žádný reálný kořen. Je-li $D = 0$, má rovnice (1) jeden reálný kořen, tzv. dvojnásobný.

Je-li $D > 0$, má rovnice (1) dva různé reálné kořeny. Diskusi budeme provádět většinou pomocí diskriminantu.

Úloha 1. Řešte v oboru reálných čísel x rovnici

$$(a - 2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0, \tag{2}$$

kde a je reálné číslo.

Při rozboru je třeba rozlišit dva případy:

1. Je-li $a - 2 = 0$, tj. $a = 2$, má rovnice (2) tvar $-4x + 1 = 0$ a vyhovuje jí jediné číslo $x = \frac{1}{4}$.

2. Je-li $a - 2 \neq 0$, tj. $a \neq 2$, je rovnice (2) rovnicí kvadratickou a její řešitelnost závisí na diskriminantu $D = 4(-a^2 + 7a - 6)$. Podmínka řešitelnosti je $-a^2 + 7a - 6 \geqq 0$, neboli

$$-(a - 1)(a - 6) \geqq 0. \tag{3}$$

Nerovnost (3) je splněna právě tehdy, platí-li podmínka $1 \leqq a \leqq 6$.

Pro $a = 1$ nebo $a = 6$ je $D = 0$ a rovnice (2) má jediný kořen. Po dosazení těchto hodnot parametru a do rovnice (2) dostaneme rovnice

$$x^2 + 2x + 1 = 0,$$
$$4x^2 - 12x + 9 = 0,$$

z nichž první má kořen $x = -1$ a druhá $x = \dfrac{3}{2}$.

Pro $1 < a < 6$ je $D > 0$ a rovnice (2) má dva různé reálné kořeny. Jsou dány vzorci

$$x_1 = \frac{a + \sqrt{-a^2 + 7a - 6}}{a - 2}, \tag{4a}$$

$$x_2 = \frac{a - \sqrt{-a^2 + 7a - 6}}{a - 2}. \tag{4b}$$

Zkoušku provedeme dosazením do rovnice (2). Např. pro $1 < a < 6$ dostaneme pro kořen x_1:

$$(a - 2) \cdot \left(\frac{a + \sqrt{-a^2 + 7a - 6}}{a - 2}\right)^2 -$$

$$- 2a\frac{a + \sqrt{-a^2 + 7a - 6}}{a - 2} + 2a - 3 =$$
$$= \frac{a^2 + 2a\sqrt{-a^2 + 7a - 6} - a^2 + 7a - 6 - 2a^2}{a - 2} +$$
$$+ \frac{-2a\sqrt{-a^2 + 7a - 6} + 2a^2 - 4a - 3a + 6}{a - 2} = 0.$$

Výsledek diskuse shrneme do tabulky:

Parametr a	Počet řešení
$a < 1, a > 6$	žádné
$a = 1, a = 2, a = 6$	jedno
$1 < a < 6, a \neq 2$	dvě, viz (4a), 4b)

Graficky lze řešit úlohu 1 takto: Rovnici (2) upravíme na tvar

$$(a - 2)x^2 = 2ax - 2a + 3$$

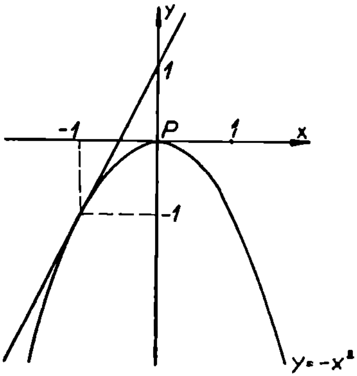
a označíme

$$y_1 = (a - 2)x^2; \tag{5a}$$
$$y_2 = 2ax - 2a + 3. \tag{5b}$$

Rovnice (5a) je analytickým vyjádřením množiny parabol, procházejících počátkem pravoúhlé souřadnicové soustavy s osami x, y (pro $a = 2$ dostaneme přímku $y = 0$). Osou každé z těchto parabol je osa y, jejich parametry jsou čísla

$$p = \frac{1}{2\,|a - 2|}.$$

Jaký je geometrický význam rovnice (5b)? Vyšetřte, jaké útvary vyjadřují rovnice (5a), (5b) pro hodnoty $a = -1$, $a = 0$, $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$, $a = 6$, $a = 10$. (V obr. 7 je zvoleno $a = 1$.)



