1. ZÁKLADNÍ POJMY

V tomto článku zopakujeme základní pojmy z nauky o funkcích, s nimiž se již čtenář seznámil ve škole. V celé knížce budeme pracovat pouze s reálnými čísly. Nejprve připomeneme definici funkce.

Funkce je předpis, který každému číslu x z určité množiny M přiřazuje právě jedno číslo.

V matematice označujeme funkce většinou písmeny (f, g, h, ..., F, G, ...). Některé často používané funkce mají svá stálá označení (např. sin, log, tg apod.). Množinu čísel, kterou jsme v definici označili M, nazýváme *oborem funkce* nebo *definičním oborem funkce;* x je tzv. *proměnná.* Číslo y, přiřazené funkcí f číslu x, označujeme obvykle $f(x)$ a nazýváme je *funkční hodnotou funkce f pro číslo x* nebo *hodnotou funkce f v bodě x.*

Aby nějaký předpis definoval funkci, musí každému číslu x z definičního oboru přiřazovat právě jedno číslo y. Jinými slovy, je-li dáno číslo x z oboru funkce f, musíme vždy umět jednoznačně rozhodnout, které číslo je funkční hodnota $f(x)$. Není tedy funkcí např. předpis: „Danému kladnému číslu x přiřaď číslo, které umocněno na druhou dá x“. Existují totiž vždy dvě taková čísla, lišící se znaménkem: $\sqrt{x}$ a $-\sqrt{x}$.

Funkce v naší knížce budou zadávány vzorcem, z kterého vypočteme hodnotu funkce pro libovolné číslo z jejího oboru. Např. říkáme „buď dána funkce $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 5}{x - 1}$“

nebo „buď dána funkce $y = \frac{x^2 + 3x - 5}{x - 1}$“. Při zadávání funkce tedy často vůbec nehovoříme o jejím oboru. V takovém případě mlčky předpokládáme, že oborem funkce je množina všech čísel x, pro která má výraz definující funkci smysl. Pro funkci $y = \frac{x^2 + 3x - 5}{x - 1}$ je tedy oborem množina všech čísel s výjimkou čísla $x = 1$. Stanovení definičního oboru je prvořadou otázkou při zkoumání každé funkce.

V této knížce se budeme zabývat hlavně úlohami, které souhrnně nazýváme zkoumáním průběhu funkce. Slovo „průběh“ naznačuje, že půjde o názorné vlastnosti funkce, těsně svým významem spjaté s grafem funkce. Zopakujeme si proto své poznatky o grafickém znázorňování funkcí.

Zvolme v rovině pravoúhlou soustavu souřadnic. To znamená, jak víme, že v rovině nakreslíme dvě číselné osy tak, aby byly navzájem kolmé a aby jejich průsečík byl na obou osách počátkem.

Na ose x zvolme bod x z oboru zkoumané funkce f a v tomto bodě vztyčme k ose x kolmici. Na ni nanesme délku $|f(x)|$ a to ve směru kladné poloosy y, je-li $f(x) > 0$ a ve směru záporné poloosy y, je-li $f(x) < 0$. Dostaneme tak v rovině bod, který označujeme $[x, f(x)]$. Čísla x a $f(x)$ jsou souřadnice tohoto bodu.

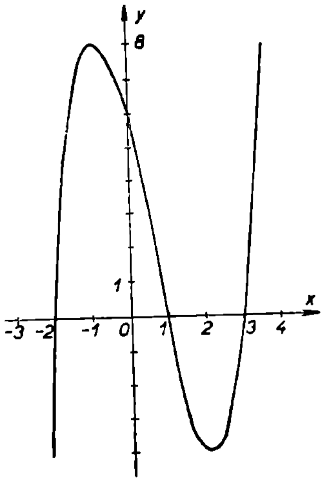
Grafem funkce f nazýváme množinu bodů $[x, f|x|]$, kde x je libovolné číslo z oboru funkce f.

Graf funkce nemůžeme zpravidla sestrojit přesně. Při kreslení grafu můžeme postupovat tak, že sestavíme tabulku, do níž zapisujeme funkční hodnoty $f(x)$ pro určité zvolené hodnoty proměnné x. Podle této tabulky nakreslíme body $[x, f(x)]$ a spojíme je pokud možno plynulou, co nejjednodušší křivkou. Tato křivka je pak přibližným grafickým znázorněním funkce f.

Příklad 1. Nakreslíme graf funkce $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Oborem této funkce je celá množina reálných čísel. Při kreslení grafu se omezíme např. na hodnoty proměnné, pro něž platí $-3 \leqq x \leqq 4$. Sestavíme tabulku funkčních hodnot dané funkce pro celočíselné hodnoty proměnné:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-24	0	8	6	0	-4	0	18

Sestrojíme-li podle této tabulky příslušné body $[x, f(x)]$ a spojíme-li je plynulou křivkou, dostaneme obr. 1.

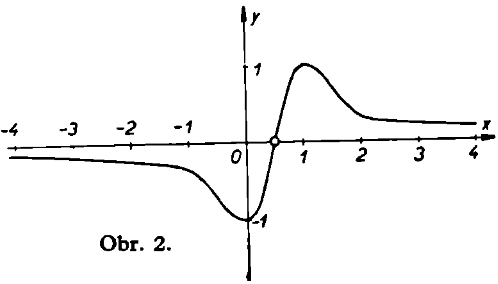


Obr. 1.

Příklad 2. Nakreslíme graf funkce $g(x) = \frac{1}{2x-1}$. Oborem této funkce je celá množina reálných čísel s výjimkou čísla $x = \frac{1}{2}$, pro něž zlomek nemá smysl. Sestavme tabulku jako v minulém příkladu:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{3}$	-1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{7}$

Nakreslíme-li podle této tabulky příslušné body $[x, g(x)]$ a spojíme-li je plynulou křivkou, dostaneme obr. 2. (Bod $[\frac{1}{2}, 0]$ označený kroužkem ovšem do grafu nepatří.) Snadno se však přesvědčíme, že v blízkosti hodnoty proměnné $x = \frac{1}{2}$ zobrazuje tato křivka graf funkce g velmi nepřesně, ba přímo chybně. K tomuto závěru nás dovede následující úvaha:



Obr. 2.

Zvolíme-li hodnotu proměnné hodně blízkou číslu $\frac{1}{2}$, liší se číslo $2x-1$ jen velmi málo od nuly a tedy jeho převrácená hodnota je (v absolutní hodnotě) velmi velká. Např.

pro $x = 0{,}51$ dostaneme $g\ (0{,}51) = 50$, pro $x = 0{,}49$ je $g\ (0{,}49) = -50$. Na obr. 2 však naopak body grafu pro hodnoty proměnné blízké číslu $\frac{1}{2}$ leží blízko osy x.

Na uvedeném příkladu vidíme, že i poměrně jednoduché funkce vyžadují hlubšího zkoumání než je pouhý výpočet některých funkčních hodnot. Proto si v následujícím článku zavedeme některé pojmy, usnadňující nám zkoumání funkcí.