Několik úloh z geometrie jednoduchých těles

I. Geometrie na povrchu tělesa

In: F. Hradecký (author); Milan Koman (author); Jan Vyšín (author): Několik úloh z geometrie jednoduchých těles. (Czech). Praha: Mladá fronta, 1961. pp. 7–32.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403426

Část I

GEOMETRIE NA POVRCHU TĚLESA

●

Když začneme vyšetřovat geometrické vlastnosti některého tělesa, seznamujeme se nejprve s jeho povrchem. Povrch se skládá buď z obrazců, které už známe z planimetrie, jako je tomu např. u hranolu a jehlanu, nebo obsahuje některé zakřivené plochy, neznámé z planimetrie; takové plochy najdeme např. u válce, kužele a koule.

Povrch tělesa z první skupiny dovedeme zobrazit velmi jednoduše v rovině: narýsujeme v nákresně ve vhodné vzájemné poloze obrazce, z kterých se skládá povrch tělesa, a výsledný obrazec je tzv. *síť tělesa*. Jistě si vzpomínáte, jak jste sestrojovali např. síť krychle, když jste chtěli vyrobit model krychle z lepenky nebo plechu.

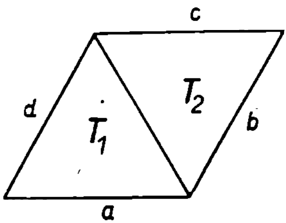
Sítě však slouží v geometrii i k jiným účelům než k sestrojování modelu tělesa. Proto jim budeme věnovat trochu pozornosti. Začneme se sítí nejjednoduššího tělesa — čtyřstěnu. Název čtyřstěn snad znáte: jinak lze říci, že je to trojboký jehlan. Proč jsme jej nazvali nejjednodušším tělesem? Čtyřstěn má nejmenší možný počet stěn — čtyři — a jeho stěny jsou nejjednodušší mnohoúhelníky — trojúhelníky. Stěny čtyřstěnu mohou být ovšem trojúhelníky různostranné a navzájem nikoli shodné; ve zvláštním případě jsou stěny čtyřstěnu čtyři shodné rovnostranné trojúhelníky; takový čtyřstěn nazýváme *pravidelný*. První úloha, kterou rozřešíme, se bude týkat sítí pravidelného čtyřstěnu.

Úloha 1. *Kolik různých sítí má daný pravidelný čtyřstěn?*

Řešení. Dříve než začneme řešit jakoukoli matematickou úlohu, musíme se přesvědčit, zda jsme dobře porozuměli jejímu textu. Text naší úlohy je velmi jednoduchý; domníváme se, že rozumíme názvu „síť"; ale při jeho vysvětlení jsme použili před chvílí mlhavých slov „obrazce ve vhodné vzájemné poloze". Co z toho vyplývá? Pro řešení úlohy musíme *zpřesnit*, co rozumíme slovem „síť". Mluvme přímo o síti pravidelného čtyřstěnu; tato síť se bude skládat ze čtyř shodných rovnostranných trojúhelníků, které budou vyhovovat těmto podmínkám:

a) Žádné dva z trojúhelníků se nepřekrývají.
b) Každý z trojúhelníků sítě má společnou stranu aspoň s jedním dalším trojúhelníkem sítě (není „izolovaný").
c) Dva trojúhelníky sítě mohou (ale nemusí) mít společnou jen takovou stranu, kterou mají společnou jako stěny tělesa.

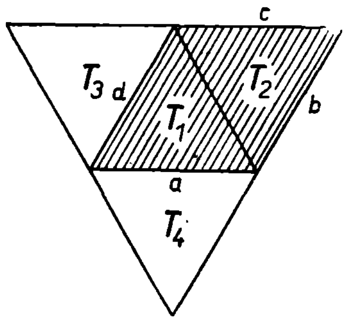
Nyní ještě musíme vysvětlit význam slova „různý". „Různými sítěmi" budeme rozumět něco obdobného jako „různými řešeními" při sestrojování trojúhelníků: dvě sítě budeme pokládat za různé, jestliže příslušné rovinné obrazce *nejsou* shodné, tj. nelze-li je na sebe položit tak, aby se kryly. Tato úmluva je zcela přirozená, neboť stěny pravidelného čtyřstěnu se nijak navzájem nerozlišují.



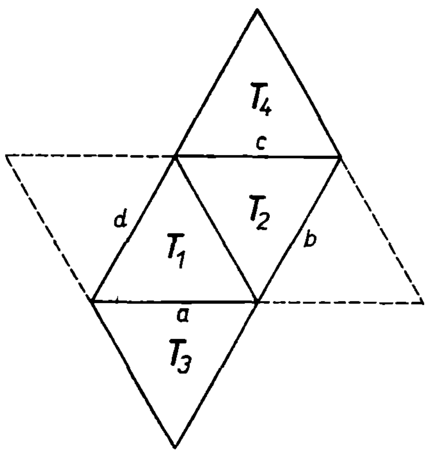
Obr. 1

Všimněte si, kolik práce nám dalo vysvětlení textu úlohy; zato však nyní pracujeme s jasnými pojmy a řešení úlohy bude snadné.

V jakékoli síti daného čtyřstěnu se vyskytuje zcela jistě obrazec narýsovaný v obr. 1; je to



Obr. 2a



Obr. 2b

kosočtverec složený ze dvou rovnostranných trojúhelníků T_1, T_2, které zobrazují dvě stěny čtyřstěnu. K nim je třeba připojit další dva trojúhelníky sítě.

Považujeme-li např. trojúhelník T_1 za podstavu čtyřstěnu, je T_2 jedna stěna pláště; pak zbývající dvě stěny pláště — trojúhelníky T_3, T_4 — mohou být připojeny jedním z těchto tří způsobů:

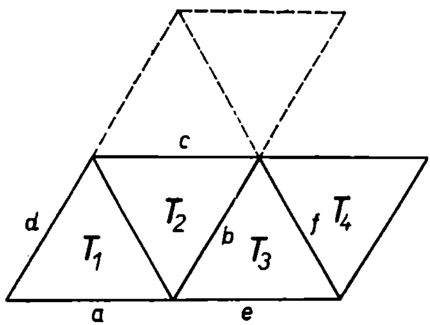
a) T_3 i T_4 jsou připojeny k T_1;

b) T_3 je připojen k T_1, T_4 k T_2;

c) T_3 je připojen k T_2, T_4 k T_3.

