SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Zabývejme se nyní soustavami lineárních rovnic s parametrem. Při jejich řešení uplatníme znalosti získané řešením lineárních rovnic o jedné neznámé. Diskusí budeme i zde rozumět zjištění, za jakých podmínek je soustava řešitelná a kolik má řešení.

Úloha 1. Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic

$$\begin{aligned} ax + y &= 1, \\ x + ay &= 1 \end{aligned} \tag{1}$$

o neznámých x, y, přičemž a je reálné číslo.

Předpokládejme, že soustava (1) má řešení. Potom musí platit

$$y = 1 - ax. \tag{2}$$

Dosadíme-li y ze vztahu (2) do druhé rovnice soustavy (1), obdržíme pro x rovnici

$$x + a - a^2x = 1$$

a tedy rovnici

$$(1 - a^2)\,x = 1 - a. \tag{3}$$

Nyní musíme rozbor štěpit.

1. Je-li $1 - a^2 \neq 0$, plyne z rovnice (3) po úpravě

$$x = \frac{1}{1 + a} \tag{4a}$$

a z rovnice (2) po úpravě

$$y = \frac{1}{1 + a}. \tag{4b}$$

2. Je-li $1 - a^2 = 0$, musíme rozbor dále štěpit, a to na dva případy: $a = 1$, $a = -1$.

a) Je-li $a = 1$, má soustava (1) tvar

$$\begin{aligned} x + y &= 1, \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

a je splněna pro každé reálné číslo x a $y = 1 - x$.

b) Je-li $a = -1$, má soustava (1) tvar

$$\begin{aligned} -x + y &= 1, \\ x - y &= 1. \end{aligned}$$

Tato soustava je neřešitelná, tj. soustava (1) je pro $a = -1$ neřešitelná.

Zkouška. Dosadíme-li x, y ze vztahů (4a) a (4b) do rovnic soustavy (1), jsou rovnice splněny.

Z rozboru a zkoušky vyplývá výsledek diskuse, který shrneme do přehledné tabulky:

Parametr a	Počet řešení
$a = -1$	žádné
$a \neq -1$, $a \neq 1$	jedno, viz (4a), (4b)
$a = 1$	nekonečně mnoho, x libovolné, $y = 1 - x$

Poznámky. Vyšetřování zvláštních případů (zde např. $a = 1$ nebo $a = -1$) provádíme nejčastěji tak, že parametr dosadíme do rovnic soustavy a vzniklou soustavu řešíme. Všimněte si ještě, že do vzorců (4a), (4b) můžeme dosadit $a = 1$ a dostaneme řešení $x = y = \frac{1}{2}$; totéž řešení dostaneme, zvolíme-li $x = \frac{1}{2}$ a vypočteme $y = 1 - x$. V případě $a = 1$ nám dávají tedy vzorce (4a), (4b) jen jedno z nekonečně mnoha řešení, a to proto, že byly odvozeny za jiného předpokladu ($a^2 \neq \neq 1$).

Při grafickém řešení uvážíme, že každá z obou rovnic vyjadřuje jistou množinu přímek. Tyto množiny budeme zkoumat obdobně jako v úloze 3 kapitoly 1. Zjistíme, že rovnice $ax + y = 1$ vyjadřuje svazek přímek se středem $S_1 \equiv [0,1]$; z něho je vyloučena přímka $x = 0$, tj. osa y. Rovnice $x + ay = 1$ vyjadřuje svazek přímek, jehož střed je bod $S_2 \equiv [1,0]$; ze svazku je vyloučena přímka $y = 0$, tj. osa x.

Zvolíme-li určité číslo a, dostaneme v každém svazku jednu přímku — tyto přímky jsou si přiřaděny; souřadnice x, y jejich společného bodu (průsečíku) jsou řešením soustavy (1) pro zvolenou hodnotu a. Je otázka, jaký útvar **U** vyplní společné body (průsečíky) přímek, které jsou si přiřaděny. Analytické vyjádření tohoto útvaru dostaneme, když vyloučíme (eliminujeme) parametr a z obou rovnic (1). Z první rovnice (1) dostaneme po znásobení číslem y

