O funkcích

2. Další vlastnosti funkcí

In: Miroslav Šisler (author); Jiří Jarník (author): O funkcích. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1962. pp. 10–20.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403460

2. DALŠÍ VLASTNOSTI FUNKCÍ

•

Je vhodné zavést nejdříve označení pro některé množiny, se kterými budeme často pracovat.

Jsou-li a, b dvě čísla, $a < b$, pak množinu čísel x, pro něž současně platí nerovnosti $a \leqq x$, $x \leqq b$ (stručně píšeme často $a \leqq x \leqq b$), nazýváme *uzavřený interval* a označujeme ji symbolem $\langle a, b \rangle$. Množina čísel, pro něž platí obdobné ostré nerovnosti (tj. $a < x < b$), je *otevřený interval*, který označujeme (a, b). Podobně definujeme i další typy intervalů, jak je ukázáno v tabulce na str. 11.

Všimněte si zejména intervalů neomezených a rozmyslete si jejich geometrické znázornění na číselné ose! Např. interval $\langle 3, \infty)$ je znázorněn polopřímkou s počátečním bodem 3, na níž jsou znázorněna čísla větší než 3. Také číslo 3 patří do tohoto intervalu.

Často hovoříme o *vnitřních bodech* intervalu. Jsou to všechna čísla z daného intervalu s výjimkou čísel a a b, tzv. „krajních bodů". V případě omezeného intervalu jsou tedy jeho vnitřní body právě všechna čísla z otevřeného intervalu (a, b). Podobně v případě neomezeného intervalu jsou vnitřní body intervalu právě všechna čísla tohoto intervalu s výjimkou „krajního bodu" a.

Jistě jste si povšimli, že často hovoříme o číslech jako o bodech. K tomu nás vede geometrické znázornění čísel jako bodů na číselné ose. Tento způsob vyjádření je v matematice běžný a je třeba si na něj zvyknout.

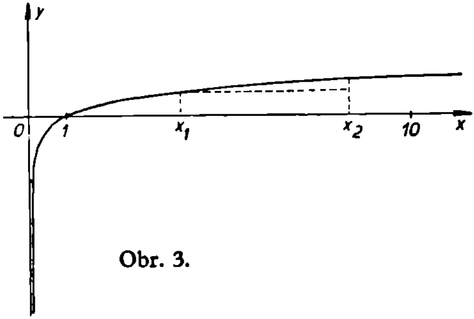
Obraťme se nyní již k pojmům, týkajícím se přímo funkcí. Ze školy známe funkci $y = \log x$, definovanou pro

Množina čísel x, pro něž platí nerovnosti	Název		Označení
$a \leqq x \leqq b$	uzavřený interval	omezené intervaly	$\langle a, b\rangle$
$a < x < b$	otevřený interval	omezené intervaly	(a, b)
$a \leqq x < b$	polouzavřený interval	omezené intervaly	$\langle a, b)$
$a < x \leqq b$	polouzavřený interval	omezené intervaly	$(a, b\rangle$
$x \leqq a$	uzavřený interval	neomezené intervaly	$(-\infty, a\rangle$
$a \leqq x$	uzavřený interval	neomezené intervaly	$\langle a, \infty)$
$x < a$	otevřený interval	neomezené intervaly	$(-\infty, a)$
$a < x$	otevřený interval	neomezené intervaly	(a, ∞)
	množina reálných čísel	neomezené intervaly	$(-\infty, \infty)$

všechna kladná čísla x. Její graf je křivka, nakreslená na obr. 3. Jdeme-li po této křivce zleva doprava (tj. ve směru kladné poloosy x), vidíme, že křivka stoupá. Je to způsobeno tím, že funkční hodnoty logaritmické funkce rostou, což můžeme matematicky říci takto: Zvětšíme-li číslo x, zvětší se i logaritmus; nebo přesněji: Je-li $0 < x_1 < x_2$, je $\log x_1 < \log x_2$.

Tuto názornou vlastnost funkcí budeme nyní definovat obecně. Uvažujme nějaký interval I (lhostejno jakého typu) a funkci f.

