Několik úloh z geometrie jednoduchých těles

Problémy

In: F. Hradecký (author); Milan Koman (author); Jan Vyšín (author): Několik úloh z geometrie jednoduchých těles. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1961. pp. 88–90.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403430

PROBLÉMY

●

1. Je dán kvádr $ABCDA'B'C'D'$ o rozměrech $AB = a$, $BC = b$, $BB' = c$. Přímkou AC jsou vedeny všechny roviny, které protnou kvádr v lichoběžnících. Určete geometrické místo průsečíků úhlopříček všech těchto lichoběžníků. Zjistěte, zda je mezi nimi lichoběžník, který má při vrcholu A úhel velikosti 60^0. Určete strany tohoto lichoběžníka v případě, že je $a = b$.

[Pokuste se nalézt dvě roviny, v nichž leží proměnný průsečík úhlopříček. Druhou část úlohy řešte výpočtem.]

2. Do krychle $ABCDA'B'C'D'$ je vepsán rovnostranný trojúhelník $D'XY$, jehož vrcholy X, Y leží po řadě ve stěnách $ABB'A'$ a $BCC'B'$ a jehož strana XY je rovnoběžná s rovinou ABC. a) Vyšetřete množinu vrcholů X všech takových trojúhelníků. b) Mezi rovnostrannými trojúhelníky $D'XY$ určete ten, jehož strana má předepsanou délku; sestrojte jeho vrchol X a stanovte podmínku řešitelnosti.

[Dokažte, že strana XY je rovnoběžná s úhlopříčkou AC. Geometrické místo bodů hledejte metodou souřadnic: za osu x zvolte přímku $A'B'$ a za počátek bod P tak, aby bod B' byl středem úsečky $A'P$. Podmínka řešitelnosti je $s \geqq (\sqrt{6} - \sqrt{2})a$, kde a je délka hrany krychle, s délka strany trojúhelníka.]

3. Je dán pravidelný jehlan čtyřboký. Jemu má být vepsána krychle, jejíž jedna stěna leží v podstavě jehlanu

a další čtyři vrcholy leží po jednom v pobočných stěnách jehlanu. Dokažte, že lze danému jehlanu vepsat nekonečně mnoho takových krychlí a vyšetřete geometrické místo jejich a) vrcholů v rovině podstavy jehlanu, b) středů.

[Dokažte, že střed krychle leží na výšce jehlanu. Za proměnnou zvolte odchylku úhlopříček podstavy jehlanu a krychle; vyjádřete délku hrany vepsané krychle jako funkci této proměnné.]

4. Je dán pravidelný jehlan čtyřboký. Určete rovinu, která jej protíná v pravidelném pětiúhelníku. Stanovte podmínku řešitelnosti úlohy.

[Užijte poměru úhlopříčky a strany pravidelného pětiúhelníku, který je $(1 + \sqrt{5}) : 2$. Vypočtěte vzdálenost x středu podstavy jehlanu od té strany průsečného pětiúhelníka, která leží v podstavě a která je rovnoběžná s jednou úhlopříčkou podstavy. Podmínka řešitelnosti je, že odchylka pobočné hrany jehlanu od podstavy je 45^0.]

5. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$. Všemi body lomené čáry $AA'B'C'CDA$ vedeme rovnoběžky s přímkou BD'. Dokažte, že lze vzniklou plochou „provléknout" krychli shodnou s danou krychlí, po případě krychli ještě o něco větší.

[Hranolová plocha je proťata rovinou kolmou k přímce BD' v pravidelném šestiúhelníku. Největší čtverec, který lze tomuto šestiúhelníku vepsat, má délku strany $\dfrac{4a}{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}$, kde a je rozměr krychle.]

6. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$. Zjistěte, zda lze sestrojit pravidelný čtyřstěn $PQRS$ tak, aby jeho vrcholy

P, Q, R ležely ve čtverci $ABCD$ a vrchol S ve čtverci $A'B'C'D'$ (čtyřstěn vepsaný krychli).

[Určete nejprve výpočtem největší rovnostranný trojúhelník, který lze vepsat do daného čtverce.]

7. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$ o hraně délky 1 a číslo d, pro něž platí $\sqrt{2} < d < \sqrt{3}$. Vyšetřete množinu bodů vyplněnou krajními body úseček délky d umístěných v krychli.

[Množinu bodů odhadněte z názoru a domněnku dokažte tak, že vždy jeden z krajních bodů úsečky zvolíte pevně.]

8. Rozměry kvádru jsou celá čísla a, b, c. Kvádr je rozdělen na abc jednotkových krychlí. Určete počet těch krychlí, jejichž vnitřkem prochází tělesová úhlopříčka kvádru.

[Řešení je dáno vzorcem $N = a + b + c - \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 + \sigma$, kde σ_1, σ_2, σ_3 značí největší společné dělitele dvojic (b, c), (c, a), (a, b) a σ největšího společného dělitele čísel a, b, c. Při řešení zkoumejte, kolik vrcholů krychlí obsahuje tělesová úhlopříčka kvádru, kolik hran krychlí protíná mimo vrcholy a kolik stěn mimo hrany.]

OPRAVY

V obr. 4 c doplň písmeno T

v obr. 7 doplň písmeno X, Y

v obr. 8 doplň X_1, X_2

v obr. 16c má být v_1 místo v

v obr. 23c má být B' místo B

v obr. 28d má být H místo M a F' místo F