Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách

V. část. Posunutí

In: Jaroslav Šedivý (author): Shodná zobrazení v konstruktivních úlohách. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1962. pp. 52–67.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403452

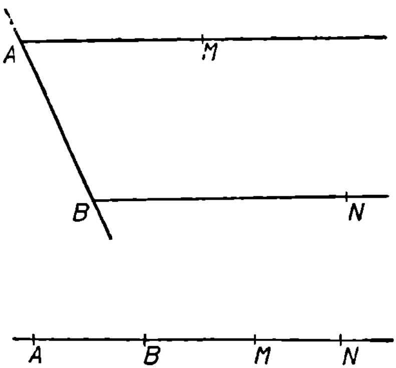
POSUNUTÍ

●

Dříve než si uvedeme základní věty o posunutí v rovině, zmiňme se stručně o pojmu souhlasně rovnoběžných polopřímek.

Jsou-li AM, BN dvě polopřímky ležící na rovnoběžkách a leží-li obě v téže polorovině s hraniční přímkou AB, nazýváme je souhlasně rovnoběžné. Dvě polopřímky ležící na téže přímce považujeme za souhlasně rovnoběžné, je-li jedna z nich částí druhé.

Polopřímky AM, BN na obr. 32a, b jsou zřejmě souhlasně rovnoběžné. Pro nás je důležité, abychom si uvědo-



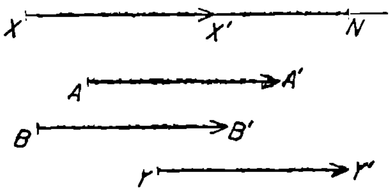
Obr. 32 a, b

mili, že při obvyklém značení vrcholů lichoběžníků a rovnoběžníků písmeny $ABCD$ dosáhneme vždy toho, že je polopřímka AB souhlasně rovnoběžná s polopřímkou DC. Navzájem opačné polopřímky nejsou souhlasně rovnoběžné, ani polopřímky AB, BA nejsou souhlasně rovnoběžné.

Je-li dána polopřímka AB a bod X, existuje právě jedna polopřímka XY souhlasně rovnoběžná s AB.

Pomocí souhlasně rovnoběžných polopřímek můžeme přesně vyjádřit předpis, kterým přiřazujeme každému bodu roviny obraz v některém posunutí.*)

Jsou-li dány dva různé body A, A', přiřazujeme v posunutí $T\ (A \rightarrow A')$ bodu X bod X' tak, že sestrojíme polopřímku XN souhlasně rovnoběžnou s AA' a na ní sestrojíme bod X' tak, aby bylo $AA' = XX'$ (obr. 33).



Obr. 33

Jsou-li AM, BN dvě různé souhlasně rovnoběžné polopřímky, existuje právě jedno posunutí v rovině, které zobrazí polopřímku AM na polopřímku BN.

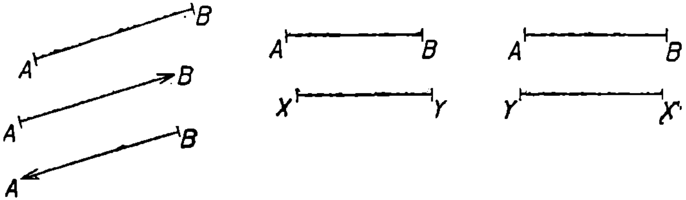
Vyznačíme-li v obrázku 33 přiřazení čárkovaných bodů nečárkovaným pomocí šipek, řeknete si jistě, že jsme za-

*) Posunutí značíme obvykle písmenem T, protože se nazývá též translace. Písmenem P označujeme zpravidla podobná zobrazení.

kreslili sobě rovné vektory AA', BB'. Skutečně můžeme říci, že vektor $AA' = BB'$, jestliže body A', B' jsou obrazy bodů A, B v témž posunutí v rovině.*)

Ke každému posunutí T ($A \to A'$) existuje inverzní zobrazení T^{-1} ($A' \to A$), které je vždy různé od T.

Nakreslete si podle obrázku 33 takový obrázek, na kterém bude vyznačeno pomocí vektorů přiřazení bodů v T^{-1}.