První způsob dá síť zobrazenou na obr. 2a. Druhý způsob: připojíme-li trojúhelník T_3 ke straně označené na obr. 1 písmenem a, nelze připojit trojúhelník T_4 k straně b, neboť strana b je na tělese společná trojúhelníkům T_2, T_3 a nikoli trojúhelníkům T_2, T_4. Připojíme tedy T_4 ke straně c a vznikne síť z obr. 2b. Připojíme-li T_3 ke straně d, je třeba připojit T_4 ke straně b a dostaaneme síť shodnou se sítí z obr. 2b.

V posledním případě připojíme trojúhelník T_3 např. ke straně b (obr. 3). Trojúhelník T_4 pak nelze připojit ke straně, která je na obr. 3 označena e, neboť na tělese náleží tato strana stěnám T_1, T_3 a nikoli T_3, T_4; proto je třeba připojit trojúhelník T_4 ke straně f, jak naznačuje obr. 3. Síť z obr. 3 je shodná se sítí z obr. 2b; také síť, kterou bychom dostali připojením T_3 ke straně c (na obr. 3 vyčárkovaná), je shodná se sítí z obr. 2b.



Obr. 3

Pravidelný čtyřstěn může mít tedy jen dvě různé sítě, narýsované na obr. 2a, 2b. Snadno se přesvědčíme, že oba tyto obrazce jsou skutečně sítě pravidelného čtyřstěnu; z každé z nich složíme model tělesa.

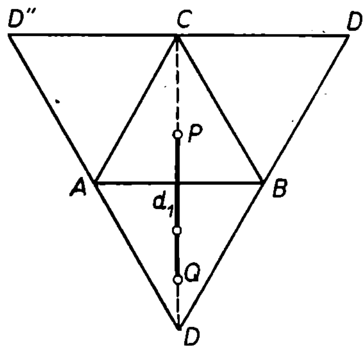
Kdyby daný čtyřstěn nebyl pravidelný, bylo by řešení úlohy složitější a čtyřštěn by měl více různých sítí než dvě. Větší počet sítí dostaneme také u tělesa o větším počtu stěn. Tak např. krychle — pravidelný šestistěn — má 11 různých sítí. Pokuste se o řešení některé z uvedených úloh (počet sítí livobolného čtyřstěnu, počet sítí krychle); úloha 1 vám aspoň částečně ukázala cestu, kterou můžete postupovat.

Také druhá úloha se týká sítě pravidelného čtyřstěnu.

Úloha 2. *Je dán pravidelný čtyřstěn ABCD; označme P těžiště trojúhelníka ABC, Q střed úsečky omezené vrcholem D a těžištěm trojúhelníka ABD. Máme určit nejkratší lomenou čáru spojující po povrchu čtyřstěnu body P, Q, a to tak, aby procházela a) přes stěny ABC, ABD; b) přes stěny ABC, BCD, ABD; c) přes stěny ABC, BCD, ACD, ABD. Máme porovnat délky všech tří lomených čar.*

Řešení. Při řešení každé z úloh a), b), c) musíme sestrojit takovou síť, aby každé dva za sebou následující trojúhelníky, přes něž spojnice postupně prochází, měly společnou stranu. Tyto sítě jsou nakresleny na obr. 4abc.

Význam označení vrcholů je z obrázků zřejmý. Složíme-li např. síť z obr. 4a v model tělesa, splynou body D, D', D'' v jediný vrchol; obdobně tomu je u ostatních dvou sítí. Na všech obrazech jsou vyznačeny body P, Q; úsečka, která je spojuje, leží v síti, neboť síť je buď trojúhelník (obr. 4a), nebo rovnoběžník (obr. 4b, c). Proto je každá z těchto úseček obrazem nejkratší spojnice bodů P,



Obr. 4a

Q, která vede po povrchu čtyřstěnu přes předepsané stěny.

Vypočteme délky těchto tří úseček; označíme je d_1, d_2, d_3; dále označíme a délku hrany čtyřstěnu. Pak na obr. 4a leží body C, D, P, Q v přímce a platí $CD = a\sqrt{3}$, $CP = \frac{a}{3}\sqrt{3}$, $DQ = \frac{a}{6}\sqrt{3}$, a tedy

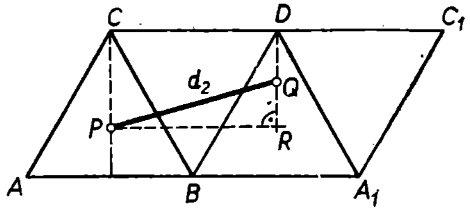
$$d_1 = \frac{a}{2}\sqrt{3} \doteq 0{,}866\, a. \qquad (1)$$

Pro výpočet d_2 (obr. 4b) použijeme pravoúhlého trojúhelníka PQR. Platí $PR = a$, $QR = \frac{a}{6}\sqrt{3}$, a tedy podle Pythagorovy věty

$$d_2 = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = a\sqrt{\frac{13}{12}} \doteq 1{,}04\, \text{a}. \qquad (2)$$

Délku d_3 vypočteme z pravoúhlého trojúhelníka PQT (obr. 4c). Zde je $QT = a + \frac{a}{4} = \frac{5}{4}a$, $BT = \frac{a}{12}\cdot\sqrt{3}$, $PB = \frac{a}{3}\sqrt{3}$, a tedy $PT = \frac{a}{3}\sqrt{3} - \frac{a}{12}\sqrt{3} = \frac{a}{4}\sqrt{3}$. Podle Pythagorovy věty pak dostaneme

$$d_3 = \sqrt{\left(\frac{5a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{7} \doteq 1{,}32\, a. \qquad (3)$$

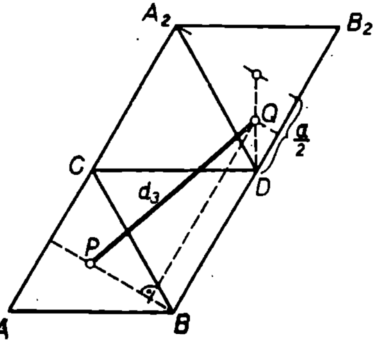


Obr. 4b

Z (1), (2), (3) vyplývá porovnání

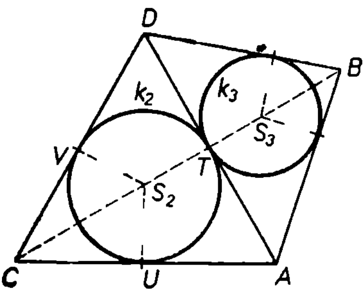
$$d_1 < d_2 < d_3.$$

Tím ovšem není nijak dokázáno, že nejkratší spojnice dvou bodů na povrchu čtyřstěnu jde vždy jen přes dvě stěny a že délka spojnice se zvětšuje, prochází-li tato spojnice přes více stěn. Zkuste např. nahradit v předcházející úloze bod P středem M úsečky CP; pak bude výsledek jiný; nejkratší bude spojnice d_2.



