Co víme o přirozených číslech

5. Neurčité rovnice

In: Jiří Sedláček (author): Co víme o přirozených číslech. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1961. pp. 32–39.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403441

5.

NEURČITÉ ROVNICE

•

Neurčitou (*diofantskou*) rovnicí nazýváme jednu rovnici o několika neznámých $x, y, z, \ldots$, jestliže se za tyto neznámé připouštějí výhradně jen čísla celá. Někdy se na neurčité rovnice klade omezení ještě větší a tento směr budeme sledovat i v naší knížce. Protože zde studujeme různé vlastnosti přirozených čísel a nuly, budeme i při neurčitých rovnicích připouštět jako řešení jen čísla celá nezáporná. Název „diofantská rovnice“ připomíná nám jméno řeckého matematika *Diofanta*, který žil v Alexandrii ve III. století n. l. Diofantos napsal knihu s názvem „Aritmetika“, ve které se takřka už moderním způsobem zabýval různými aritmetickými a algebraickými problémy. Teorie neurčitých (diofantských) rovnic je dnes velmi obsáhlá, takže ji zde nemůžeme vykládat v plné šíři. Vybrali jsme proto jen různé zajímavosti do několika příkladů.

Příklad 25. Dopis máme oznámkovat známkami v celkové ceně 1,60 Kčs. Kolika způsoby to můžeme provést, jestliže smíme použít jen známek čtyřicetihaléřových a šedesátihaléřových?*)

Řešení. Označme x počet známek čtyřicetihaléřových, y počet známek šedesátihaléřových, jichž použijeme při

*) Prosíme čtenáře, aby si uvědomil, že v příkladě 25 neklademe požadavek, aby se při každém známkování skutečně využilo obou druhů známek.

jednom oznámkování. Podle podmínek naší úlohy má platit $40x + 60y = 160$ čili po malé úpravě

$$2x + 3y = 8. \tag{1}$$

Je pochopitelné, že při řešení rovnice (1) budeme za čísla x, y připouštět jen přirozená čísla a nulu. Setkáváme se zde tedy s prvním příkladem neurčité rovnice; je to — jak vidíme — neurčitá rovnice 1. stupně o dvou neznámých x, y. Jak budeme tuto rovnici řešit? Popíšeme jednu metodu, která zde snadno povede k cíli. Abychom nemuseli zbytečně probírat příliš mnoho případů, povšimněme si, že v rovnici (1) jsou čísla $2x$ a 8 sudá, takže i číslo $3y$ musí být sudé. To znamená, že samo číslo y musí být sudé. Nyní systematicky prozkoumáme všechna sudá čísla $y = 0, 2, 4, \ldots$

Dosadíme-li $y = 0$ do rovnice (1), vychází $2x = 8$ čili $x = 4$. Dvojice $x = 4, y = 0$ vyhovuje tedy rovnici (1).

Dosadíme-li $y = 2$, vychází $2x = 8 - 6$ čili $x = 1$. Také dvojice $x = 1, y = 2$ vyhovuje.

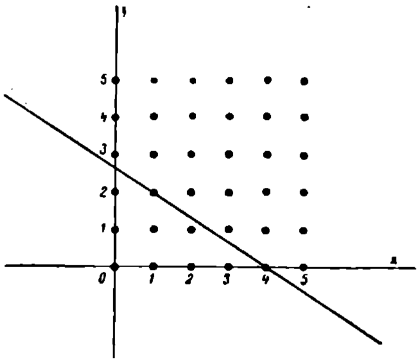
Konečně dosadíme-li do rovnice (1) za y číslo 4 nebo číslo ještě větší, dostáváme na levé straně rovnice (1) číslo větší nebo rovné dvanácti; v tomto případě nemůžeme najít žádné vyhovující číslo x.

Odpověď. Známkování můžeme provést dvěma způsoby; Použijeme buď 4 známky čtyřicetihaléřové nebo nalepíme 1 známku čtyřicetihaléřovou a 2 známky šedesátihaléřové.

Řešení příkladu 25 si můžeme dobře přiblížit, jestliže použijeme grafického znázornění. Rovnici (1), kterou jsme se prve zabývali, uveďme nejprve na tvar.