Obr. 34 a, b, c

Je-li dána úsečka AB, můžeme ji označit jako vektor (orientovat) dvěma různými způsoby (obr. 34a), buď přidáme šipku k bodu B nebo k bodu A. Víme již, že existuje posunutí T ($A \to B$) a druhé, k němu inverzní, T^{-1} ($B \to A$). Tato dvojice posunutí vystupuje při řešení úloh nerozlučně spolu. V úlohách se často setkáme s dvojicí shodných a rovnoběžných úseček (obr. 34b, c).

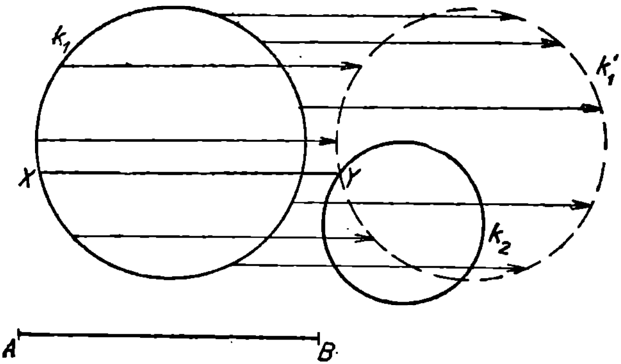
Jsou-li dány dvě rovnoběžné a shodné úsečky AB, XY, existují právě dvě posunutí zobrazující současně jeden krajní bod každé z daných úseček v druhý. Jsou to posunutí T_1 ($A \to B$), T_2 ($B \to A$).

Na obr. 34b zobrazuje T_1 ($A \to B$, $X \to Y$), kdežto na obr. 34c zobrazuje T_2 ($A \to B$, $Y \to X$).

*) Na základě pojmu vektoru se učili o posunutí ti z vás, kteří používali pokusné učebnice pro 11. třídu dvanáctiletých středních škol.

Podobně jako u středové a osové souměrnosti začněme i zde s úlohami na „vzpříčení" úsečky mezi danými dvěma útvary. Vzhledem k vlastnostem posunutí to však budou příčky rovnoběžné a shodné s danou úsečkou.

Úloha 18. *Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 a dvojice různých bodů A, B. Sestrojte úsečku XY rovnoběžnou s AB tak, aby bod X ležel na k_1, bod Y na k_2 a aby $XY = AB$.*



Obr. 35

Rozbor. Na obr. 35 je zobrazena dvojice úseček AB, XY. Body X, Y jsou neznámé, víme však, že bod X přejde v Y jednou z translací T_1 ($A \to B$), T_2 ($B \to A$). Nevíme, který bod X kružnice k_1 přejde v hledaný bod Y kružnice k_2, můžeme proto opět „zkoušet" větší počet bodů kružnice k_1. Pozorujeme, že obrazy bodů kružnice k_1 (hroty šipek) vytvářejí kružnici. Protože v posunutí je obrazem každé kružnice kružnice shodná s původní, docházíme k tomuto výsledku:

Bod Y leží 1. *na kružnici* $k_2 \equiv (S_2, r_2)$,

2. *na kružnici* $k'_1 \equiv (S'_1, r_1)$, *která je obrazem kružnice* $k_1 \equiv (S_1, r_1)$ *v posunutí* T_1 $(A \rightarrow B)$ *nebo* T_2 $(B \rightarrow A)$.

Konstrukce.

K_1: *Sestrojím kružnici* $k'_1 \equiv (S'_1, r_1)$, *která je obrazem kružnice* K_1 *v posunutí* T_1 $(A \rightarrow B)$,

K_2: *Sestrojím společný bod Y kružnic* k'_1, k_2.

K_3: *Sestrojím bod X jako obraz bodu Y v* T^{-1}_1 $(B \rightarrow A)$.

K_4: *Sestrojím úsečku XY.*

Připojte sami ještě obdobný popis konstrukce v případě, že použijeme posunutí T_2 $(B \rightarrow A)$.

Důkaz konstrukce proveďte sami, je velmi jednoduchý.