Obr. 4c

Úloha 3. *Je dán (libovolný) čtyřstěn $ABCD$. Máme stanovit podmínku pro to, aby se kružnice vepsané stěnám (trojúhelníkům) ABD, ACD dotýkaly. Jak zní obdobná podmínka pro zbývající dvě stěny čtyřstěnu?*



Obr. 5

Řešení. Promýšlíte-li si text úlohy, zjistíte, že nám není znám pojem dotyku dvou kružnic, které neleží v rovině. Stěny ACD, ABD daného čtyřstěnu leží ve dvou rovinách, které mají společnou jen přímku AD a nazývají se *různoběžné*; společná přímka AD je jejich *průsečnice*. Definici dotyku kružnic ležících v různoběžných rovinách snadno uhodneme: dvě kružnice ležící v různoběžných rovinách se dotýkají, dotýká-li se každá z nich průsečnice obou rovin, a to v témž bodě.

Ještě je třeba vysvětlit význam slov „stanovit podmínku", která se vyskytují v textu úlohy. Čtyřstěn, který má žádanou vlastnost, tj. že kružnice vepsané trojúhelníkům ABD, ACD se dotýkají, není asi zcela libovolný; mezi délkami jeho hran je asi nějaký vztah. Při odvozování tohoto vztahu budeme tedy vycházet z předpokladu, že se kružnice k_2, k_3 dotýkají v bodě T ležícím na hraně AD. Na obr. 5 je zakreslena část sítě čtyřstěnu $ABCD$, skládající se z trojúhelníků ACD, ABD i s vepsanými kružnicemi k_2, k_3 a s jejich bodem dotyku T. Označíme-li U, V body dotyku kružnice k_2 se stranami AC, CD, platí $AT = AU$, $CU = CV$, $DV = DT$. Je tedy $CU = AC - AT$, $DV = CD - AC + AT$, $AT = AD - CD + AC - AT$; odtud

$$2\,AT = AC + AD - CD. \tag{4}$$

Obdobně vyjde z trojúhelníka ABD

$$2\,AT = AB + AD - BD. \tag{5}$$

Spojením vztahů (4), (5) dostaneme

$$AC + BD = AB + CD \tag{6}$$

Z dotyku kružnic k_2, k_3 tedy *nutně* vyplývá rovnost (6); proto říkáme, že rovnost (6) je *nutná podmínka pro dotyk kružnic* k_2, k_3.

Přirozeně se nabízí otázka, zda také obráceně ze vztahu (6) plyne dotyk kružnic k_2, k_3, tj. zda vztah (6) *stačí* k tomu, aby se kružnice k_2, k_3 dotýkaly. Bude-li tomu tak, bude *rovnost* (6) *také postačující podmínkou pro dotyk kružnic* k_2, k_3.

Při zkoumání této otázky budeme předpokládat, že se kružnice k_2, k_3 dotýkají přímky AD v bodech T_2, T_3, které mohou být různé nebo splynout (o tom zatím nic nevíme). Podle planimetrické věty, kterou jsme odvodili, platí pak

$$\begin{aligned} 2\,AT_2 &= AC + AD - CD, \\ 2\,AT_3 &= AB + AD - BD. \end{aligned} \tag{7}$$

Ze vztahu (6), jehož platnost nyní přepokládáme, plyne

$$AC - CD = AB - BD. \tag{8}$$

Dosadíme-li z (8) do (7), zjistíme, že je $AT_2 = AT_3$, tj. $T_2 \equiv T_3$ (body T_2, T_3 leží totiž na téže polopřímce AD). Tím je dokázáno, že rovnost (6) je nutnou i postačující podmínkou pro to, aby se kružnice k_2, k_3 dotýkaly. Stručně říkáme, že kružnice k_2, k_3 se dotýkají *právě tehdy*, když platí rovnost (6).

Obdobnou podmínku pro obě zbývající stěny čtyřstěnu dostaneme, vyměníme-li mezi sebou dvojice vrcholů B, C a A, D; vyjde

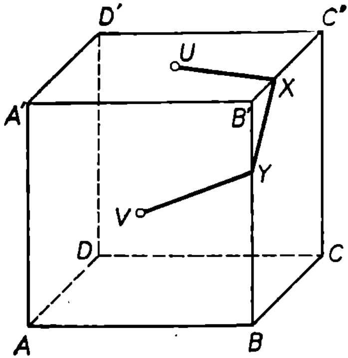
$$BA + DC = BD + AC,$$

což je rovnost (6).

Z výsledku úlohy 3 lze odvodit další závěry: dotýkají-li se kružnice vepsané stěnám ABD, ACD, platí rovnost (6); platí-li však rovnost (6), dotýkají se i kružnice vepsané stěnám BCA, BCD. Z toho vyplývá, že pokud jde o dotyk kružnic vepsaných stěnám, je možno čtyřstěny roztřídit do tří skupin. Pokuste se najít tyto skupiny a charakterizujte každou z nich vztahy mezi délkami hran čtyřstěnu.

Další úlohy se týkají povrchu krychle a kvádru.