$$axy = (1 - y)y;$$

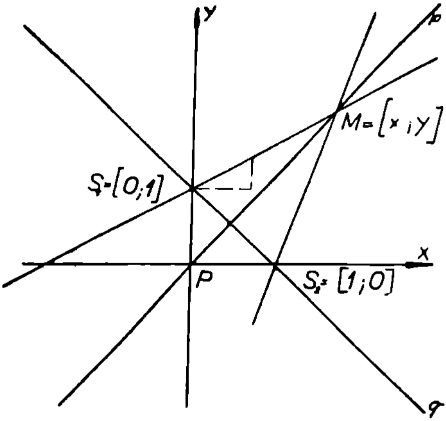
obdobně dostaneme z druhé rovnice (1)

$$axy = (1 - x)x.$$

Po porovnání a úpravě vyjde

$$(x - y)(x + y - 1) = 0. \qquad (5)$$

Rovnice (5) vyjadřuje dvě různoběžky (viz obr. 5): je to přímka p o rovnici $y = x$ a přímka q o rovnici $x + y = 1$. Přímka q je spojnicí obou středů S_1, S_2.



Obr. 5.

Z předcházejícího výpočtu vyplývá, že každý společný bod sobě přiřaděných přímek obou svazků náleží útvaru **U** o rovnici (5). Obráceně, kterýkoli bod $[x, y]$ útvaru **U** různý od počátku P, je společným bodem některé dvojice přiřaděných přímek obou svazků; toto tvrzení lze dokázat obrácením předchozího postupu.

Útvar **U** je tedy dvojice různoběžek p, q s vyloučením počátku P souřadnic.

Chceme-li nyní graficky řešit soustavu (1), postupujeme takto: Pro $a = 1$ splynou obě navzájem přiřaděné přímky obou svazků s přímkou $q \equiv S_1S_2$; její body dávají v tomto případě všecka řešení soustavy (1).

Je-li $a = -1$, jsou navzájem přiřaděné přímky obou svazků rovnoběžné a bez společného bodu: soustava (1) je neřešitelná.

Je-li $a \neq 1, -1$, protnou se přiřaděné přímky obou svazků na přímce p; jejich průsečík je sestrojen na obr. 5 pro $a = -\frac{1}{2}$, kdy přímka prvního svazku má směrnici $\frac{1}{2}$. Souřadnice průsečíku M udávají řešení soustavy (1).

Úloha 2. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} ax - y + 2 &= 0, \\ x + y - b &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

o neznámých x, y, přičemž a, b jsou reálná čísla.

Předpokládejme, že soustava (6) má řešení. Potom pro každé x, které danou soustavu splňuje, musí platit rovnice, kterou dostaneme sečtením obou rovnic (6):

$$ax + x + 2 - b = 0,$$

neboli

$$x(a + 1) = b - 2. \tag{7}$$

Je třeba vyšetřit tyto případy:

1. Je-li $a + 1 \neq 0$, tj. $a \neq -1$, je

$$x = \frac{b - 2}{a + 1}, \tag{8}$$

a dále snadno vypočteme

$$y = \frac{ab + 2}{a + 1}. \tag{9}$$

2. Je-li $a = -1$, má rovnice (7) tvar $0 . x = b - 2$.

Při $b = 2$ je tato rovnice splněna pro libovolné reálné číslo x. Soustava (6) má pak tvar

$$
\begin{aligned}
-x - y + 2 &= 0, \\
x + y - 2 &= 0
\end{aligned}
$$

a zřejmě jí vyhovuje libovolné číslo x a $y = 2 - x$. Je-li $b \neq 2$, nemá rovnice (7) řešení, a tedy ani soustava (6) nemá řešení. Zkoušku vykonáme dosazením vypočtených hodnot do rovnic soustavy (6). Diskusi shrneme do tabulky:

Parametry a, b	Počet řešení
$a = -1$, $b \neq 2$	žádné
$a \neq -1$, b libovolné	jedno, viz (8), (9)
$a = -1$, $b = 2$	nekonečně mnoho, x libovolné, $y = 2 - x$

Všimněme si rovnic soustavy (6). Prvá rovnice je analytickým vyjádřením svazku přímek procházejících bodem [0,2] s vyloučením osy y. Druhá rovnice je analytickým vyjádřením množiny přímek rovnoběžných s osou 2. a 4. kvadrantu ($y = -x$), tzv. osnovy přímek. Při řešení soustavy (6) hledáme souřadnice průsečíku jedné přímky svazku a jedné přímky osnovy. Zakreslete v pravoúhlém systému souřadnic x, y.