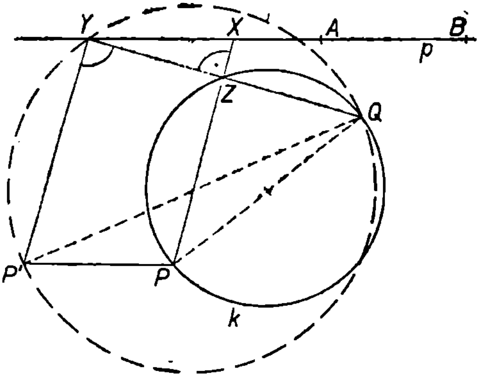
Diskuse. Všechny konstrukce kromě K_2 jsou jednoznačné. Počet řešení úlohy závisí jedině na počtu společných bodů kružnice k_2 s obrazy kružnice k_1 v posunutích T_1, T_2. Úloha má proto někdy i nekonečně mnoho řešení. Nejvyšší konečný počet řešení je roven čtyřem, dále může mít úloha tři, dvě, jedno nebo žádné řešení.

Vidíte, že řešení úloh pomocí posunutí je ještě náročnější na formulaci textu než řešení úloh v kapitolách III a IV. Komplikace způsobuje existence dvou posunutí, která mohou úlohu řešit. Připomeňte si znovu obsah poznámky za úlohou 6. Snadno pak vyřešíte další úlohu.

Úloha 19. *Je dána dvojice přímek a, b a úsečka MN. Sestrojte čtverec XYZU o straně XY = MN a rovnoběžné s MN, je-li dána podmínka, aby bod X ležel na přímce a a bod Y na b.*

Řešení úlohy předpokládá sestrojení úsečky *XY* s uvedenými vlastnostmi. Kolik pak existuje čtverců, které mají stranu *XY*?

Úloha 20. *Je dána kružnice k s vyznačeným průměrem PQ a nesečna p kružnice k s vyznačenou úsečkou AB. Sestrojte bod Z kružnice k, který má tu vlastnost, že přímky PZ, QZ protínají p v bodech X, Y tak, že je $XY = AB$.*



Obr. 36

Rozbor. Je-li bod Z na obr. 36 řešením úlohy, je úsečka $XY = AB$. Protože je přímka XY rovnoběžná s AB, máme možnost převést bod X v bod Y jedním z posunutí T_1 $(A \to B)$, T_2 $(B \to A)$. Zobrazme v tomto posunutí bod P v bod P'. Na obr. 36 jde o posunutí T_2 $(B \to A$, $X \to Y$, $P \to P')$. Přímka PX je rovnoběžná s přímkou $P'X' \equiv P'Y$; protože je PX kolmá na QY, je také $P'Y$ kolmá na QY. Docházíme tedy k závěru:

Bod Y je obrazem bodu X v T_2 $(B \to A)$,

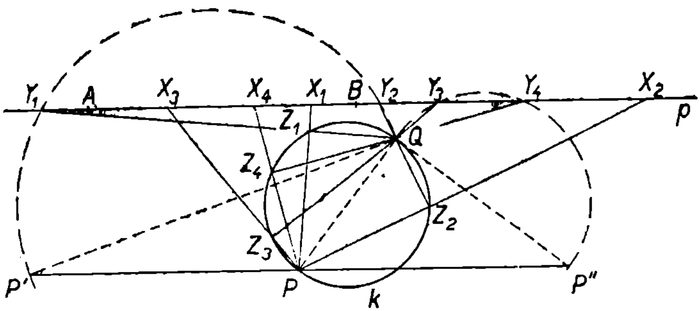
leží 1. *na přímce p,*

2. *na Thaletově kružnici o průměru $P'Q$.*

Stejně tak by ovšem mohl být bod Y obrazem bodu X

v posunutí T_1 ($A \to B$). Nakreslete si pro tento případ obrázek.

Ostatní části řešení této úlohy si můžete zpracovat sami, vodítkem vám může být řešení úlohy 11. Dostanete nejvýše čtyři různá řešení (obr. 37).