Nechť x_1, x_2 jsou libovolná dvě čísla z intervalu I, pro něž je $x_1 < x_2$. Platí-li nerovnost $f(x_1) < f(x_2)$, říkáme, že funkce f je rostoucí v intervalu I. Platí-li za stejných předpokladů nerovnost $f(x_1) > f(x_2)$, nazýváme funkci f klesající v intervalu I.



Obr. 3.

Příklad 3. V příkladu 2 jsme se snažili nakreslit graf funkce $g(x) = \dfrac{1}{2x - 1}$. Dokážeme nyní, že tato funkce je klesající v intervalu $(-\infty, \frac{1}{2})$ a také v intervalu $(\frac{1}{2}, \infty)$.

Uvažujme nejdříve první interval. Jsou-li x_1, x_2 čísla z intervalu $(-\infty, \frac{1}{2})$, platí $x_1 < \frac{1}{2}$, $x_2 < \frac{1}{2}$. Nechť zároveň platí $x_1 < x_2$. Z této nerovnosti plyne, že $2x_1 - 1 < 2x_2 - 1$, při čemž výrazy na obou stranách nerovnosti jsou čísla téhož znaménka (záporná). Pro převrácené hodnoty platí tedy obrácená nerovnost

$$\frac{1}{2x_1 - 1} > \frac{1}{2x_2 - 1}$$

čili $g(x_1) > g(x_2)$. Tím jsme dokázali, že funkce $g(x) = \frac{1}{2x-1}$ je klesající v intervalu $(-\infty, \frac{1}{2})$. Pro interval $(\frac{1}{2}, \infty)$ je důkaz obdobný.

Nyní již vidíme, že graf funkce g, jak je na obr. 2, není správný, neboť přibližně v intervalech $(0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 1)$ nakreslená křivka stoupá, zatímco podle našeho výsledku má klesat.

Další pojmy, související dosti úzce s pojmy právě zavedenými, jsou pojmy maxima a minima funkce.

Maximum (minimum) funkce f v intervalu I je největší (nejmenší) hodnota, jíž funkce v intervalu I nabývá.

Matematicky můžeme naši definici formulovat takto: *Číslo m nazýváme maximem (minimem) funkce f v intervalu I, jestliže platí:*

1. *Existuje číslo x_0 z intervalu I tak, že $f(x_0) = m$.*
2. *Pro libovolné číslo x z intervalu I platí $f(x) \leqq m$ $(f(x) \geqq m)$.*

Příklad 4. Stanovíme maximum funkce $h(x) = 2 \sin x - \cos 2x$ v intervalu $(-\infty, \infty)$. Protože $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, platí pro libovolné x

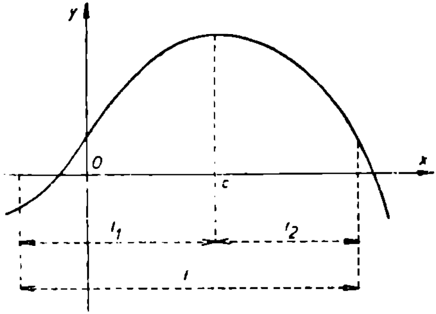
$$h(x) = 2 \sin x - \cos 2x = 2 \sin x - \cos^2 x + \sin^2 x = 2 \sin^2 x + 2 \sin x - 1.$$

Protože pro každé x platí $|\sin x| \leqq 1$, je také $\sin^2 x \leqq 1$ a tedy i $h(x) \leqq 2 . 1 + 2 . 1 - 1 = 3$. Přitom funkce h skutečně nabývá hodnoty 3, např. pro $x_0 = 90°$. Je tedy číslo 3 maximem funkce h v intervalu $(-\infty, \infty)$.

Všimněte si, že téže hodnoty 3 nabývá funkce h pro nekonečně mnoho hodnot proměnné, totiž pro $x_k = 90° + k . 360°$, kde k je libovolné celé číslo. To však neodporuje definici maxima.

Nyní dokážeme větu, která je někdy výhodná při stanovení maxima či minima funkce v daném intervalu.