Volba parametru b v druhé rovnici soustavy (6) nezávisí na volbě parametru a v prvé rovnici. Je ovšem možné stanovit pro ně další podmínky, např. $b = 2a - 1$. Geometricky to znamená přiřadění mezi přímkami svazku a osnovy. Sestrojte pomocí jednotlivých bodů křivku, na níž leží průsečíky přímek odpovídajících téže hodnotě parametru, předpokládáte-li $a \gtrless -1$. Volte jiný vztah mezi a, b. Prozkoumejte podobně úlohu 1a z neřešených úloh v této kapitole.

Úloha 3. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}(a^2+1)\,x - a\,(a+1)\,y &= -(a^2+1),\\ (a^2+1)\,x - (a+1)\,y &= a^2+1\end{aligned} \tag{10}$$

o neznámých x, y, kde a je reálné číslo.

Pro každé x, y splňující soustavu (10), musí platit soustava rovnic

$$\begin{aligned}2(a^2+1)x - (a+1)^2y &= 0,\\ (a^2-1)y &= 2\,(a^2+1),\end{aligned} \tag{11}$$

které vznikly sečtením a odečtením rovnic soustavy (10).

Všimněme si druhé rovnice soustavy (11).

Je-li $a^2 - 1 \neq 0$, tj. $a \neq 1$, $a \neq -1$, je

$$y = \frac{2(a^2+1)}{a^2-1}. \tag{12}$$

Dosazením do první rovnice soustavy (11) zjistíme, že je pak

$$x = \frac{a+1}{a-1}. \tag{13}$$

Je-li $a = 1$, má soustava (10) tvar

$$\begin{aligned}2x - 2y &= -2,\\ 2x - 2y &= 2\end{aligned}$$

a zřejmě nemá řešení.

Je-li $a = -1$, má soustava (10) tvar

$$2x = -2,\ 2x = 2$$

a nesplňuje ji žádná dvojice reálných čísel x, y.

Provedeme zkoušku a výsledek diskuse zapíšeme do tabulky:

Parametr a	Počet řešení
$a = 1, a = -1$	žádné
$a^2 \neq 1$	jedno, viz (12), (13)

Pokusíte-li se řešit soustavu (10) graficky, setkáte se s čímsi novým. Probíhá-li parametr a všecka reálná čísla, vyjadřuje např. první rovnice (10) jakousi množinu **M** přímek. Snadno nahlédneme, že všecky přímky této množiny obsahují bod $S_1 \equiv [-1; 0]$; mohlo by se tedy zdát, že tato množina **M** je svazek přímek se středem S_1. Ale není tomu tak. Upravíme-li rovnici libovolné přímky množiny **M** do tvaru

$$a^2(x - y + 1) - ay + x + 1 = 0, \qquad (14)$$

můžeme snadno zjistit podmínku pro to, aby bodem $[x, y]$ procházela přímka množiny **M**. Jsou-li čísla x, y pevně zvolena tak, že je $x - y + 1 \neq 0$, pak rovnice (14) je kvadratická rovnice pro neznámou a. Tato rovnice má aspoň jedno reálné řešení právě tehdy, je-li její diskriminant D nezáporný. Diskriminant

$$D = y^2 - 4\,(x + 1)(x - y + 1)$$

lze uvést na tvar

$$D = y^2 + 4y(x + 1) - 4(x + 1)^2$$

a dále rozložit:

$$D = [y + 2(1 + \sqrt{2})(x + 1)]\,[y + 2(1 - \sqrt{2})(x + 1)].$$

Podmínka $D \geqq 0$ je splněna právě tehdy, platí-li buď zároveň nerovnosti

$$\begin{aligned} y + 2(1 + \sqrt{2})(x + 1) &\geqq 0, \\ y + 2(1 - \sqrt{2})(x + 1) &\geqq 0, \end{aligned} \qquad (14a)$$