Úloha 4. *Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$; U je střed její horní stěny $A'B'C'D'$, V je střed její přední stěny $ABB'A'$. Máme spojit body U, V lomenou čarou vedenou po povrchu krychle složenou ze tří shodných úseček a procházející přes pravou stěnu $BCC'B'$.*



Obr. 6

Řešení. Situaci si zobrazíme na názorném obrazu krychle (obr. 6). Hledaná lomená čára se skládá ze tří shodných úseček UX, XY, YV, které leží pořadě ve stěnách $A'B'C'D'$, $BCC'B'$, $ABB'A'$. Je ovšem třeba si uvědomit, že rčení „určete lomenou čáru jistých vlastností" znamená nalézt *všechny* lomené čáry žádaných vlastností, právě tak jako úloha „sestrojte kružnici vyhovující daným podmínkám" znamená sestrojit všechny kružnice vyhovující těmto podmínkám.

Úlohu 4 rozřešíme nejprve pomocí výpočtu. Označíme a délku hrany dané krychle, x, y délky úseček $B'X$, $B'Y$. Snadno odvodíme podle Pythagorovy věty tyto vztahy:

$$\begin{aligned} UX^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left|\frac{a}{2} - x\right|^2, \\ XY^2 &= x^2 + y^2, \\ VY^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left|\frac{a}{2} - y\right|^2. \end{aligned} \tag{9}$$

Protože je podle předpokladu $UX = VY$, dostaneme z 1. a 3. rovnice (9) po úpravě

$$(x - y)(x + y - a) = 0. \tag{10}$$

Z rovnice (10) plyne buď $x - y = 0$, nebo $x + y - a = 0$.

Je-li $x - y = 0$, dosadíme do 2. rovnice (9) $y = x$ a použijeme vztahu $UX = XY$. Z 1. a 2. rovnice (9) dostaneme po úpravě kvadratickou rovnici

$$x^2 + ax - \frac{a^2}{2} = 0,$$

která má jediný kladný kořen

$$x = a\,\frac{\sqrt{3} - 1}{2} \doteq 0{,}366\, a.^{*)} \qquad (11)$$

Pro tento kořen platí nerovnosti $0 < x < a$; dosadíme-li do (9) $y = x = \frac{1}{2}\, a\, (\sqrt{3} - 1)$, dostaneme $UX = XY = VY$; proto vztah (11) dává jedno řešení úlohy.

Je-li $x + y - a = 0$ (druhá možnost, která vyplývá z rovnice (10), dosadíme do 2. rovnice (9) $y = a - x$ a použijeme opět vztahu $UX = XY$. Dostaneme kvadratickou rovnici

$$x^2 - ax + \frac{a^2}{2} = 0;$$

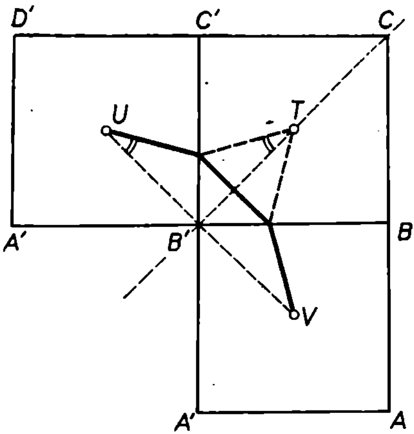
ta však nemá žádný reálný kořen, proto v tomto případě nedostaneme žádné další řešení úlohy.**)

Rozřešíme úlohu 4 ještě jednou pomocí sítě. Na obr. 7 je část sítě, která obsahuje ty tři stěny, přes něž hledaná lomená čára prochází, a je tu zakreslen i obraz l lomené čáry $AXYV$. Budeme nejprve zkoumat, zda čára l je souměrná podle přímky $B'C$, jak se tomu zdá nasvědčovat názor. K tomu účelu označíme T střed stěny $BCC'B'$;

---

*) Rovnici můžeme upravit na tvar $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$, z něhož plyne přímo vztah (11).

**) Rovnici můžeme upravit na tvar $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = -\frac{a^2}{4}$, z něhož plyne vyslovené tvrzení.



Obr. 7

protože body U, T jsou souměrně sdruženy podle přímky $B'C'$, je

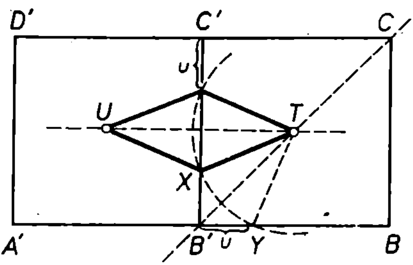
$$UX = TX; \qquad (12a)$$

z obdobného důvodu je

$$VY = TY. \qquad (12b)$$

Spojením vztahů (12a) (12b) s podmínkou $UX = XY = VY$ vyplývá, že trojúhelník XYT je rovnostranný.

K danému bodu Y úsečky BB' mohou příslušet jen dva body X_1, X_2 strany $B'C'$, pro něž platí $TY = TX_1 = TX_2$ (obr. 8); jeden z těchto bodů — bod X_1 — je souměrně sdružen s bodem Y podle přímky $B'C$, druhý — bod X_2 — je souměrně sdružen s bodem X_1 podle přímky UT. Snadno dokážeme, že platí

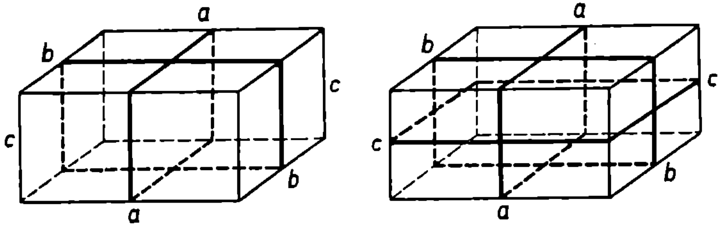


Obr. 8

$\sphericalangle X_2TY = 2\sphericalangle X_1TU + 2\sphericalangle X_1TB' = 2\sphericalangle UTB' = 90°$; proto trojúhelník X_2YT není rovnostranný. Bod X hledané lomené čáry l je tedy souměrně sdružen s bodem Y podle přímky $B'C$. Odtud vyplývá

$$\sphericalangle XTB' = \sphericalangle YTB' = \sphericalangle XUB' = \sphericalangle YVB' = 30°;$$

tím je lomená čára nalezena. Zkouškou si ověříme, že tato



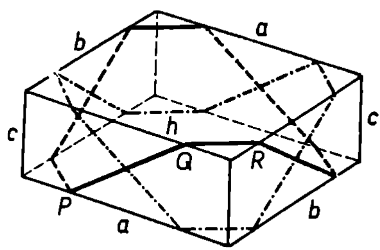
Obr. 9ab

čára má skutečně požadovanou vlastnost $UX = XY = YV$.