Obr. 7.

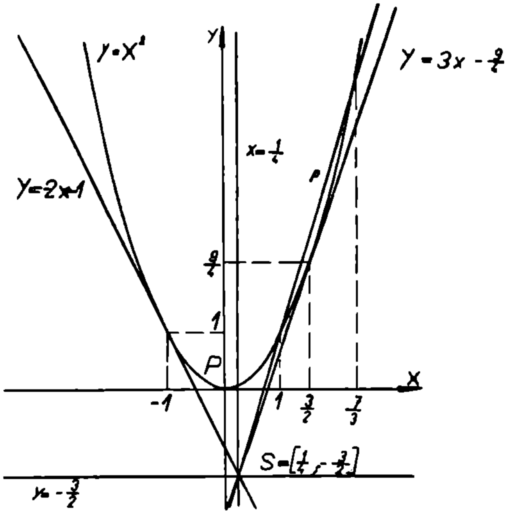
Předchozí způsob grafického řešení je nevýhodný, neboť vyžaduje rýsování množiny parabol. Výhodnější je tento způsob: Vyloučíme případ $a = 2$ a rovnici (2) uvedeme na tvar

$$x^2 - \frac{2a}{a-2}x + \frac{2a-3}{a-2} = 0.$$

Položíme

$$\begin{aligned} y &= x^2, \\ y &= \frac{2a}{a-2}x - \frac{2a-3}{a-2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Tím jsme zavedli novou pomocnou neznámou y. Grafem první rovnice (6) je určitá parabola (nezávislá na volbě parametru a), grafem druhé rovnice (6) je množina přímek; snadno lze dokázat, že tato množina je svazkem přímek o středu $S \equiv [\frac{1}{4}, -\frac{3}{2}]$ s vyloučením přímky $x = \frac{1}{4}$. Dané hodnotě parametru a odpovídá určitá přímka p svazku; souřadnice x bodů, které má tato přímka p společné s parabolou, jsou řešením rovnice (2).



Obr. 8.

Na obr. 8 je zobrazena přímka p pro hodnotu $a = 5$; přímka p má rovnici $y = \frac{10x}{3} - \frac{7}{3}$. Z obr. 8 je zároveň vidět, že rovnice (2) není řešitelná pro každou hodnotu a; má-li být rovnice (2) řešitelná pro určitou hodnotu a, musí být příslušná přímka p sečnou nebo tečnou paraboly. Tak např. přímka $y = -\frac{3}{2}$, která odpovídá hodnotě $a = 0$, nemá s parabolou žádný společný bod. To souhlasí s výsledkem diskuse (viz tabulku), podle něhož je rovnice (2) pro $a = 0$ skutečně neřešitelná.

Úloha 2. Pro které hodnoty parametru a splňují kořeny x_1, x_2 rovnice

$$2x^2 - (a + 1)x + a + 3 = 0$$

podmínku $x_1 - x_2 = 1$?

☞ Při řešení úlohy 2 užijeme známých vztahů pro kořeny x_1, x_2 kvadratické rovnice s reálnými koeficienty $ax^2 + bx + c = 0$, a to

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

V našem případě musí platit soustava rovnic

$$x_1 + x_2 = \frac{a + 1}{2},$$

$$x_1 x_2 = \frac{a + 3}{2},$$

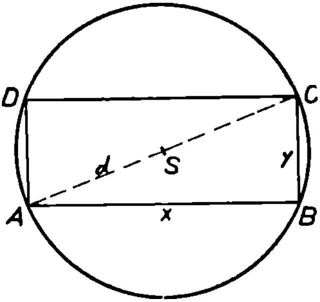
$$x_1 - x_2 = 1$$

o neznámých x_1, x_2, a. Odtud vypočteme, že podmínky úlohy 2 splňují čísla $a = -3$, $a = 9$. Proveďte zkoušku!

Úloha 3. Stanovte podmínku, která musí být splněna, aby bylo možné do kružnice o průměru d vepsat obdélník o daném obsahu $a^2 > 0$.