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}. \tag{2}$$

Pohleďme nyní na rovnici (2) ze stanoviska teorie funkcí. Ve škole jste se učili, že grafem funkce (2) je přímka p, kterou vidíte znázorněnou na obr. 3. Body, jejichž obě souřadnice jsou celá nezáporná čísla, jsou na obr. 3 vyznačeny nápadnými tečkami. Jak vidíte, prochází přímka



Obr. 3.

p dvěma tečkami, které odpovídají bodům [4, 0] a [1, 2]. Je tedy i z tohoto grafického znázornění patrno, že úloha má právě dvě řešení — totiž ta, ke kterým jsme dospěli prve výpočtem.

Příklad 26. Když se skupina cvičenců postavila do osmistupů, nedostával se v poslední řadě jeden cvičenec; když se táž skupina postavila do devítistupů, chyběli v poslední řadě cvičenci dva. Určete, kolik bylo cvičenců, víte-li, že jich bylo méně než sto.

Řešení. Označme x počet osmistupů a y počet devítistupů. Podle podmínek úlohy je počet cvičenců možno vyjádřit jednak číslem $8x - 1$, jednak číslem $9y - 2$, takže platí

$$8x - 1 = 9y - 2. \tag{1}$$

Budeme se nyní zabývat řešením neurčité rovnice (1). Seznámíme se zde s jiným matematickým obratem, než jakého jsme použili v příkladě 25.

Rovnici (1) uvedeme na tvar $8x = 9y - 1$ a dále $x = \frac{9y-1}{8}$ čili $x = y + \frac{y-1}{8}$. Protože číslo x má být přirozené, je třeba, aby také číslo $\frac{y-1}{8}$ bylo přirozené. Položme pro stručnost $\frac{y-1}{8} = u$; odtud plyne $y = 8u + 1$ a dále $x = y + u = 9u + 1$.

Co jsme zatím při vyšetřování rovnice (1) nalezli? Vyhovuje-li nějaká dvojice přirozených čísel x, y rovnici (1), pak je možno čísla x, y vyjádřit ve tvaru

$$x = 9u + 1, \quad y = 8u + 1, \tag{2}$$

kde u je nějaké přirozené číslo. Všimněme si však ještě toho, že čísla x, y jsou ještě omezena podmínkou, že počet cvičenců je menší než 100. Vyjádříme-li počet cvičenců např. tvarem $8x - 1$, máme nerovnost $8x - 1 < 100$. Dosadíme-li sem podle (2), vychází

$$8(9u + 1) - 1 < 100$$

a po další malé úpravě je $72u < 107$. Této nerovnosti vyhovuje jediné přirozené číslo u, totiž $u = 1$. Zbývá ještě vypočíst příslušná čísla x, y podle rovnic (2); vychází $x = 10$, $y = 9$. Počet cvičenců je pak $8x - 1 = 9y - 2 = 79$.

Odpověď. Ve skupině bylo 79 cvičenců.*)

V dalším příkladě se seznámíme s neurčitou rovnicí 1. stupně o třech neznámých.

Příklad 27. Kolika způsoby je možno v naší měně rozměnit desetihaléř?

Řešení. Při rozměňování můžeme používat mincí haléřových, tříhaléřových nebo pětihaléřových. Označme x počet použitých haléřů, y počet tříhaléřů a z počet pětihaléřů. Potom zřejmě platí

$$x + 3y + 5z = 10. \qquad (1)$$

Při řešení rovnice (1) budeme ovšem za čísla x, y, z připouštět zase jen čísla přirozená nebo nulu. Jakým způsobem budeme při řešení postupovat? Není k tomu v podstatě potřeba žádných mimoškolských znalostí, musíme si dát jen pozor, abychom na žádnou trojici x, y, z nezapomněli.

Číslo z nemůže být zřejmě větší než číslo 2, neboť pak by bylo $5z > 10$.

Pro z máme tedy tři možnosti: buď je $z = 2$ nebo $z = 1$ nebo konečně $z = 0$. Probereme každý z těchto případů zvlášť.

Pro $z = 2$ přechází rovnice (1) na tvar $x + 3y = 0$, z čehož plyne $x = 0$ a současně $y = 0$.

Pro $z = 1$ má rovnice (1) tvar

$$x + 3y = 5. \qquad (2)$$

V rovnici (2) nemůže být $y > 1$, neboť pak by bylo

*) Přenecháváme čtenáři, aby si řešení tohoto příkladu graficky znázornil obdobným způsobem, jak jsme to provedli v příkladě 25.

$3y > 5$. Zbývá tedy buď $y = 1$ nebo $y = 0$. V prvním případě nacházíme $x = 2$, v případě druhém $x = 5$.