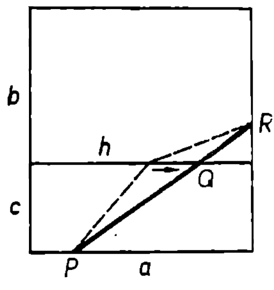
★

Další úloha se týká povrchu kvádru, a to zcela praktického problému — převazování krabice motouzem. Nejprve uvedeme několik vysvětlivek. Na obr. 9a, b, c je zobrazena krabice ve tvaru kvádru o rozměrech a, b, c převázána trojím způsobem a) jednoduše křížem, b) dvojitě křížem, c) „přes rohy".

Oboje vázání křížem je jednoduché a jasné. Vázání „přes rohy" je však třeba vysvětlit. Vázání se skládá ze dvou lomených čar (jedna z nich je na obr. 9c vyznačena tlustě, druhá čerchovaně); v praxi jsou ovšem obě lomené čáry vytvořeny z jednoho kusu provázku. Má-li být toto vázání pevné, nesmí se motouz posouvat po hranách krabice; to znamená, že např. spojnice bodů P, R překračující hranu h v bodě Q musí být co nejkratší (obr. 9c). Sestrojíme-li část



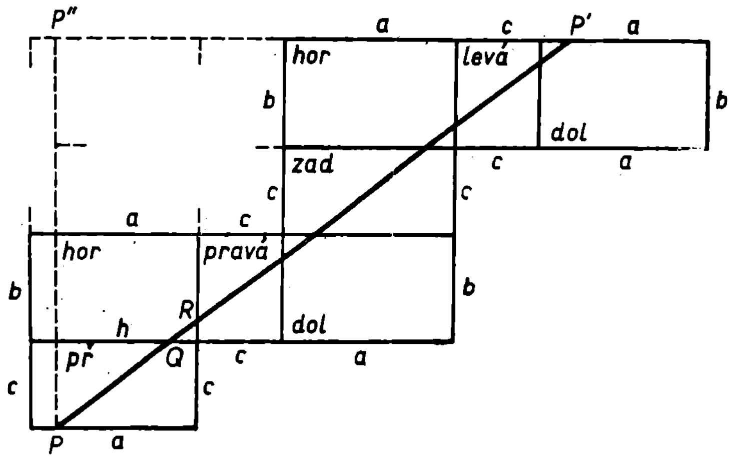
Obr. 9c



Obr. 10

sítě složenou z přední a horní stěny kvádru, zobrazí se v ní lomená čára PQR jako úsečka (obr. 10). Sestrojíme nyní síť kvádru, v níž se budou některé stěny opakovat tak, aby se v ní zobrazila celá tlustě vyznačená čára; z předcházejícího je zřejmé, že se tato lomená čára zobrazí jako úsečka. Konstrukce je provedena na obr. 11, stěny, přes něž lomená čára postupně přechází, jsou označeny zkratkami; při složení modelu tělesa splynou body P, P'. Sestrojte si takovou síť a složte z ní model kvádru.

Všechno, co předcházelo, bylo objasnění pojmu „vázání přes rohy"; nyní už můžeme vyslovit úlohu.



Obr. 11

Úloha 5. *Krabice tvaru kvádru má dané rozměry a, b, c. Máme rozhodnout, který druh vázání spotřebuje nejméně motouzu: zda jednoduché vázání křížem, či dvojité vázání křížem nebo vázání „přes rohy“.**)

Řešení. Označíme d_1, d_2, d_3 potřebné délky motouzu. Zřejmě je

$$\begin{aligned} d_1 &= 2a + 2b + 4c, \\ d_2 &= 4a + 4b + 4c. \end{aligned} \tag{13}$$

Vázání „přes rohy“ se skládá ze dvou lomených čar téže délky (viz obr. 9c, 11); podle obr. 11 je $\frac{1}{2} d_3 = PP'$. Úsečka PP' je přepona pravoúhlého trojúhelníka $PP'P''$, jehož odvěsny mají velikosti $PP'' = 2(b + c)$, $P'P'' = 2(a + c)$; je tedy podle Pythagorovy věty

$$d_3 = 2PP' = 4\sqrt{(a + c)^2 + (b + c)^2}. \tag{14}$$

Vypočteme $\frac{1}{4}\left(d_3^2 - d_1^2\right)$**); po úpravě vyjde

$$\frac{1}{4}\left(d_3^2 - d_1^2\right) = 3a^2 + 3b^2 - 2ab + 4c^2 + 4ac + 4bc =$$
$$= 2a^2 + 2b^2 + (a - b)^2 + 4c(a + b + c) > 0,$$

tj.

$$d_3 > d_1. \tag{15}$$

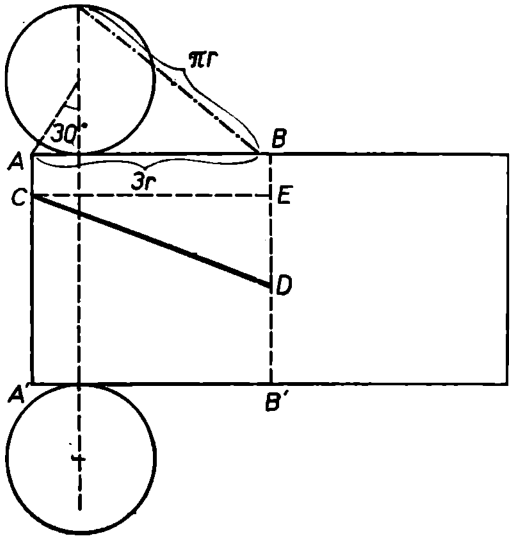
Dále vypočteme $\frac{1}{16}\left(d_3^2 - d_2^2\right)$; vyjde po úpravě

*) Přitom ovšem nepřihlížíme k motouzu spotřebovanému na vytvoření uzlů.

**) Porovnáme druhé mocniny kladných čísel d_1, d_3, abychom se vyhnuli počítání s odmocninami.

$$\frac{1}{16}\left(d_3^2 - d_2^2\right) = c^2 - 2ab, \tag{16}$$

tj. $d_3 < d_2$ právě tehdy, je-li $c < \sqrt{2ab}$.