Podle obr. 9 označme $x = AB = CD$, $y = AD = BC$. Potom platí soustava rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= d^2, \\ xy &= a^2. \end{aligned} \tag{7}$$



Obr. 9.

Pro každou dvojici x, y, která splňuje soustavu (7), musí být splněna rovnice

$$x^2 + 2xy + y^2 = d^2 + 2a^2$$

a dále rovnice

$$(x + y)^2 = d^2 + 2a^2. \tag{8}$$

Protože x, y jsou velikostmi stran obdélníku, plyne z (8), že je

$$x + y = \sqrt{d^2 + 2a^2}. \tag{9}$$

Užijeme-li ve spojení s rovnicí (9) druhé rovnice soustavy (7), zjistíme, že každé řešení x, y soustavy (7) je také řešením soustavy

$$\begin{aligned} x + y &= \sqrt{d^2 + 2a^2}, \\ xy &= a^2, \end{aligned}$$

což znamená, že čísla x, y jsou kořeny kvadratické rovnice

$$z^2 - \sqrt{d^2 + 2a^2}.z + a^2 = 0 \tag{10}$$

o neznámé z. Co můžeme říci o znameních kořenů?

Podmínku řešitelnosti úlohy stanovíme pomocí diskriminantu rovnice (10). Podmínka zní $D \geqq 0$, tj. $d^2 + 2a^2 - 4a^2 \geqq 0$. Protože je $d > 0$, $a > 0$, je podmínka řešitelnosti

$$d \geqq a\sqrt{2}.$$

Úloha 4. Řešte v oboru reálných čísel x rovnici

$$2x + ax = \sqrt{x}, \tag{11}$$

kde a je reálné číslo.

Předpokládejme, že rovnice (11) má řešení. Potom každé x, které je jejím kořenem, splňuje postupně tyto rovnice:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4ax^2 + a^2x^2 &= x, \\ x^2\,(a^2 + 4a + 4) &= x, \\ x^2\,(a + 2)^2 &= x. \end{aligned} \tag{12}$$

Rovnice (12) má kořen $x = 0$, další její kořen $x \neq 0$ je kořenem rovnice

$$x(a + 2)^2 = 1,$$

která pro $a \neq -2$ má jediné řešení

$$x = \frac{1}{(a + 2)^2} \tag{13}$$

a pro $a = -2$ nemá žádné řešení.

Provedeme zkoušku, zda nalezené výsledky vyhovují též rovnici (11). Dosadíme-li ze vztahu (13), dostaneme, že má platit rovnost

$$\frac{2}{(a+2)^2} + \frac{a}{(a+2)^2} = \frac{1}{|a+2|}. \tag{13a}$$

Je-li $a + 2 > 0$, dá levá strana $\frac{2}{(a+2)^2} + \frac{a}{(a+2)^2} = \frac{1}{a+2}$, pravá strana $\frac{1}{|a+2|} = \frac{1}{a+2}$, což znamená, že rovnice (11) má pro $a > -2$ kořen daný vzorcem (13). Je-li $a + 2 < 0$, není rovnost (13a) splněna.

Výsledek diskuse shrneme do tabulky:

Parametr a	Počet řešení
$a \leqq -2$	jedno, $x = 0$
$a > -2$	dvě, $x = 0$, viz (13)

Úloha 5. Řešte v oboru reálných čísel x rovnici

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{x-7} = a, \tag{14}$$

kde a je reálné číslo.

Předpokládáme-li, že rovnice (14) má řešení, musí zřejmě být $a > 0$. Pro $a \leqq 0$ rovnice (14) nemá žádný reálný kořen x. Po umocnění a dalších úpravách rovnice (14) dostaneme, že pro každé x, které je jejím řešením, musí postupně platit

$$\sqrt{x-3} = a - \sqrt{x-7},$$
$$x - 3 = a^2 - 2a\sqrt{x-7} + x - 7,$$
$$2a\sqrt{x-7} = a^2 - 4,$$
$$4a^2x = a^4 + 20a^2 + 16. \tag{15}$$

