Co víme o přirozených číslech

4. Největší společný dělitel a nejmenší společný násobek

In: Jiří Sedláček (author): Co víme o přirozených číslech. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1961. pp. 24–31.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403440

Terms of use:

© ÚV Matematické olympiády

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

4.

NEJVĚTŠÍ SPOLEČNÝ DĚLITEL A NEJMENŠÍ SPOLEČNÝ NÁSOBEK

●

Společným dělitelem přirozených čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ nazýváme to přirozené číslo d, kterým je každé z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k$ dělitelné. Je-li dána skupina přirozených čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots a_k$, je vždy možno vyhledat největší z jejich společných dělitelů. Toto číslo se nazývá *největší společný dělitel* čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ a označuje se D $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$.

Největší společný dělitel dvou daných přirozených čísel se hledá buď rozkladem v prvočinitele nebo metodou postupného dělení, zvanou též *Euklidův algoritmus*. Oba způsoby si ukážeme v příkladech.

Příklad 15. Určete D (165, 198).

Řešení. V příkladě jsou dána malá čísla, která snadno rozložíme v prvočinitele. K určení D (165, 198) užijeme tedy metody první.

Obě daná čísla rozložíme v prvočinitele. Platí $165 = 3.5.11$, $198 = 2.3^2.11$. Ze získaných prvočinitelů vybereme všechny společné prvočinitele a každého z nich vezmeme s nejmenším mocnitelem, jaký se vyskytuje v nalezených rozkladech; výsledná čísla znásobíme. Vychází tedy D $(165, 198) = 3.11 = 33$.

Příklad 16. Určete D (9694, 4181).

Řešení. Zde je rozklad v prvočinitele dosti obtížný, proto použijeme metody postupného dělení. Nejprve dělíme větší číslo číslem menším, potom menší číslo dělíme prvním zbytkem, dále první zbytek dělíme druhým zbytkem a podobně pokračujeme tak dlouho, až dostaneme podíl beze zbytku. První dělitel, při kterém vyjde dělení beze zbytku, je hledaný největší společný dělitel.

Pro výpočet D (9694, 4181) dostáváme postupně

$$\begin{aligned} 9694 &= 4181 . 2 + 1332, \\ 4181 &= 1332 . 3 + 185, \\ 1332 &= 185 . 7 + 37, \\ 185 &= 37 . 5. \end{aligned}$$

Je tedy D (9694, 4181) = 37.

Poznamenejme ještě, že metoda postupného dělení je pro vyhledání největšího společného dělitele zvlášť vhodná, chceme-li při výpočtu použít běžných kancelářských počítacích strojů. Na těchto strojích se totiž dělení provádí velmi snadno a celý postup — i při dosti velkých číslech — provedeme tak ve velmi krátké době.

Platí-li D $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k) = 1$ říkáme, že čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ jsou *nesoudělná.* I tento pojem si pocvičíme na dvou příkladech.

Příklad 17. Kolika způsoby je možno vyjádřit číslo 60 jako součin dvou nesoudělných přirozených čísel?

Řešení. Dělitelé čísla 60 jsou po řadě čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60. Platí

$60 = 1.60$, $60 = 2.30$, $60 = 3.20$, $60 = 4.15$,
$60 = 5.12$, $60 = 6.10$, $60 = 10.6$, $60 = 12.5$,
$60 = 15.4$, $60 = 20.3$, $60 = 30.2$, $60 = 60.1$.

Je patrné, že rozklady $60 = 2.30$, $60 = 6.10$, $60 =$

$= 10.6$, $60 = 30.2$ nevyhovují podmínkám naší úlohy.

Odpověď. Nehledíme-li k pořadí činitelů, je možno číslo 60 vyjádřit čtyřmi způsoby jako součin dvou nesoudělných přirozených čísel. Kdybychom ovšem k pořadí činitelů přihlíželi, měla by tato úloha celkem osm řešení.

Příklad 18. Kolika způsoby je možno vyjádřit číslo 60 jako součet dvou nesoudělných přirozených čísel?

Řešení. Máme vyjádřit číslo 60 ve tvaru $60 = x + y$, kde x, y jsou nesoudělná čísla. Z tohoto vyjádření vyplývá, že také čísla 60 a x jsou nesoudělná. Kdyby totiž nesoudělná nebyla, dělil by jejich největší společný dělitel také číslo y, takže by ani čísla x, y nebyla nesoudělná.

Vyhledáme tedy nejprve všechna přirozená čísla x, která jsou menší než 60 a nesoudělná s číslem 60. Jsou to tato čísla:

1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59.

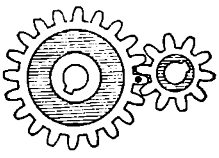
Docházíme tak k těmto součtům

$60 = 1 + 59$,	$60 = 7 + 53$,	$60 = 11 + 49$,
$60 = 13 + 47$,	$60 = 17 + 43$,	$60 = 19 + 41$,
$60 = 23 + 37$,	$60 = 29 + 31$,	$60 = 31 + 29$,
$60 = 37 + 23$,	$60 = 41 + 19$,	$60 = 43 + 17$,
$60 = 47 + 13$,	$60 = 49 + 11$,	$60 = 53 + 7$,
	$60 = 59 + 1$.	