Mějme dán interval I a jeho vnitřní bod c. Definujme dále intervaly I_1 a I_2 takto (viz obr. 4):



Obr. 4.

I_1 je množina čísel x z intervalu I, pro která platí nerovnost $x \leqq c$;
I_2 je množina čísel z intervalu I, pro která platí nerovnost $x \geqq c$.
(Přesvědčte se, že takto definované množiny I_1, I_2 jsou skutečně intervaly!) Platí věta:

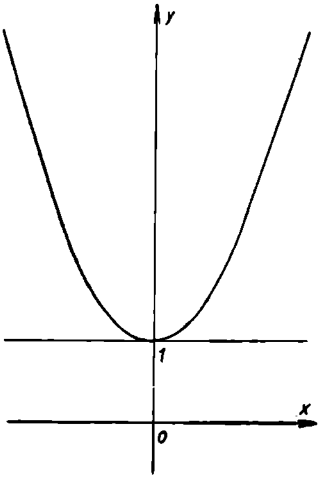
Je-li funkce f, definovaná pro všechna čísla z intervalu I, rostoucí v intervalu I_1 a klesající v intervalu I_2, potom nabývá v bodě $x = c$ maxima v intervalu I, rovného číslu $f(c)$.

Důkaz této věty je snadný a plyne přímo z definic. Máme dokázat, že číslo $f(c)$ je maximem v intervalu I, tj. že pro každé x z intervalu I platí $f(x) \leqq f(c)$. Buď tedy x libovolné číslo z intervalu I a nechť $x \neq c$. Potom leží x buď v intervalu I_1 nebo v intervalu I_2. Leží-li x v I_1, je $x < c$. Protože funkce f je v I_1 rostoucí, platí podle definice $f(x) < f(c)$. Leží-li x v I_2, je $c < x$. Protože funkce f je v I_2 klesající, platí podle definice $f(c) > f(x)$. Je-li $x = c$, je $f(x) = f(c)$. Pro libovolné číslo x z intervalu I platí tedy nerovnost $f(x) \leqq f(c)$ (rovnost nastává jen pro $x = c$). Číslo $f(c)$ je tedy maximem funkce f v intervalu I. Důkaz je ukončen.

Pro minimum platí obdobná věta:

Je-li funkce f, definovaná pro všechna čísla z intervalu I, klesající v intervalu I_1 a rostoucí v intervalu I_2, potom nabývá v bodě $x = c$ minima v intervalu I, rovného číslu $f(c)$.

Velmi jednoduchým a přitom závažným pojmem je pojem ohraničenosti a neohraničenosti funkce. Všimněme si např. funkce $y = x^2 + 1$. Graf této funkce je parabola, která leží v „horní" polorovině, určené rovnoběžkou s osou x ve vzdálenosti jedna (viz obr. 5). Funkční hodnoty naší



Obr. 5.

funkce jsou tedy zdola ohraničeny číslem jedna: ať zvolíme jakékoliv číslo x, je vždy $y \geqq 1$. To nás vede k obecné definici, kterou nyní vyslovíme.

Říkáme, že funkce f je v intervalu I shora (zdola) ohraničená, jestliže existuje číslo c tak, že pro každé x z intervalu I platí $f(x) \leqq c$ ($f(x) \geqq c$). Je-li funkce f v intervalu I ohraničená shora i zdola, říkáme prostě, že je v intervalu I ohraničená.

Souvislost tohoto pojmu s předchozími nám ukazuje tato jednoduchá věta, jejíž důkaz přenecháváme čtenáři:

Má-li funkce f v intervalu I maximum (minimum), je v tomto intervalu shora (zdola) ohraničená.

Další jednoduchou větu si zde dokážeme:

Je-li f funkce, ohraničená v I, pak existuje číslo d tak, že pro každé x z intervalu I platí $|f(x)| \leqq d$.

Důkaz: Je-li f ohraničená v I, pak existují podle definice dvě čísla c_1, c_2 tak, že pro každé x z I je $f(x) \leqq c_1$, $f(x) \geqq c_2$. Větší z čísel $|c_1|$, $|c_2|$ označme d. (Je-li $|c_1| = |c_2|$, je také $d = |c_1|$.)