Protože je $a > 0$, je $a^2 > 0$ a z (15) dostaneme:

$$x = \frac{a^4 + 20a^2 + 16}{4a^2}. \tag{16}$$

Nyní provedeme zkoušku. Užijeme-li vztahu (16), zjistíme, že je $x - 3 = \frac{1}{4a^2}(a^4 + 8a^2 + 16) = \frac{(a^2 + 4)^2}{4a^2}$, $x - 7 = \frac{1}{4a^2}(a^4 - 8a^2 + 16) = \frac{(a^2 - 4)^2}{4a^2}$. Levá strana rovnice (14) je tedy $L = \sqrt{\frac{(a^2 + 4)^2}{4a^2}} + \sqrt{\frac{(a^2 - 4)^2}{4a^2}} =$ $= \frac{a^2 + 4}{2a} + \frac{|a^2 - 4|}{2a}$, neboť je $a > 0$, $a^2 + 4 > 0$. Je tedy dále buď

1. $L = a$ pro $a^2 \geqq 4$,

nebo

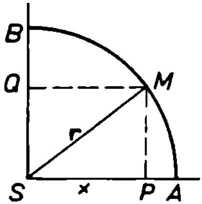
2. $L = \frac{4}{a}$ pro $a^2 \leqq 4$.

Rovnice (14) má jedno řešení pro každé $a \geqq 2$; pro $a \leqq 2$ jen tehdy, je-li $a^2 = 4$, tj. $a = 2$. Diskusi můžeme shrnout přehledněji v tabulce:

Parametr a	Počet řešení
$a < 2$	žádné
$a \geqq 2$	jedno, viz (16)

Řešte rovnici $\sqrt{x - 3} - \sqrt{x - 7} = a$, kde a je reálné číslo. Porovnejte postup řešení této rovnice a rovnice (14).

Úloha 6. Je dána čtvrtkružnice AB o poloměru r a středu S. Určete bod M této čtvrtkružnice tak, aby bylo $MP + 2MQ = l$, kde l je kladné číslo a P, Q jsou paty kolmic spuštěných z bodu M na přímky SA, SB (obr. 10). Stanovte podmínku řešitelnosti této úlohy!



Obr. 10.

Při řešení úlohy hledejme velikost x úsečky SP. Velikost úsečky MP je pak vyjádřena vztahem

$$MP = \sqrt{r^2 - x^2}. \tag{17}$$

Z geometrického významu proměnné x a ze znění textu úlohy vyplývají pro x podmínky:

$$0 \leqq x \leqq r, \quad 0 \leqq x \leqq \tfrac{1}{2} l. \tag{18}$$

Z podmínky $MP + 2MQ = l$ dostaneme podle (17) pro x rovnici

$$\sqrt{r^2 - x^2} + 2x = l. \tag{18a}$$

Jejím umocněním vyjde

$$r^2 - x^2 = (l - 2x)^2. \tag{19}$$

Po úpravě rovnice (19) dostaneme rovnici

$$5x^2 - 4lx + (l^2 - r^2) = 0. \tag{20}$$

Rovnice (20) má reálné kořeny právě tehdy, platí-li nerovnost

$$16l^2 - 20(l^2 - r^2) \geqq 0,$$

neboli

$$5r^2 - l^2 \geqq 0,$$

neboli

$$l \leqq r\sqrt{5}. \tag{21}$$

Kořeny rovnice (20) jsou pak dány vztahy

$$x_1 = \frac{2l + \sqrt{5r^2 - l^2}}{5}, \tag{22}$$

$$x_2 = \frac{2l - \sqrt{5r^2 - l^2}}{5}. \tag{23}$$

Nyní je třeba provést zkoušku. Oba kořeny (22), (23) vyhovují (za předpokladu (21)) rovnici (20), tudíž i rovnici (19). Budou-li splněny obě podmínky (18), bude možno obě strany (19) odmocnit a vyjde (18a), tj. příslušný kořen x bude řešením úlohy. Je tedy třeba zjistit, zda jsou splněny podmínky (18) za předpokladu (21).