Obr. 12

Odpověď na otázku úlohy tedy zní: Jednoduché vázání křížem je vždy kratší než vázání přes rohy. Vázání přes rohy je kratší než dvojité vázání křížem jen v případě, že platí pro rozměry krabice vztah $c < \sqrt{2ab}$. Tak např. má-li krabice čtvercové dno ($a = b$), je vázání přes rohy výhodnější než dvojité vázání křížem, je-li výška krabice (c) menší než úhlopříčka dna ($a\sqrt{2}$).

Na obr. 12 je zakreslena síť rotačního válce, kterou jistě všichni dobře znáte. Tato síť se skládá ze dvou shodných kruhů (podstav) a z obdélníka **O**, který vznikl rozvinutím pláště válce do roviny. Rozměry tohoto obdélníka jsou výška válce a délka obvodu podstavy, tj. délka kružnice. Je-li dán poloměr r podstavy a výška, nedovedeme sestrojit obdélník **O** eukleidovskými konstrukcemi *přesně*, ale známe *přibližné* konstrukce; jednou z nich je tzv. *Kochańského* konstrukce, která je provedena na obr. 13a. Úsečka KL je průměrem kružnice $k \equiv (S; r)$, přímka KM je její tečnou; dále platí $\sphericalangle KSM = 30°$, $MN = 3r$. Délka úsečky LN je přibližně délka polokružnice k.

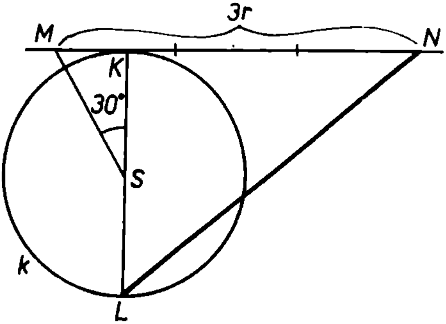
Jako při každé přibližné konstrukci musíme i při Kochańského konstrukci zjistit chybu, které se dopouštíme. Zásada pro použití přibližné konstrukce je totiž tato: konečná chyba nesmí překročit tzv. *grafickou chybu*, tj. 0,2 mm; s takovouto přesností dovedeme totiž pracovat v sešitě běžnými rýsovacími prostředky.

V našem případě určíme délky úseček: $KM = \dfrac{r}{\sqrt{3}}$, $KN = r\left(3 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, podle Pythagorovy věty $LN^2 = 4r^2 + r^2\left(3 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(13\frac{1}{3} - 2\sqrt{3}\right)r^2 \doteq 9{,}869232r^2$, a tedy $LN \doteq 3{,}141r$. Rozdíl správné délky πr polokružnice a přibližné délky LN je kladný a platí

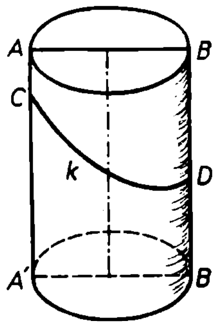
$$0 < \pi r - LN < 0{,}001r\,.$$

Má-li být $0{,}001r \leqq 0{,}2$ mm, musí být $r \leqq 0{,}2 . 10^3$ mm $= 200$ mm $= 2$ dm. Pro všechny konstrukce na listu papíru, kde poloměry kružnic nepřesahují zpravidla 1 dm, lze tedy použít Kochańského konstrukce.

Vrátíme se znovu k obr. 12. Je na něm zakreslena ještě úsečka CD, která není rovnoběžná s žádnou stranou obdélníka **O**. Svineme-li obdélník **O** v plášť válce, přejde úsečka *CD* v oblouk *k* křivky zvané *šroubovice*. Tato křivka má totiž tvar šroubového závitu. Na obr. 13b je zakreslen oblouk *k* na válci.



Obr. 13a



Obr. 13b

Úloha 6. *Podstava rotačního válce má průměr $AB = 2r$. Na stranách AA', BB' tohoto válce leží body C, D; jejich vzdálenosti od bodů A, B jsou $AC = a$, $BD = b$ $(a < b)$. Máme porovnat délky dvou spojnic bodů C, D vedoucích po povrchu válce:* a) *oblouku šroubovice*, b) *lomené čáry CABD.*

Řešení. Délku d oblouku šroubovice vypočteme jako délku úsečky CD v síti válce, a to z pravoúhlého trojúhelníka CDE. Platí $DE = b - a$, $CD = \pi r$; je tedy

$$d^2 = (b - a)^2 + \pi^2 r^2. \tag{17}$$

Pro délku d' lomené čáry $CABD$ platí

$$d' = a + b + 2r. \tag{18}$$

Ze vztahů (17), (18) dostaneme

$$d'^2 - d^2 = 4ab + 4r(a + b) + 4r^2 \left(1 - \frac{\pi^2}{4}\right). \quad (19)$$

Délka lomené čáry je tedy menší než délka oblouku šroubovice právě tehdy, platí-li podle (19)

$$ab + r(a + b) < \left(\frac{\pi^2}{4} - 1\right) r^2;$$

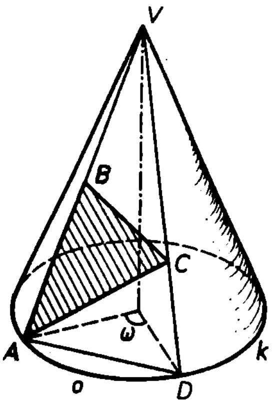
dělíme-li tuto nerovnost kladným číslem r^2, dostaneme

$$\frac{a}{r} \cdot \frac{b}{r} + \left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r}\right) < \frac{\pi^2}{4} - 1 \doteq 1,47. \quad (20)$$

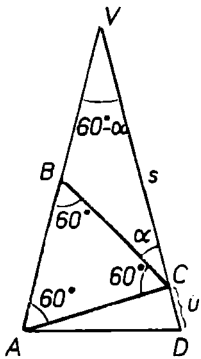
Z nerovnosti (20) je vidět, že výsledek závisí jen na podílech $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, nikoliv na číslech a, b, r samých. Zvolíme-li např. $a = \frac{1}{3}r$, $b = \frac{2}{3}r$, je $\frac{a}{r} = \frac{1}{3}$, $\frac{b}{r} = \frac{2}{3}$, $\frac{a}{r} \cdot \frac{b}{r} + \frac{a}{r} + \frac{b}{r} = \frac{11}{9} \doteq 1,22 < 1,47$; proto je kratší lomená čára. Zvolíme-li $a = \frac{r}{2}$, $b = \frac{2r}{3}$, je $\frac{a}{r} = \frac{1}{2}$; $\frac{b}{r} = \frac{2}{3}$, $\frac{a}{r} \cdot \frac{b}{r} + \frac{a}{r} + \frac{b}{r} = \frac{9}{6} = 1,5 > 1,47$, proto je kratší oblouk šroubovice.