nebo když platí současně nerovnosti

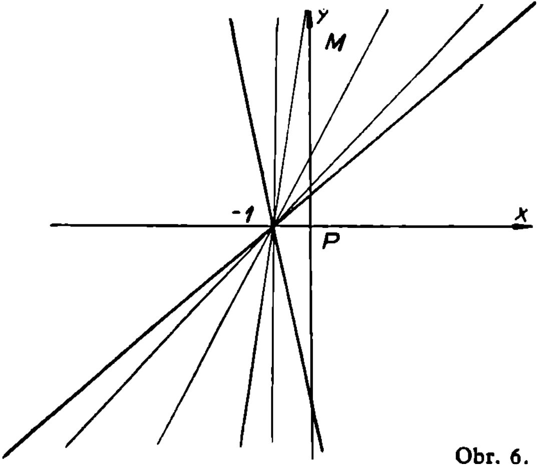
$$\begin{aligned} y + 2(1 + \sqrt{2})(x + 1) &\leqq 0, \\ y + 2(1 - \sqrt{2})(x + 1) &\leqq 0. \end{aligned} \qquad (14b)$$

Nerovnosti (14a) jsou splněny právě pro všecky body $[x, y]$ určitého úhlu sevřeného přímkami

$$\begin{aligned} y + 2(1 + \sqrt{2})(x + 1) &= 0, \\ y + 2(1 - \sqrt{2})(x + 1) &= 0, \end{aligned} \qquad (14c)$$

nerovnosti (14b) jsou splněny právě pro všecky body úhlu k němu vrcholového. Podmínka $D \geqq 0$ vyjadřuje tedy analyticky dvojici vrcholových úhlů, jejichž společný vrchol je průsečík přímek (14c), tj. bod $[-1, 0]$. To znamená, že první rovnice (10) nevyjadřuje svazek přímek, ale jen jeho část — množinu přímek, vyplňujících dva vrcholové úhly (obr. 6). Obdobně tomu je s druhou rovnicí (10).

Z těchto úvah je patrné, že geometrické řešení soustavy (10) je složitější než v předchozích úlohách; to proto, že parametr a se vyskytuje v rovnicích ve vyšších mocninách než první. Pokuste se provést grafické řešení podrobně.



Obr. 6.

Úloha 4. Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic

$$\begin{aligned} ax + y - z &= 1, \\ x + ay - z &= 1, \\ -x + y + az &= 1, \end{aligned} \tag{15}$$

o neznámých x, y, z, přičemž a je reálné číslo.

Zabývejme se nejprve soustavou rovnic

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 1, \\ x + 2y - z &= 1, \\ -x + y + 2z &= 1, \end{aligned} \tag{16}$$

která vznikne ze soustavy (15) volbou $a = 2$.

Předpokládejme, že soustava (16) má řešení. Potom čísla x, y, z, která jsou řešením soustavy (16), musí splňovat rovnici

$$x - y = 0,$$

která vznikne odečtením druhé rovnice soustavy od první, tj. rovnici

$$x = y. \tag{17}$$

Užijeme-li vztahu (17) a dosadíme-li do třetí rovnice soustavy (16), zjistíme, že musí platit

$$2z = 1,$$

tj.

$$z = \frac{1}{2}. \tag{18}$$

Užijeme-li vztahů (17) a (18) a dosadíme-li např. do prvé rovnice soustavy (16), vypočteme $x = \frac{1}{2}$. Podobně vypočteme $y = \frac{1}{2}$.

Zkoušku provedeme dosazením vypočtených hodnot $x = y = z = \frac{1}{2}$ do rovnic soustavy (16).

Nyní budeme řešit týmž postupem soustavu (15). Pro čísla x, y, z, která jsou jejím řešením, musí platit rovnice, která vznikne odečtením druhé rovnice soustavy od první; po úpravě zní:

$$(a - 1)\,x + (1 - a)\,y = 0. \tag{19}$$

Nyní musíme rozbor štěpit.