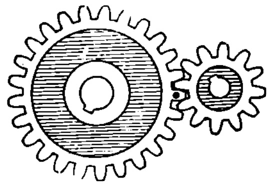
Odpověď. Nehledíme-li k pořadí sčítanců, je možno číslo 60 vyjádřit osmi způsoby jako součet dvou nesoudělných přirozených čísel. Přihlédneme-li ovšem k pořadí sčítanců, má tato úloha celkem 16 řešení.

Pojem největšího společného dělitele se často vyskytuje při numerickém počítání. Ukažme si jeden příklad, kdy se největšího společného dělitele využívá k tomu, aby se navrhl co nejvhodnější ozubený převod v určitém stroji.

Příklad 19. Na obr. 1 vidíme ozubený převod složený ze dvou kol: menší kolo má 10 zubů, kolo větší má 20 zubů. Srovnejme tento obrázek s obr. 2, který znázorňuje rovněž ozubený převod složený ze dvou kol. Kolo menší má zde 12 zubů, kolo větší 25 zubů. Který převod se méně opotřebuje při nahodilé vadě zubu?



Obr. 1.



Obr. 2.

Řešení. Abychom na danou otázku odpověděli, uvažujme takto: U první dvojice kol bude vždy týž zub většího kola (na obr. 1 jsme jej označili tečkou) zapadat do téže mezery kola menšího; nastane to totiž po každé druhé plné otáčce menšího kola, neboť D (10, 20) = 10. Bude-li tedy náhodou zub, který jsme v obr. 1 označili tečkou, nějak závadný, bude se i druhé, menší kolo, v určitém místě velmi rychle opotřebovávat.

V případě druhém je situace zcela jiná. Zub, který jsme na větším kole označili tečkou, zapadne znovu do téže mezery menšího kola teprve tehdy, až menší kolo vykoná 25 plných otáček, čísla 12 a 25 jsou totiž nesoudělná — platí D (12, 25) = 1. Nahodilá vada zubu se tak rovnoměrněji rozdělí při svém působení na všechny mezery menšího kola a soukolí se bude méně opotřebovávat. Tím jsme tedy našli odpověď na otázku, který z obou převodů je výhodnější.

Společným násobkem přirozených čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ nazýváme to přirozené číslo n, které je dělitelné každým z čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$. K dané skupině přirozených čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ je vždy možno najít nejmenší z jejich společných násobků. Číslo, které takto nalezneme, se nazývá *nejmenší společný násobek* čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ a označuje se $\mathrm{n}(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$.

Nejmenší společný násobek dvou přirozených čísel hledáme buď rozkladem v prvočinitele nebo pomocí jistého vztahu mezi nejmenším společným násobkem a největším společným dělitelem. Probereme si to opět na příkladech.

Příklad 20. Určete n(440, 660).

Řešení. Čísla 440 a 660 snadno rozložíme v prvočinitele; platí $440 = 2^3.5.11$, $660 = 2^2.3.5.11$. Abychom určili n(440, 660) vezmeme získané prvočinitele s největšími mocniteli, jaké se u nich v rozkladech vyskytují, a tato čísla znásobíme. Dostáváme tak $\mathrm{n}(440, 660) = 2^3.3.5.11 =$ $= 1320$.

Příklad 21. Určete n (9694, 4181).

Řešení. Určováním D (9694, 4181) jsme se už zabývali v příkladě 16. Konstatovali jsme tam, že rozklad v prvočinitele by byl pro daná čísla dosti pracný. Pro výpočet n (9694, 4181) použijeme zde této poučky:

Součin nejmenšího společného násobku a největšího společného dělitele dvou daných přirozených čísel je roven součinu těchto přirozených čísel.

Pro náš případ to znamená, že platí

$\mathrm{n}(9694, 4181) . \mathrm{D}(9694, 4181) = 9694.4181.$

Z příkladu 16 víme, že D (9694, 4181) = 37, takže

$$\mathrm{n}(9694, 4181).37 = 9694.4181$$

a dále

$$n(9694, 4181) = \frac{9694 . 4181}{37} .$$

Pro numerický výpočet je zbytečné provádět násobení v čitateli, platí totiž $4181 : 37 = 113$, takže

$$n(9694, 4181) = 9694 . 113 = 1\,095\,422.$$

Odpověď. $n(9694, 4181) = 1\,095\,422$.

Věnujme nyní pozornost příkladům, ve kterých se vyskytuje jak pojem největšího společného dělitele, tak pojem nejmenšího společného násobku.

Příklad 22. Určete dvě čísla, jejichž největší společný dělitel je 2 a nejmenší společný násobek je 12.