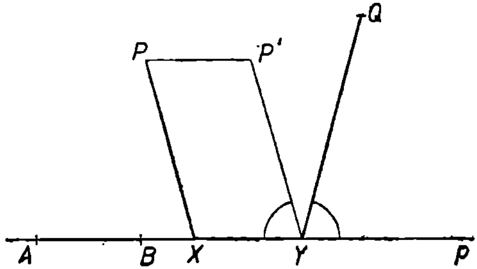
Obr. 37

Dosud všechny úlohy této kapitoly byly polohové a vcelku jednoduché, našli jsme okamžitě množinu bodů, které náleží neznámý bod. Častější je případ, kdy po ztotožnění dvou neznámých bodů posunutím dojdeme k úloze o jednom neznámém bodu, kterou musíme řešit některým dalším způsobem.

Úloha 21. *Na příčném profilu terénu jsou dány body P, Q a přímka p, na níž leží dno výkopu pro železniční trať. Narýsujte profil výkopu, jestliže šířka jeho dna je AB a stěny výkopu mají týž spád.*

Řešení. Na obr. 38 je narýsováno řešení úlohy. Použijeme osvědčeného způsobu a sestrojíme obraz P' bodu P v T_1 ($A \to B$, $X \to Y$). Snadno si dokážete, že je přímka PX

rovnoběžná s přímkou $P'Y$. Je také zřejmé, že bod Y je tím bodem přímky p, ve kterém by se paprsek vyslaný z P' odrazil od p do bodu Q. Tím jsme úlohu převedli na dříve řešenou úlohu o odrazu (úloha 13). Řešení dokončete sami, nezapomeňte však na posunutí T_2 $(B \to A)$. Příslušná lomená čára $PXYQ$ se protíná, nemá proto význam pro praktickou úlohu, ze které jsme vyšli. Máme příklad, kdy praktická úloha má méně řešení než z ní vyvozená úloha matematická. Podobné příklady znáte z řešení kvadratických rovnic.



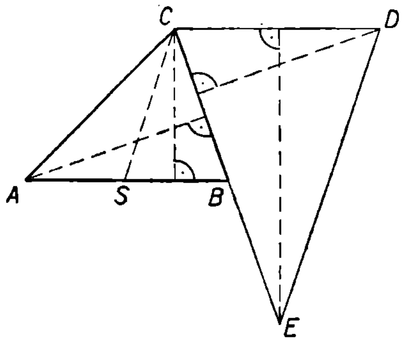
Obr. 38

Jistě jste již řešili řadu úloh na sestrojení trojúhelníka ABC, jsou-li dány velikosti tří z jeho prvků a, b, c, α, β, γ, t_A, t_B, t_C, v_A, v_B, v_C. Trojúhelník ABC lze sestrojit zvláště snadno, je-li dána některá z trojic a, b, c; a, b, γ; a, b, v_A; a, b, t_A; a, v_A, t_A; a, γ, v_A; a, γ, t_A; a, α, t_A; a, α, v_A; a, v_B, t_A; a, v_B, t_C; a, v_B, v_C; α, v_B, v_C. Jsou-li však dány některé jiné trojice prvků, dostáváme úlohy mnohem obtížnější. Seznámili jste se patrně i s umělými obraty, pomocí kterých se sestrojuje trojúhelník, je-li dáno v_A, v_B, v_C nebo t_A, t_B, t_C.

Při řešení následující úlohy použijeme posunutí a středové souměrnosti jiným způsobem než dosud. Pokud tento způsob neznáte, bude vám připadat umělý. Později se však přesvědčíte, že je to velmi užitečný způsob řešení úloh o trojúhelníku.

Úloha 22. *Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány úsečky shodné po řadě s prvky* t_C, v_A, v_C *trojúhelníka.*

Řešení (obr. 39). Zobrazme bod C jednak v T ($A \to B$), jednak ve středové souměrnosti S o středu B. Obrazy označme po řadě písmeny D, E. Dokažte si sami:



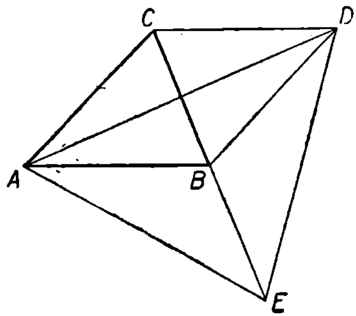
Obr. 39

Má-li trojúhelník ABC požadované vlastnosti, má trojúhelník CDE stranu $DE = 2t_C$, *výšku* $v_D = v_A$, *výšku* $v_E = 2v_C$.