1. Je-li $a - 1 \neq 0$, plyne z rovnice (19) vztah $x = y$. Dosadíme-li do třetí rovnice soustavy (15), zjistíme, že pro z musí platit

$$az = 1. \tag{20}$$

Nyní musíme rozbor štěpit znovu. Je-li $a \neq 0$, plyne z (20), že je

$$z = \frac{1}{a}. \tag{21}$$

Užijeme-li vztahu (21) a vztahu $x = y$ k dosazení do první rovnice soustavy (15), dostaneme po úpravě

$$(a + 1)x = \frac{a + 1}{a}. \tag{22}$$

Je-li nyní $a + 1 \neq 0$, plyne z (22), že je $x = \frac{1}{a}$. Obdobně vypočteme, že pro $a \neq -1$, $a \neq 0$, $a \neq 1$ platí $y = \frac{1}{a}$.

2. Všimněme si nyní vyloučených případů.

a) Je-li $a = -1$, má soustava (15) tvar

$$\begin{aligned} -x + y - z &= 1, \\ x - y - z &= 1, \\ -x + y - z &= 1 \end{aligned}$$

a řešení je $x = y$, y libovolné reálné číslo, $z = -1$.

b) Je-li $a = 0$, není rovnice (20) splněna pro žádné reálné číslo z, a tedy ani soustava (15) nemá pro $a = 0$ žádné řešení. (Všimněme si, že jsme vlastně dospěli ke sporu s předpokladem, že soustava (15) má řešení.)

c) Je-li $a = 1$, má soustava (15) tvar

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1, \\ x + y - z &= 1, \\ -x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

a řešení je $x = z$, $y = 1$, z libovolné reálné číslo.

Zkoušku provedeme dosazením hodnot $x = y = z = \frac{1}{a}$ do rovnic soustavy (15), které jsou jimi splněny. Pak shrneme diskusi do tabulky:

Parametr a	Počet řešení
$a = 0$	žádné
$a \neq -1, a \neq 0, a \neq 1$	jedno, $x = y = z = \frac{1}{a}$
$a = -1, a = 1$	nekonečně mnoho

Viděli jsme názorně, že je opravdu účelné rozhodovat o zvláštních případech dosazením parametru do rovnic soustavy. Rozbor je pak přehlednější a je usnadněno sledování celého myšlenkového postupu. Kromě toho se snadněji vyhneme chybám. Z rovnice (19) bychom např. mohli nesprávně soudit, že pro $a = 1$ vyhovuje soustavě (15) jakákoliv dvojice čísel x, y. Rovnice (19) je ovšem pro $a = 1$ totožností a žádný takový závěr z ní nelze učinit.

Před řešením soustavy rovnic (15) jsme vyřešili soustavu (16), která vznikla dosazením hodnoty parametru $a = 2$ do rovnic soustavy (15). Řešení soustavy (15) tím bylo usnadněno, neboť jsme v tomto zvláštním případě nalezli vhodný postup eliminace neznámých. Je možný i opačný postup. Řešíme-li soustavu rovnic s numerickými koeficienty, je možné některý z nich nahradit parametrem. Čtenáři doporučujeme, aby to několikrát provedl při řešení soustavy o dvou neznámých. Stejně cenné je malé obměňování řešené soustavy (změnou jednoho znamení, poněkud jiným umístěním parametru apod.). Např. po vyřešení soustavy rovnic (15) je možné zabývat se soustavou

$$\begin{aligned} ax + y - z &= 1, \\ x - ay + z &= 1, \\ -x + y + az &= 1. \end{aligned}$$

Úloha 5. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1, \\ x + ay + z &= a, \\ x + y + az &= a^2 \end{aligned} \tag{23}$$

o neznámých x, y, z, přičemž a je reálné číslo.

Předpokládejme, že soustava (23) má řešení. Pro čísla x, y, z, která jsou řešením soustavy (23), musí platit rovnice

$$(a - 1)\,x + (1 - a)\,y = 1 - a.$$

1. Je-li $a = 1$, má soustava (23) tvar

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ x + y + z &= 1, \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

a jejím řešením jsou trojice složené z libovolných reálných čísel x, y a z čísla $z = 1 - x - y$.