Řešení. Označme hledaná čísla písmena x, y; označení čísel můžeme volit tak, že $x \leqq y$. Protože největší společný dělitel čísel x, y je roven číslu 2, můžeme čísla x, y vyjádřit ve tvaru $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, kde x_1, y_1 jsou vhodná čísla navzájem nesoudělná. Nejmenší společný násobek čísel $2x_1$, $2y_1$ je zřejmě roven číslu $2x_1y_1$, takže má platit $2x_1y_1 = 12$ čili $x_1y_1 = 6$. Protože čísla x_1, y_1 mají být nesoudělná a protože má zároveň platit $x_1 \leqq y_1$, vyplývá ze vztahu $x_1y_1 = 6$ buď řešení $x_1 = 1$, $y_1 = 6$ nebo řešení $x_1 = 2$, $y_1 = 3$. Vrátíme-li se nyní k číslům x, y, dostáváme buď dvojici $x = 2$, $y = 12$ nebo dvojici $x = 4$, $y = 6$. Zkouškou se snadno přesvědčíme, že obě tyto dvojice vyhovují naší úloze.

Odpověď. Nehledíme-li na pořadí hledaných čísel, vyhovují dané úloze právě dvě dvojice $x = 2$, $y = 12$ nebo $x = 4$, $y = 6$.

Příklad 23. Určete dvě čísla, jejichž největší společný dělitel je 7 a nejmenší společný násobek je 22.

Řešení. Snadno nahlédneme, že není možno najít žádnou dvojici čísel, která by vyhovovala uvažovaným podmínkám. Nejmenší společný násobek musí být totiž vždycky násobkem největšího společného dělitele, to však není splněno v textu naší úlohy (číslo 7 nedělí číslo 22).

Příklad 24. Určete dvě čísla, jejichž nejmenší společný násobek je o 7 větší než jejich největší společný dělitel.

Řešení. Označme opět hledaná čísla písmeny x, y, při čemž volíme označení tak, aby platilo $x \leqq y$. Podle textu naší úlohy má platit

$$\mathrm{n}(x, y) - \mathrm{D}(x, y) = 7. \qquad (1)$$

Protože $\mathrm{D}(x, y)$ dělí číslo $\mathrm{n}(x, y)$, dostáváme z tohoto vztahu, že $\mathrm{D}(x, y)$ dělí také číslo 7. Máme tedy dvě možnosti: buď $\mathrm{D}(x, y) = 1$ nebo $\mathrm{D}(x, y) = 7$. Probereme každý z těchto případů zvlášť.

Je-li $\mathrm{D}(x, y) = 1$, jsou čísla x, y nesoudělná. Pro nejmenší společný násobek pak máme vztah $\mathrm{n}(x, y) = xy$, takže rovnice (1) přejde na tvar $xy - 1 = 7$ čili $xy = 8$. Vzhledem k předpokladům $x \leqq y$, $\mathrm{D}(x, y) = 1$ vyplývá odtud snadno, že $x = 1$, $y = 8$.

Je-li $\mathrm{D}(x, y) = 7$, pak čísla x, y můžeme vyjádřit ve tvaru $x = 7x_1$, $y = 7y_1$, kde x_1, y_1 jsou nesoudělná čísla splňující nerovnost $x_1 \leqq y_1$. Pro $\mathrm{n}(x, y)$ dostáváme pak postupně $\mathrm{n}(x, y) = \mathrm{n}(7x_1, 7y_1) = 7\mathrm{n}(x_1, y_1) = 7x_1y_1$. Vrátíme-li se opět k rovnici (1), máme $7x_1y_1 - 7 = 7$ čili $7x_1y_1 = 14$ čili $x_1y_1 = 2$. Vzhledem k předpokladům o číslech x_1, y_1 dostáváme zde jediný výsledek totiž $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, což pro čísla x, y znamená, že $x = 7, y = 14$.

Zkouškou se můžeme přesvědčit, že obě dvojice, ke kterým jsme dospěli, vyhovují dané úloze. Platí totiž $\mathrm{n}(1, 8) = 8$, $\mathrm{D}(1, 8) = 1$, takže rovnice (1) je skutečně splněna;

dále je n(7, 14) = 14, D(7, 14) = 7, takže opět platí rovnice (1).

Úlohy

29. Vypočtěte a) D(396, 444); b) D(3293, 3827); c) D(3797, 4129); d) D(396, 444, 616); e) D(910, 1012, 1020, 1291).

30. Vypočtěte a) n (43, 258); b) n (1000, 1283); c) n (12, 15, 18); d) n (10, 15, 20, 25).

31. Jak se změní největší společný dělitel dvou přirozených čísel, jestliže každé z čísel znásobíme dvěma.

32. Jak se změní nejmenší společný násobek dvou přirozených čísel, jestliže každé z čísel znásobíme třemi.

33. Jsou-li dána libovolná dvě přirozená čísla a, b taková, že b dělí a, pak vždy je možno najít aspoň jednu dvojici přirozených čísel x, y takovou, že n $(x, y) = a$, D $(x, y) = b$. Dokažte.

34. Kolika způsoby je možno vyjádřit číslo 21 jako součet tří prvočísel?