Úloha 7. *Je dán rotační kužel s vrcholem V a bod A obvodu jeho podstavy; B je střed strany AV. Máme zjistit, zda lze sestrojit rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby vrchol C ležel na plášti kužele a máme sestrojit obraz bodu C v síti kužele.*

Řešení. Vrchol C rovnostranného trojúhelníka ABC leží na jisté straně VD daného kužele (obr. 14); je třeba zjistit délku tětivy AD. Úsečka AD je základna rovnoramenného trojúhelníka VAD, jehož ramena VA, VD jsou strany daného kužele a jemuž je „vepsán" rovnostranný trojúhelník ABC. Sestrojíme tedy úsečku AV, na ní bod B; nad úsečkou AB sestrojíme rovnostranný trojúhelník ABC, na



Obr. 14



Obr. 15a

polopřímce VC určíme bod D tak, aby platilo $VD = VA$ (obr. 15a). Bod C padne vždy mezi body V, D, neboť trojúhelník AVC má vnitřní úhly $\sphericalangle A = 60^0$, $\sphericalangle C = 60^0 + \alpha > \sphericalangle A$, proto je $VA > VC$. Tím je určena délka úsečky AD.

Nyní se zamyslete nad tím, proč naše úloha není ještě řešena, ač jsme určili tětivu AD i obraz bodu C. Na obr. 15a je úsečka AD tětivou kružnice k', jejíž poloměr je $s > r$. Na kuželi bude táž úsečka AD tětivou kružnice k o poloměru $r < s$. Musí tedy platit $AD \leqq 2r$; to je hledaná podmínka řešitelnosti, neboť tato nerovnost zaručuje možnost sestrojit na tělese stranu VD.

Rotační kužel je zpravidla dán poloměrem r podstavy a výškou v. Kteroukoli jeho stranu určíme pak jako přeponu pravoúhlého trojúhelníka, jehož odvěsny mají délky r, v.

Vyjádříme podmínku řešitelnosti úlohy 7 (tj. nutnou a postačující podmínku) jako vztah mezi čísly r, v. Protože je $AB = BV = BC$, je trojúhelník BVC rovnoramenný a pro jeho úhly platí $\alpha = 60^0 - \alpha$, tj. $\alpha = 30^0$. Úsečka AC je tedy výškou rovnoramenného trojúhelníka VAD a platí

$$AD^2 = \frac{s^2}{4} + CD^2, \qquad CD^2 = (s - VC)^2. \tag{21}$$

Trojúhelník VAC je pravoúhlý a při vrcholu V má úhel velikosti 30^0; proto je

$$VC = \frac{s}{2}\sqrt{3}. \tag{22}$$

Spojíme-li vztahy (21), (22), dostaneme

$$AD^2 = \frac{s^2}{4}(8 - 4\sqrt{3}) = s^2(2 - \sqrt{3}). \tag{23}$$

Protože je $s^2 = v^2 + r^2$, vyjde podmínka řešitelnosti ve tvaru

$$(v^2 + r^2)(2 - \sqrt{3}) \leqq 4r^2,$$

neboli po úpravě

$$v^2(2 - \sqrt{3}) \leqq r^2(2 + \sqrt{3})$$

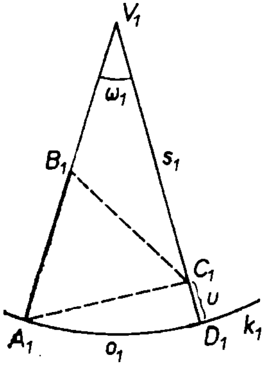
a dále

$$\frac{v^2}{r^2} \leqq \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = (2 + \sqrt{3})^2,$$

odtud

$$v \leqq (2 + \sqrt{3})r \doteq 3{,}732\, r. \tag{24}$$

Nerovnost (24) vyšla tedy jako *nutná* podmínka řešitelnosti úlohy. Obrácením předchozího postupu se přesvědčíme, že ze vztahu (24) plyne nerovnost $AD \leqq 2r$; tím je dokázáno, že nerovnost (24) je také *postačující* podmínkou pro řešitelnost úlohy — stručně řečeno, je *podmínkou řešitelnosti* naší úlohy.



Obr. 15b

Zbývá sestrojit obraz C_1 bodu C v síti kužele (v síti jeho pláště;) je to provedeno na obr. 15 b. Obr. 15b se liší velmi málo od obr. 15a; obr. 15a znázorňuje situaci *v řezu*, kdežto obr. 15b situaci *v síti*. Platí $V_1A_1 = VA$, $V_1B_1 = VB$, $V_1C_1 = VC$, $V_1D_1 = VD$, ale $A_1D_1 \neq AD, A_1C_1 \neq AC, B_1C_1 \neq$ $\neq BC$; pro úhel $\omega_1 = \sphericalangle A_1V_1D_1$ platí nerovnost $\omega_1 \neq 30^0$.

Při určení velikosti ω_1 si pomůžeme výpočtem. Protože na obr. 15b je znázorněna *síť* kužele, je délka oblouku A_1D_1 kružnice k_1 rovna délce oblouku AD kružnice k (obr. 14).