2. Je-li $a - 1 \neq 0$, musí platit

$$-x + y = 1,$$

tj.

$$y = 1 + x. \tag{24}$$

Pro čísla x, y, z, která jsou řešením soustavy (23), musí dále platit rovnice

$$(a - 1)\,x + (1 - a)\,z = 1 - a^2,$$

tj. po dělení číslem $1 - a$

$$-x + z = 1 + a.$$

Odtud plyne

$$z = x + a + 1. \tag{25}$$

Užijeme vztahů (24) a (25); po dosazení do první rovnice soustavy (23) a po úpravě dostaneme

$$(a + 2)\,x = -(a + 1). \tag{26}$$

a) Je-li $a + 2 \neq 0$, plyne z rovnice (26)

$$x = \frac{-(a + 1)}{a + 2}. \tag{27}$$

Dosazením do vztahů (24), (25) a po úpravě dostaneme

$$y = \frac{1}{a + 2}, \tag{28}$$

$$z = \frac{(a + 1)^2}{a + 2}. \tag{29}$$

b) Je-li $a = -2$, není rovnice (26) splněna pro žádné reálné číslo x, a tedy ani soustava (23) nemá pro $a = -2$ žádné řešení.

Zkouška. Dosadíme-li ze vzorců (27), (28), (29) do rovnic soustavy (23), zjistíme, že jsou splněny. Výsledek diskuse shrneme do tabulky:

Parametr a	Počet řešení
$a = -2$	žádné
$a \neq -2$, $a \neq 1$	jedno, viz (27), (28), (29)
$a = 1$	nekonečně mnoho

Zápis postupu řešení má být co nejpřehlednější. Závisí to do jisté míry na obratnosti a zkušenosti řešitele, záleží to však také na způsobu eliminace. Není pochyby o tom, že např. užití dosazovací metody při řešení soustavy (23) by bylo zdlouhavější než náš postup. Volba postupu řešení někdy ovlivní i štěpení rozboru. Výsledek diskuse však na způsobu řešení nezávisí. Jako příklad řešme znovu soustavu rovnic (1) ze str. 20.

Z první rovnice soustavy (1) dostaneme

$$ax = 1 - y. \tag{30}$$

Chceme-li vyjádřit neznámou x, musíme rozlišit dva případy.

1. Je-li $a = 0$, má soustava (1) tvar

$$\begin{aligned} y &= 1, \\ x &= 1, \end{aligned}$$

z něhož je řešení ihned patrno.

2. Je-li $a \neq 0$, plyne z rovnice (30)

$$x = \frac{1 - y}{a}. \tag{31}$$

Po dosazení do druhé rovnice soustavy (1) a po úpravě dostaneme rovnici

$$(1 - a^2)\,y = 1 - a. \tag{32}$$

Nyní provedeme štěpení rozboru znovu.

a) Je-li $|a| \neq 1$, potom z rovnice (32) plyne, že je $y = \dfrac{1}{1 + a}$, a po dosazení do (31), je $x = \dfrac{1}{1 + a}$.

b) Je-li $a = 1$, má soustava (1) tvar

$$\begin{aligned} x + y &= 1, \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

a vyhovuje jí každé x a $y = 1 - x$.

c) Je-li $a = -1$, má soustava (1) tvar

$$\begin{aligned} -x + y &= 1, \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

a nemá žádné řešení.

Po provedení zkoušky můžeme sestavit tabulku:

Parametr a	Počet řešení
$a = -1$	žádné
$a = 0$	jedno
$a \neq -1, a \neq 0, a \neq 1$	jedno
$a = 1$	nekonečně mnoho

Vidíme však, že vytčení hodnoty $a = 0$ je pro diskusi zbytečné a že tabulka může být sestavena takto:

Parametr a	Počet řešení
$a = -1$	žádné
$a \neq -1, a \neq 1$	jedno
$a = 1$	nekonečně mnoho

Shoduje se ovšem s tabulkou, kterou jsme získali při prvém řešení soustavy (1).

Úloha 6. Pro která celá čísla a má soustava rovnic

$$\begin{aligned} ax - 2y &= 3, \\ 3x + ay &= 4 \end{aligned} \tag{33}$$

řešení x, y, pro které platí $x > 0, y < 0$.