Předně je patrné, že je $x_2 \leqq x_1$. Kořen x_1 je vždy kladný, kořen x_2 je nezáporný jen tehdy, je-li $2l \geqq \geqq \sqrt{5r^2 - l^2}$ neboli $l \geqq r$. Je-li $l \geqq r$, vyjde obrácením postupu nerovnost $x_2 \geqq 0$. Dále dokážeme, že je vždy $x_1 \leqq r$, a tudíž i $x_2 \leqq r$. Skutečně z nerovnosti

$$\frac{2l + \sqrt{5r^2 - l^2}}{5} \leqq r$$

plyne po úpravě

$$\sqrt{5r^2 - l^2} \leqq 5r - 2l;$$

umocněním této nerovnosti vyjde po úpravě

$$5(2r - l)^2 \geqq 0. \tag{23a}$$

Nerovnost (23a) je splněna pro každé l, r; obrácením postupu z ní dostaneme nerovnost $x_1 \leqq r$.

Shrnutí: Pro kořen x_1 platí vždy první nerovnost (18), pro kořen x_2 jen v případě, že je $l \geqq r$.

Zbývá vyšetřit druhou nerovnost (18). Je-li $x_1 \leqq \frac{l}{2}$, je $2\sqrt{5r^2 - l^2} \leqq l$ neboli $2r \leqq l$; obrácením postupu dostaneme z této nerovnosti nerovnost $x_1 \leqq \frac{l}{2}$. Je-li $x_2 \leqq \frac{l}{2}$, je $-2\sqrt{5r^2 - l^2} \leqq l$, což je splněno pro každé l, r; obrácením postupu zjistíme, že je vždy $x_2 \leqq \frac{l}{2}$.

Závěr: Pro kořen x_1 platí oba vztahy (18) jedině v případě, že je $2r \leqq l$, pro kořen x_2 jedině v případě, že je $l \geqq r$.

Výsledek diskuse zapíšeme pomocí podmínek pro poměr parametrů $\frac{l}{r}$:

Podíl parametrů $\frac{l}{r}$	Počet řešení
$\frac{l}{r} < 1$, $\frac{l}{r} > \sqrt{5}$	žádné
$1 \leqq \frac{l}{r} < 2$, $\frac{l}{r} = \sqrt{5}$	jedno
$2 \leqq \frac{l}{r} < \sqrt{5}$	dvě

Při sestavování této tabulky jsme použili ještě skutečnosti že $x_1 = x_2$ jen v tom případě, že je $\frac{l}{r} = \sqrt{5}$.

Úloha 7. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25, \\ 2x - y + a &= 0, \end{aligned} \tag{24}$$

o neznámých x, y, kde a je reálné číslo.

Předpokládejme, že soustava (24) má řešení. Každá dvojice x, y, která ji splňuje, vyhovuje rovnici

$$y = 2x + a \tag{25}$$

a rovnici

$$x^2 + (2x + a)^2 = 25,$$

z níž dostaneme pro neznámou x po úpravě rovnici

$$5x^2 + 4ax + a^2 - 25 = 0. \tag{26}$$

Podmínky řešitelnosti rovnice (26) zjistíme pomocí jejího diskriminantu. Rovnice (26) má aspoň jeden reálný kořen právě tehdy, je-li splněna podmínka

$$16a^2 - 20(a^2 - 25) \geqq 0,$$

neboli

$$125 - a^2 \geqq 0,$$

neboli

$$-5\sqrt{5} \leqq a \leqq 5\sqrt{5}. \tag{27}$$

Pro čísla a splňující nerovnosti (27) jsou kořeny x_1, x_2 rovnice (26) dány vztahy

$$x_1 = \frac{-2a + \sqrt{125 - a^2}}{5}, \tag{28a}$$

$$x_2 = \frac{-2a - \sqrt{125 - a^2}}{5}. \qquad (29a)$$

Z nich dosadíme do (25) a zjistíme, že je

$$y_1 = \frac{a + 2\sqrt{125 - a^2}}{5}, \qquad (28b)$$

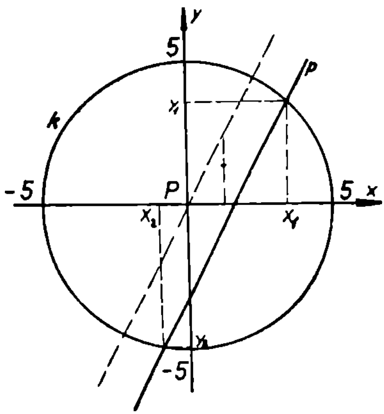
$$y_2 = \frac{a - 2\sqrt{125 - a^2}}{5}. \qquad (29b)$$