Znova se vraťme k rovnici (1) a dosaďme do ní $z = 0$. Dostáváme tak rovnici

$$x + 3y = 10. \tag{3}$$

Je vidět, že v rovnici (3) nemůže být $y > 3$, takže zbývá buď $y = 3$ nebo $y = 2$ nebo $y = 1$ nebo konečně $y = 0$. Těmto číslům odpovídají po řadě čísla $x = 1$, $x = 4$, $x = 7$, $x = 10$.

Výsledky, ke kterým jsme dospěli, můžeme shrnout do této tabulky.

Počet		
haléřů	tříhaléřů	pětihaléřů
0	0	2
2	1	1
5	0	1
1	3	0
4	2	0
7	1	0
10	0	0

Při sestavování této tabulky jsme vlastně současně prováděli zkoušku, zda nalezené výsledky vyhovují rovnici (1).

Odpověď. Desetihaléř je možno rozměnit sedmi způsoby.

Závěrem budeme řešit jednu neurčitou rovnici 2. stupně.

Příklad 28. Jedna odvěsna pravoúhlého trojúhelníka má velikost 5 cm. Vypočtěte velikost přepony a druhé odvěsny, víte-li, že velikost těchto stran (v centimetrech) je vyjádřena přirozenými čísly.

Řešení. Označme x velikost druhé odvěsny a y velikost přepony hledaného pravoúhlého trojúhelníka. Podle Pythagorovy věty platí $x^2 + 5^2 = y^2$ čili $y^2 - x^2 = 25$. Na levé straně této rovnice můžeme rozložit dvojčlen v součin, takže dostáváme

$$(y + x)(y - x) = 25. \tag{1}$$

Abychom neurčitou rovnici (1) rozřešili, rozložme nejprve číslo 25 všemi možnými způsoby v součin dvou přirozených čísel. Platí $25 = 1.25$, $25 = 5.5$, $25 = 25.1$. Na levé straně rovnice (1) máme rovněž dva činitele (první je číslo $y + x$, druhý $y - x$). Podle významu čísel x, y je zřejmě činitel $y + x$ větší než činitel $y - x$. To nás vede k soustavě dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, totiž k soustavě

$$\begin{aligned} y + x &= 25, \\ y - x &= \ \ 1. \end{aligned}$$

Snadným výpočtem nahlédneme, že tato soustava má jediné řešení $x = 12$, $y = 13$.

Odpověď. Úloze vyhovuje jediný pravoúhlý trojúhelník, jehož strany mají velikosti po řadě 5 cm, 12 cm, 13 cm.

Pravoúhlé trojúhelníky, jejichž strany mají velikosti vyjádřené přirozenými čísly, se nazývají trojúhelníky *pythagorejské*. Tento název je odvozen od jména starořeckého filosofa a matematika *Pythagora* (asi 570 až 500 před n. l.). Pythagoras založil v VI. a V. století před n. l. na ostrově Samu školu, které jsou přisuzovány velké zásluhy o rozvoj tehdejší matematiky. Pythagorovi žáci se zabývali zejména naukou o číslech a číselných posloupnostech, v geometrii pak studovali zvláště pravoúhlý trojúhelník. Nejznámějším příkladem pythagorejského trojúhelníka je pravoúhlý trojúhelník, jehož strany mají velikost po řadě 3, 4 a 5. Teorie čísel se zabývala později velmi zevrubně studiem pythagorejských trojúhelníků a našla nutné a postačující podmínky k tomu, aby trojúhelník byl pythagorejský. Zájemce o tuto problematiku musíme však odkázat na odbornější literaturu z teorie čísel, jejíž přehled najdete v závěru této knížky.

Úlohy

35. Poštovní zásilku máme známkovat známkami v celkové ceně 1,80 Kčs. Kolika způsoby to můžeme provést, smíme-li použít jen známek třicetihaléřových, čtyřicetihaléřových a šedesátihaléřových?

36. Je dána rovnice $4x + 6y + 10z = 1511$. Je možno najít tři přirozená čísla x, y, z, která této rovnici vyhovují?

37. Určete všechny dvojice přirozených čísel x, y, pro něž platí $x^2 - y^2 = 15$.

38. Přepona pravoúhlého trojúhelníka má velikost 15 cm. Vypočtěte velikost jeho odvěsen, víte-li, že tyto velikosti (v centimetrech) jsou vyjádřeny přirozenými čísly.