Předpokládejme, že soustava (33) má žádané řešení. Předpokládejme, že je $a \neq 0$, a vynásobme jím jednou prvou z rovnic soustavy (33), po druhé druhou z rovnic soustavy (33). Zjistíme, že každá dvojice čísel x, y, splňujících soustavu (33), splňuje též soustavu

$$\begin{aligned} a^2x - 2ay &= 3a, \\ 6x + 2ay &= 8 \end{aligned}$$

a také soustavu

$$\begin{aligned} 3ax - 6y &= 9, \\ 3ax + a^2y &= 4a \end{aligned}$$

a dále soustavu

$$\begin{aligned} (a^2 + 6)\, x &= 3a + 8, \\ (a^2 + 6)\, y &= 4a - 9. \end{aligned} \tag{34}$$

Protože číslo a je reálné, je $a^2 + 6 > 0$ a z (34) plyne

$$x = \frac{3a + 8}{a^2 + 6}, \qquad y = \frac{4a - 9}{a^2 + 6}.$$

Je-li kořen x je kladný, kořen y záporný, platí soustava nerovností

$$\frac{3a + 8}{a^2 + 6} > 0, \qquad \frac{4a - 9}{a^2 + 6} < 0.$$

Ježto je $a^2 + 6 > 0$, je nutně

$$3a + 8 > 0, \qquad 4a - 9 > 0,$$

což znamená, že pro číslo a splňující podmínky úlohy platí

$$-\frac{8}{3} < a < \frac{9}{4}, \qquad a \neq 0,$$

a protože nás zajímají pouze celá čísla, může a nabýt jen hodnot -2, -1, 1, 2; tyto hodnoty skutečně vyhovují, jak se přesvědčíme zkouškou.

Zbývá prozkoumat soustavu rovnic (33) pro $a = 0$. Potom jde o soustavu

$$\begin{aligned} -2y &= 3, \\ 3x &= 4, \end{aligned}$$

která má řešení $x = \frac{4}{3}$, $y = \frac{-3}{2}$. Tedy také číslo $a = 0$ podmínkám úlohy vyhovuje.

Shrneme-li dosavadní výsledky, zjistíme, že řešením úlohy jsou čísla -2, -1, 0, 1, 2. Zjistěte, jaký je geometrický význam úlohy 6.

Úloha 7. Pro která reálná čísla a má soustava rovnic z úlohy 5

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1, \\ x + ay + z &= a, \\ x + y + az &= a^2 \end{aligned} \qquad (23 \text{ bis})$$

za řešení: a) aspoň jednu trojici kladných čísel,
b) aspoň jednu trojici záporných čísel?

Při řešení úlohy 7 užijeme výsledků úlohy 5.

a) Řešením soustavy nerovností

$$\frac{-(a+1)}{a+2} > 0, \qquad \frac{1}{a+2} > 0, \qquad \frac{(a+1)^2}{a+2} > 0$$

zjistíme, že musí platit nerovnosti $-2 < a < -1$.

Kromě toho musíme zkoumat též hodnotu $a = 1$, neboť je možné volit čísla x, y, z tak, aby bylo $x > 0$, $y > 0$, $x + y < 1$; pak je také $z > 0$.

b) Řešením soustavy nerovností

$$\frac{-(a+1)}{a+2} < 0, \qquad \frac{1}{a+2} < 0, \qquad \frac{(a+1)^2}{a+2} < 0$$

zjistíme, že musí platit nerovnost $a < -2$. Hodnoty parametru $a = 1$ nelze použít, neboť není možné volit reálná čísla x, y, z tak, aby současně platilo $x < 0$, $y < 0$, $z = 1 - x - y < 0$. Všecky podmínky pro parametr a, které byly odvozeny jako nutné, jsou také postačující, jak se snadno přesvědčíme obrácením postupu.

Shrneme: požadavek a) je splněn pro hodnoty parametru a určené nerovnostmi $-2 < a < -1$ a pro $a = 1$;

požadavek b) pro hodnoty parametru a určené nerovností $a < -2$.

Na závěr kapitoly uveďme jednu z úloh minulých ročníků matematické olympiády.

Úloha 8. Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} + a(y-2) &= 1, \\ \frac{a}{x+1} + y - 1 &= 2a \end{aligned} \qquad (35)$$

o neznámých x, y, kde a je reálné číslo.

Předpokládejme, že soustava (35) má řešení. Zavedeme-li další neznámou z vztahem

$$z = \frac{1}{x + 1}, \tag{36}$$

musí pro každá x, y, která splňují soustavu (35), být splněna soustava

$$\begin{aligned} z + a(y - 2) &= 1, \\ az + y - 1 &= 2a \end{aligned} \tag{37}$$

o neznámých z, y.