Je-li $f(x) \geqq 0$, platí postupně

$$|f(x)| = f(x) \leqq c_1 \leqq d;$$

je-li $f(x) < 0$, platí obdobně

$$|f(x)| = -f(x) \leqq -c_2 \leqq d.$$

Platí tedy v každém případě $|f(x)| \leqq d$, čímž je důkaz ukončen.

Příklad 5. V příkladu 4 jsme dokázali, že funkce $h(x) = 2 \sin x - \cos 2x$ je shora ohraničená v $(-\infty, \infty)$, neboť pro libovolné x platí $h(x) \leqq 3$. Snadno ukážeme, že funkce h je ohraničená též zdola. Je totiž $\sin x \geqq -1$ a tedy $2 \sin x \geqq -2$. Dále je $\cos 2x \leqq 1$ čili $-\cos 2x \geqq -1$. Sečtením obou nerovností $2 \sin x \geqq -2$, $-\cos 2x \geqq -1$ dostaneme nerovnost

$$2 \sin x - \cos 2x \geqq -3.$$

Dokázali jsme tedy, že funkce h je ohraničená v intervalu $(-\infty, \infty)$, neboť je tam ohraničená shora i zdola. Je dobře si uvědomit, že číslo -3 nemusí být (a ve skutečnosti také není) minimem funkce h, neboť nevíme, zda existuje číslo x_0 tak, že $h(x_0) = -3$.

Příklad 6. V příkladech 2 a 3 jsme vyšetřovali funkci $g(x) = \frac{1}{2x-1}$. Graf, získaný v příkladu 2 pomocí tabulky funkčních hodnot, nevystihoval skutečný průběh funkce. Nyní ukážeme, že tato funkce není shora ohraničená v intervalu $(\frac{1}{2}, 1)$. To nám umožní nakreslit správný graf funkce g.

Důkaz provedeme nepřímo. Předpokládejme, že je funkce g v intervalu $(\frac{1}{2}, 1)$ ohraničená shora. Potom podle definice existuje číslo c tak, že pro všechna x z uvedeného intervalu platí $\frac{1}{2x-1} \leqq c$. Můžeme předpokládat, že $c > 1$*). Pokusme se najít takové x_0 z intervalu $(\frac{1}{2}, 1)$, pro něž nerovnost $\frac{1}{2x_0 - 1} \leqq c$ neplatí, takže platí

$$\frac{1}{2x_0 - 1} > c.$$

Z této nerovnosti plyne dále

$$\frac{1}{c} > 2x_0 - 1,$$

$$\frac{1+c}{c} > 2x_0,$$

$$\frac{1+c}{2c} > x_0.$$

*) Je zřejmé, že je-li funkce f ohraničená shora číslem c_1, je tím spíše ohraničená shora každým číslem $c_2 > c_1$.

Protože $\dfrac{1+c}{2c} > \dfrac{c}{2c} = \dfrac{1}{2}$, můžeme volit x_0 tak, aby platilo

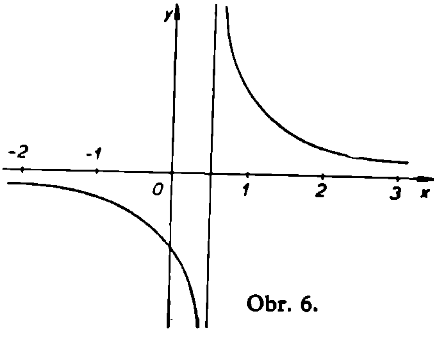
$$\frac{1}{2} < x_0 < \frac{1+c}{2c}.$$

Protože $\dfrac{1+c}{2c} < 1$, jak se snadno zjistí, leží x_0 v intervalu $(\frac{1}{2}, 1)$. Pro x_0 však platí

$$\frac{1}{2x_0 - 1} > \frac{1}{2\,\dfrac{1+c}{2c} - 1} = \frac{c}{1 + c - c} = c.$$

To je však ve sporu s tvrzením, že daná funkce je shora ohraničená číslem c.