Po provedení zkoušky shrneme diskusi do tabulky:

Parametr a	Počet řešení
$a < -5\sqrt{5}$, $a > 5\sqrt{5}$	žádné
$a = -5\sqrt{5}$, $a = 5\sqrt{5}$	jedno, viz (28a), (28b)
$-5\sqrt{5} < a < 5\sqrt{5}$	dvě, viz (28a), (28b), (29a), (29b)

Geometrické řešení soustavy rovnic (24) je velmi pěkné. První rovnice (24) je početním vyjádřením kružnice se středem v počátku systému souřadnic a s poloměrem $r = 5$. Druhá rovnice je početním vyjádřením osnovy přímek rovnoběžných s přímkou $y = 2x$ (obr. 11). Které přímky osnovy dostaneme, zvolíme-li hodnoty parametru $a = -5\sqrt{5}$, $a = 5\sqrt{5}$?

Touto úlohou končí naše knížka. Mohli bychom ještě pokračovat v řešení dalších a dalších úloh. Zvlášť zajímavé by bylo studium jejich grafického řešení. Ale to bychom se museli podrobněji zabývat analytickou geometrií, což přesahuje rámec naší knížky.



Obr. 11.

Několik neřešených úloh

1. Řešte v oboru reálných čísel x rovnici
a) $a(a+2)x^2 + 2x - a^2 + 1 = 0$,
b) $\dfrac{x}{x-a} + \dfrac{2a}{x+a} = \dfrac{8a^2}{x^2-a^2}$,
kde a je reálné číslo.

2. Řešte v oboru reálných čísel x rovnici

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

kde a, b jsou reálná čísla a platí $ab \neq 0$.

3. Pro které hodnoty parametru a platí pro kořeny x_1, x_2 kvadratické rovnice

$$2ax^2 - 2x - 3a - 2 = 0$$

podmínky $x_1 < 1$, $x_2 > 1$?

4. Pro které hodnoty parametru a jsou oba kořeny x_1, x_2 kvadratické rovnice $(2 - a)x^2 - 3ax + 2a = 0$ větší než $\frac{1}{2}$?

5. Pro které hodnoty parametru a platí pro kořeny x_1, x_2 kvadratické rovnice

$$x^2 + 2x + a = 0$$

podmínky $-1 < x_1 < x_2 < 1$?

6. Dokažte, že rovnice

a) $(x - a)(x - b) + (x - a)(x - c) +$
$+ (x - b)(x - c) = 0$;

b) $a(x - b)(x - c) + b(x - c) +$
$+ c(x - a)(x - b) = 0$

má vždy reálné kořeny.

7. V rovině je dáno několik bodů, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce. Stanovte jejich počet, víte-li, že je jimi určeno

a) 28 přímek,

b) a přímek.

8. Řešte v oboru reálných čísel x rovnici

$$\frac{2\sqrt{a^2 + x} - a}{\sqrt{a^2 + x} + 1} = \frac{\sqrt{a^2 + x} - 1}{a},$$

kde a je reálný parametr, $a \neq 0$.

9. Pro jakou hodnotu parametru a má soustava rovnic

a) $x^2 + y^2 = 5;$
$\quad 2x - y = a,$

b) $x^2 + 4y^2 = 20,$
$\quad x + a = 0;$

c) $4x^2 - 9y^2 = 36,$
$\quad 2x - y + a = 0$

o neznámých x, y jediné řešení? Jaký je geometrický význam těchto úloh?

10. Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic

a) $x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0,$
$\quad ax + y - 3 = 0;$

b) $2x^2 + 8y^2 = 16,$
$\quad ax + y + 2a = 3$

o neznámých x, y, přičemž a je reálné číslo. Jaký je geometrický význam těchto úloh?

Vyhledejte v některé učebnici analytické geometrie, jak lze početně vyjádřit kružnici, elipsu a hyperbolu.