Z prvé rovnice soustavy (37) dostaneme

$$z = 1 - a(y - 2) \tag{38}$$

a po dosazení do druhé rovnice soustavy a po úpravě

$$y(1 - a^2) = 1 + a - 2a^2. \tag{39}$$

Je-li $a^2 \neq 1$, plyne z rovnice (39)

$$y = \frac{1 + a - 2a^2}{1 - a^2},$$

neboli

$$y = \frac{(1 - a)(1 + 2a)}{1 - a^2}$$

neboli

$$y = \frac{1 + 2a}{1 + a}. \tag{40}$$

Užijme vztahu (40) a dosaďme do rovnice (38); dostaneme

$$z = \frac{1 + 2a}{1 + a}. \tag{40a}$$

Je-li $a \neq -\frac{1}{2}$, je podle (40a) $z \neq 0$ a ze vztahu (36) vypočteme $x = \frac{1}{z} - 1$; vyjde

$$x = \frac{1 + a}{1 + 2a} - 1,$$

neboli

$$x = \frac{-a}{1 + 2a}. \qquad (41)$$

Zkoumejme nyní vyloučené případy.

a) Je-li $a = -1$, není rovnice (39) splněna pro žádné reálné číslo y, tj. soustava rovnic (35) nemá řešení.

b) Je-li $a = -\frac{1}{2}$, je $z = 0$, rovnice (36) není řešitelná podle x a soustava (35) je opět neřešitelná.

c) Je-li $a = 1$, má soustava rovnic (35) tvar

$$\frac{1}{x + 1} + y - 2 = 1,$$

$$\frac{1}{x + 1} + y - 1 = 2.$$

Rovnice této soustavy jsou totožné. Vypočteme, že soustava je splněna pro každé $x \neq -1$ a $y = \dfrac{3x + 2}{x + 1}$.

Zkouškou se přesvědčíme, že vzorce (40), (41) dávají skutečně řešení soustavy (35).

Výsledek diskuse shrneme do tabulky:

Parametr a	Počet řešení
$a = -1, a = -\frac{1}{2}$	žádné
$a \neq -1, a \neq -\frac{1}{2}, a \neq 1$	jedno, viz (40), (41)
$a = 1$	nekonečně mnoho

Čtenáři doporučujeme, aby stanovil podmínky pro parametr a, za kterých mají oba kořeny x, y soustavy předepsané znamení. Pokuste se řešit soustavu (35) graficky. Každá z rovnic (35) vyjadřuje množinu rovnoosých hyperbol; průsečíky sobě přiřaděných hyperbol vyplní však složitější křivku 4. stupně. Poměrně jednoduše lze však řešit graficky soustavu (35) pro některé zvláštní hodnoty parametru a, např. pro $a = 0, 1, -1$.

Několik neřešených úloh

1. Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic

a) $x + y = a,$
$x + ay = 1;$

b) $|x| + |y| = a,$
$ax + 2y = 4;$

c) $ax + y = a,$
$a^2x - y = a^2 + 1$

o neznámých x, y, přičemž a je reálné číslo.

2. Jsou dány velikosti stran a, b trojúhelníka ABC, jehož těžnice příslušné k stranám a, b svírají pravý úhel. Vypočtěte velikost strany c. Stanovte podmínky řešitelnosti této úlohy.

3. Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic

a) $ax + by = 0,$
$a^2x - by = ab;$

b) $(a + b)\,x + (a - b)\,y = a^2 + b^2,$
$(a - b)\,x + (a + b)\,y = a^2 - b^2$

o neznámých x, y, přičemž a, b jsou reálná čísla.

4. Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic

a) $(a+1)x + y + z = a + 1,$
$x + (a+1)y + z = a + 3,$
$x + y + (a+1)z = -2a - 4;$

b) $ax + y + z = 4,$
$x + by + z = 3,$
$x + 2by + z = 4$

o neznámých x, y, z, přičemž a, b jsou reálná čísla.

Vyhledejte si ve sbírkách úloh podobné úlohy a řešte je!