Podobně lze dokázat, že funkce g není zdola ohraničená v intervalu $(0, \frac{1}{2})$.



Obr. 6.

Vezmeme-li v úvahu poznatky z příkladů 2, 3, můžeme již sestrojit graf dané funkce. Vidíme jej na obr. 6. Rovnoběžka s osou y, pro niž $x = \frac{1}{2}$, je tzv. asymptota grafu. Graf se k ní „neomezeně“ přibližuje, ale nikdy ji neprotne.

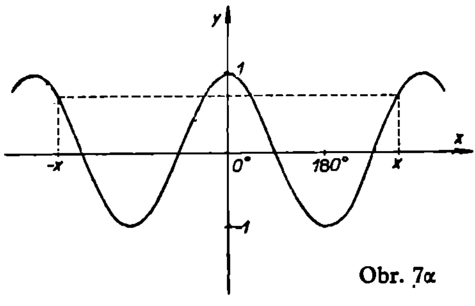
Vedle pojmů „funkce klesající v intervalu", „maximum funkce v intervalu", „funkce ohraničená v intervalu" atd., budeme také často užívat pojmů „funkce klesající", „maximum funkce", „funkce ohraničená" atd. Jejich definice se liší od těch, které jsme vyslovili, jen v jediném: Mluvíme-li v definici o „čísle z intervalu I", je třeba místo toho říci „číslo z oboru vyšetřované funkce", tedy např.:

Funkce je shora ohraničená, jestliže existuje číslo c tak, že pro každé x z oboru funkce platí $f(x) \leqq c$.

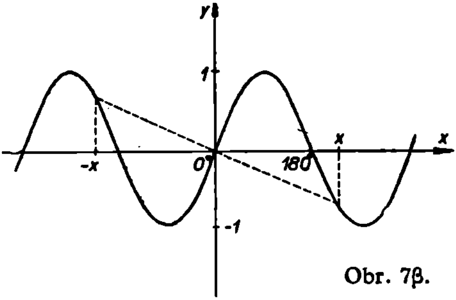
Tato úprava našich definic nám dává možnost zkoumat funkci vcelku, i když jejím oborem není interval (srovnej dále úlohy 4, 5 aj.).

Viděli jsme, že ke zkoumání téměř všech vlastností funkcí, o kterých jsme dosud mluvili, bylo třeba počítat s nerovnostmi. Bez dobré znalosti nerovností a obratnosti při zacházení s nimi se neobejdeme. Na nerovnostech si můžeme také procvičit metodu nepřímého důkazu, která dělává po logické stránce potíže. Jednu ukázku nepřímého důkazu jsme již viděli v příkladu 6.

Čtenáři jsou dobře známy funkce sinus a kosinus. Na nich si můžeme ukázat dvě vlastnosti, které jsou často užitečné při sestrojování grafu. Platí totiž $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$. Geometricky to znamená, že graf



Obr. 7α



Obr. 7β.

funkce cos x je souměrný podle osy y (viz obr. 7α), graf funkce sin x je středově souměrný podle počátku (viz obr. 7β). Zobecněním těchto vlastností je následující definice:

Jestliže pro každé x z oboru funkce f platí, že $f(x) = f(-x)$, pak funkci f nazýváme sudou funkcí; je-li $f(x) = -f(-x)$, nazýváme funkci f lichou funkcí.

Příklad 7. Protože $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$, $(-x)^{2k} = x^{2k}$ pro libovolné přirozené číslo k, je zřejmá tato věta:

Jsou-li v mnohočlenu

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

rovny nule všechny koeficienty při lichých mocninách proměnné, je funkce f (daná tímto mnohočlenem) sudá. Jsou-li rovny nule všechny koeficienty při sudých mocninách (včetně absolutního členu), je funkce f lichá.

Nakreslete si sami grafy jednoduchých funkcí $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$ a také funkce konstantní $f_3(x) = 1$! Které z těchto funkcí jsou sudé a které liché?