Známe tedy v trojúhelníku CDE stranu DE a výšky vycházející z jejích koncových bodů. Z těchto podmínek lze trojúhelník CDE sestrojit. Bude však možno sestrojit body A, B, budeme-li znát trojúhelník CDE? Zřejmě ano, protože bod B je středem souměrnosti S ($C \to E$) a bod A

je obrazem bodu B v posunutí T^{-1}_1 $(D \to C)$. Jistě snadno dokončíte řešení celé úlohy. Dejte pozor při diskusi na to, že konstrukce trojúhelníka CDE může mít dvě různá řešení! Každé z nich je východiskem k jedné konstrukci trojúhelníka ABC.

Uvedenou úlohu lze řešit i jiným způsobem, např. pomocí podobnosti trojúhelníků. Naše řešení spočívalo v tom, že jsme našli pomocný trojúhelník CDE, jehož prvky závisejí jednoduchými vztahy na daných prvcích trojúhelníka ABC. Pokusme se nyní aplikovat tento způsob řešení i na jiné případy.



Obr. 40

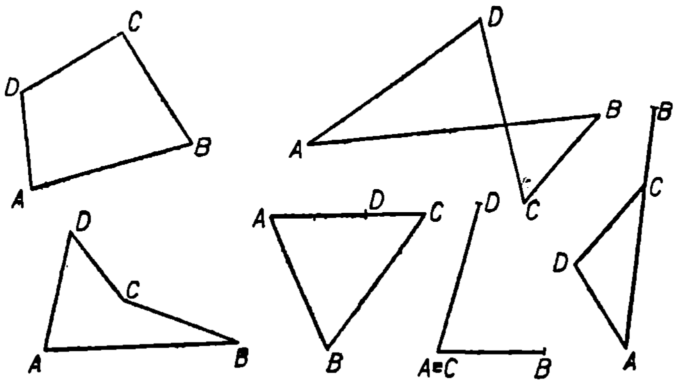
Sestrojme si znovu trojúhelník ABC a body D, E (obr. 40), vyznačme však všechny možné trojúhelníky, které mají za vrcholy tři z bodů A, B, C, D, E. Je jich devět, v každém si stanovíme ty jeho strany, úhly, těžnice a výšky, které lze vyjádřit jednoduchou závislostí na prvcích trojúhelníka ABC. Pišme výsledky do tabulky (viz str. 63).

Naučme se nyní pracovat s hotovou tabulkou. Zvolte si libovolnou trojici prvků trojúhelníka ABC, např. v_C, β, t_B. Hledejte, na kterém řádku (od třetího počínaje) jsou tyto

Trojúhelník	strany	úhly	těžnice	výšky
ABC	a, b, c	α, β, γ	$t_A, t_B, t_C,$	v_A, v_B, v_C
CBD	b, c, a	β, γ, α	$t_B, t_C, t_A,$	v_C, v_B, v_A
BDE	$2t_C, a, b$	$\pi - \gamma$, -, -	$\frac{1}{2}c$, -, -	-, v_A, v_B
CDE	$2t_C, 2a, c$	β, -, -	-, b, -	-, $v_A, 2v_C$
ACE	$2a, 2t_B, b$	-, γ, -	$c,$	v_A, -, $2v_B$
ADE	$2t_C, 2t_B, 2t_A$	-, -, -	$\frac{3}{2}c, \frac{3}{2}b, \frac{3}{2}a$	-, -, -
ABE	$a, 2t_B, c$	-, $\pi - \beta$, -	-, $\frac{1}{2}b$, -	v_A, -, v_C
ABD	$b, 2t_A, c$	-, $\pi - \alpha$, -	-, $\frac{1}{2}a$, -	v_B, -, v_C
ACD	$c, 2t_A, b$	-, $\pi - \alpha$, -	-, $\frac{1}{2}a$, -	v_C, -, v_B

prvky napsány současně. Najdete řádek příslušející trojúhelníku *ABE*. Na náčrtku trojúhelníka *ABE* uvidíte, že znáte jeho stranu *AE*, $\sphericalangle ABE = \pi - \beta$ a výšku $v_B = v_C$. Trojúhelník *ABE* můžete snadno sestrojit, umístíte-li úhel *ABE*. Konstrukce hledaného trojúhelníka je pak snadná. Další pokyny a poznámky k práci s tabulkou najdete ve cvičeních.

Podívejme se blíže na *pojem čtyřúhelníka*. Víte ze své zkušenosti, že trojúhelník *ABC* považujeme za sestrojený, vyznačíme-li jeho obvod, tj. uzavřenou lomenou čáru *ABCA*, která není částí přímky. Tento návyk nás však může v případě čtyřúhelníka dovést do nečekaných situací.



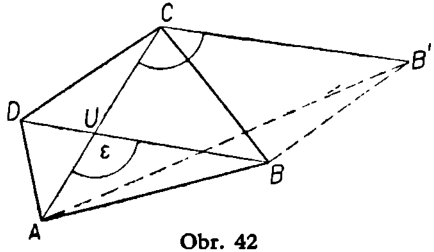
Obr. 41

Lomená čára $ABCDA$, která není částí přímky, může mít i jiné tvary, než je ten, který má obvod vypuklého čtyřúhelníka. Na obr. 41 jsou znázorněny možné případy.

Při řešení úloh požadujících sestrojení čtyřúhelníka sestrojujeme vlastně lomenou čáru $ABCDA$ na základě délek jejích úseček, úhlů sevřených jejími úsečkami apod. Nemůžeme se proto divit, že nám vyjdou i podivné čtyřúhelníky jako na obr. 41b, c, d, e, f.

Úloha 23. *Jsou dány úsečky a, c, e, f a úhel ε. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, v němž je $AB = a$, $CD = c$, $AC = e$, $BD = f$ a úhel ε je shodný s tím úhlem přímek AC, BD, jehož ramena procházejí body A, B.*

Rozbor. Předpokládáme, že úloha má řešení, označme průsečík jeho úhlopříček písmenem U (obr. 42). Výrazně jsou vyznačeny dané prvky čtyřúhelníka. Je zřejmé, že úhlu ε nemůžeme využít, jestliže neznáme bod U. Napadá tu myšlenka, zda by nebylo možno úhel přemístit tak, aby na jeho ramenech ležely dané úsečky (v úloze 16 jsme toho úspěšně využili). Zobrazme v posunutí T $(D \to C)$ bod B v bod B', tím přejde úhlopříčka BD v úsečku CB' rovnoběžnou s DB, je proto $\sphericalangle ACB' = \varepsilon$. Dokázali jsme:



Obr. 42

Má-li čtyřúhelník $ABCD$ požadované vlastnosti, má trojúhelník $AB'C$ stranu $AC = e$, $CB' = f$, $\sphericalangle ACB' = \varepsilon$.

Na základě těchto vlastností trojúhelník $AB'C$ snadno sestrojíme. Zabývejme se však vztahem bodů D, B k trojúhelníku $AB'C$. Dokažte si sami, že platí:

Má-li trojúhelník $AB'C$ uvedené vlastnosti,
leží bod B 1. na kružnici $k_1 \equiv (B'\ c)$,
2. na kružnici $k_2 \equiv (A, a)$.
Bod D je obrazem bodu C v posunutí T^{-1} $(B' \to B)$.

Celý svůj postup stavíme na předpokladu, že vznikne trojúhelník $AB'C$. Vznikne opravdu vždy? Zamyslete se nad tím, v úloze 17 jste viděli, že to může být rozhodující pro další postup.

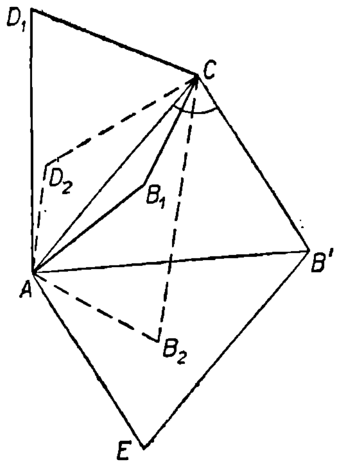
Konstrukce.

K_1: *Sestrojíme trojúhelník $AB'C$, který má $\sphericalangle ACB' = \varepsilon$, $AC = e$, $CB' = f$.*

K_2: *Sestrojíme kružnici $k_1 \equiv (B', c)$.*

K_3: *Sestrojíme kružnici* $k_2 \equiv (A, a)$.
K_4: *Sestrojíme společný bod* B *kružnic* k_1, k_2.
K_5: *Sestrojíme obraz* D *bodu* C *v posunutí* T^{-1} $(B' \to B)$.
K_6: *Sestrojíme lomenou čáru* $A\ B\ C\ D\ A$.

Důkaz. Z konstrukcí $K_3\ K_4$ plyne, že je $AB = a$, z konstrukce K_1 vyplývá $AC = e$. Obdobně snadno dokážete, že je $BB' = c$, $CD = BB' = c$ a $BD = B'C = f$. Úhel $B'CD = \varepsilon$, jeho rameno CB' přejde v posunutí T^{-1} v polopřímku DB. Je proto úhel ε shodný s tím úhlem přímek



Obr. 43

AC, BD, jehož ramena procházejí body A, B. Dokázali jsme, že sestrojený útvar se čtyřmi význačnými body A, B, C, D má všechny vlastnosti, které úloha požaduje. Nemůžeme však dokázat, že tento útvar je vypuklým čtyřúhelníkem. Popsanou konstrukcí jsme sestrojili uzavřenou lomenou čáru $ABCDA$, která má vlastnosti žádané v textu úlohy.

Diskuse. Počet uzavřených lomených čar $ABCDA$ závisí pouze na počtu společných bodů kružnic k_1, k_2. Zajímá-li nás, kdy je tato čára obvodem vypuklého čtyřúhelníka, musíme najít množinu bodů B, pro něž platí, že úsečky BD, AC mají společný vnitřní bod. Dokažte si, že takovou množinou bodů B je vnitřek rovnoběžníka $ACB'E$ (obr. 43). Na obr. 43 vidíte, že mohou existovat také dva vypuklé čtyřúhelníky $ABCD$, které jsou řešením úlohy. Proveďte si sami podrobnou diskusi.

Cvičení

22. Sestrojte příčku dvou rovnoběžek a, b, která je k oběma kolmá a je z daného bodu M vidět pod daným úhlem α.

[Sestrojte nejdříve libovolnou příčku a množinu bodů, z nichž je vidět pod daným úhlem α.]

23. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice k_1, k_2 a směr s. Sestrojte přímku směru s, na které vytínají dané kružnice shodné tětivy.

[Přemístěte vhodně střed jedné tětivy do středu druhé tětivy.]

24. Zobecněte úlohu 20 v tom smyslu, že body P, Q budou libovolné dva body kružnice. Využijte vlastností obvodového úhlu.

25. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:

1, t_A, α, v_B,	4. t_B, c, a,
2. t_A, b, α,	5. t_B, γ, c
3. t_A, t_B, t_C,	6. t_C, v_A, β.

[Najděte vždy v tabulce trojúhelník, jehož prvky obsahují dané prvky trojúhelníka ABC. Zjistěte, které strany, úhly nebo výšky pomocného trojúhelníka znáte a jak jej pomocí nich sestrojíte. Zapište si, jak potom sestrojíte vrcholy hledaného trojúhelníka ABC].

26. Všimněte si, že v tabulce jsou vyjádřeny výšky všech trojúhelníků pomocí výšek výchozího trojúhelníka ABC, kdežto těžnice jsou někdy vyjádřeny pomocí stran a obráceně. To znamená, že pomocí trojúhelníků zapsaných na třetím až devátém řádku můžeme výhodně řešit ty úlohy, ve kterých jsou dány těžnice s dalšími prvky. Každou z nich lze řešit i dalšími způsoby, pokuste se vyřešit jiným způsobem úlohy ze cvičení 25.

27. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, znáte-li velikosti jeho stran a velikost toho úhlu úhlopříček, jehož ramena procházejí vrcholy A, B.

28. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, je-li známa odchylka ε přímek AB, CD a dále délky všech stran AB, BC, CD, DA čtyřúhelníku. Užijte posunutí T $(D \rightarrow C)$ a sestrojte úhel, který má velikost ε a vrchol v bodě A.