Označíme-li ω velikost středového úhlu $\sphericalangle ASD$ (S je střed kružnice k), platí

$$\frac{\pi r \omega}{180} = \frac{\pi s \omega_1}{180}\,.$$

a odtud

$$\omega_1 = \frac{r}{s} \cdot \omega. \tag{25}$$

Velikost úhlu ω určíme z trojúhelníka ADS podle vztahu

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{AD}{2r}\,; \tag{26}$$

přitom délka AD je dána vzorcem (23). Zvolíme-li např. $v = \frac{12}{5} r = 2{,}4r$ — což je možné vzhledem k podmínce (24) — dostaneme $s = \frac{13}{5} r$, a dále podle (23), (26)

$$AD = \frac{13}{5} r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}},$$

$$\sin \frac{\omega}{2} = 1{,}3 \cdot \sqrt{0{,}2679}.$$

Odtud plyne

$$\omega \doteq 84^0 35', \omega_1 = \frac{5}{13} \omega \doteq 32^0 32'.$$

Úhel velikosti ω_1 narýsujeme např. užitím tangenty: z tabulek zjistíme tg $\omega_1 \doteq 0{,}638$.

★

Dosud jsme se zabývali takovými tělesy, jejichž povrch bylo možno bez deformací rozvinout do roviny. Rozvinutí bez deformací znamená — názorně řečeno — toto: Je-li povrch tělesa zhotoven z nepružného materiálu, např. z plechu, nevyskytnou se při jeho rozvinutí do roviny a při vytvoření sítě ani zborceniny, ani trhliny.

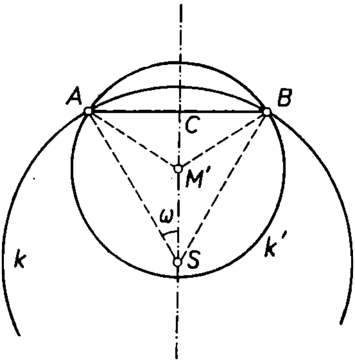
Tuto vlastnost však nemají všechna tělesa. Tak např. *povrch koule* čili plochu kulovou nelze rozvinout do roviny bez deformací. Proto jste se nikdy nesetkali se sítí koule a úlohy týkající se povrchu koule musíme řešit jinak.

Mohlo by se vám však zdát, že není pravda to, co jsme právě řekli, vzpomenete-li si, jak se sešívá plášť míče z několika třeba různobarevných pruhů. Tyto pruhy jsou rovinné obrazce, omezené oblouky kružnic. Zdá se, že při sešívání se vůbec nedeformují; ale není tomu tak. Deformace nastává vždycky, jenom že je tím menší, čím „užší" jsou pruhy, tj. čím je jejich počet větší.

Pravděpodobně víte, že každá rovinná křivka, která leží na kulové ploše, je kružnice. Poloměr ϱ takové kružnice je buď menší než poloměr r dané koule, nebo je $\varrho = r$. V prvním případě se nazývá kružnice *vedlejší*, v druhém *hlavní*. Dvěma různými body A, B kulové plochy, které neomezují její průměr, lze vést jedinou *hlavní kružnici;* dostaneme ji jako průsek kulové plochy s rovinou, která prochází body A, B a středem plochy.

Dá se dokázat, že *nejkratší spojnice dvou různých bodů A, B kulové plochy po této ploše je jeden z oblouků hlavní kružnice, která body A, B prochází.* Vyslovená věta platí i v případě, že body A, B omezují průměr kulové plochy. Experimentálně si můžete ověřit tuto větu tak, že na modelu koule (třeba na globu) upevníte gumičku ve dvou pevných bodech. Gumička zaujme tvar oblouku hlavní kružnice.

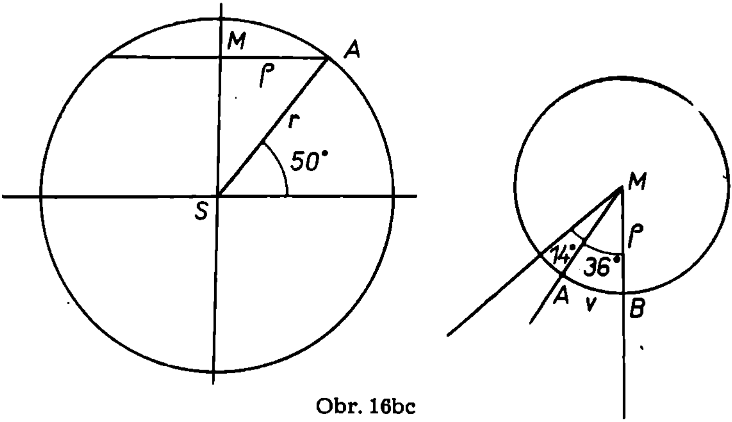
Ověříme si naši vyslovenou větu výpočtem, a to tak, že porovnáme délky oblouků hlavní a vedlejší kružnice, které dané dva body A, B spojují.



Obr. 16a

Úloha 8. *Města Praha a Kujbyšev leží přibližně na téže rovnoběžce* 50° *s. š.; jejich zeměpisné délky jsou přibližně* 14° *a* 50° *v. d. Máme zjistit, jaký je rozdíl jejich vzdáleností měřených jednak po rovnoběžce, jednak po hlavní kružnici.*

Řešení. Praha a Kujbyšev představují dva různé body A, B na povrchu Země; povrch Země pokládáme



Obr. 16bc

za plochu kulovou o poloměru 6370 km, tj. zanedbáváme zploštění Země. Pro větší názornost si znázorníme obě kružnice spojující body A, B — rovnoběžku i hlavní kružnici — v téže rovině. Na obr. 16a značí S střed Země, k hlavní kružnici procházející body A, B. V rovině ABS je sestrojena ještě kružnice k' se středem M', shodná se zeměpisnou rovnoběžkou procházející body A, B. Poloměr ϱ této rovnoběžky určíme pomocí obr. 16b, na kterém je zakreslena situace v rovině pražského poledníku. Z pravoúhlého trojúhelníka AMS plyne

$$\varrho = r \,.\, \cos 50^0 \,. \tag{27}$$

Vzdálenost bodů A, B po rovnoběžce, kterou označíme v_1, určíme pomocí obr. 16c, který představuje situaci v rovině pražské rovnoběžky. Zřejmě je

$$\sphericalangle\, AMB = 50^0 - 14^0 = 36^0 \tag{28}$$

a tedy podle (27), (28)

$$v_1 = \frac{36\pi\varrho}{180} = \frac{1}{5}\,\pi r \cos 50^0.$$

Numerický výpočet dá

$$v_1 \doteq 0{,}2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 6370 \,.\, 0{,}643 \doteq 2570\,(\mathrm{km}) \qquad (29)$$

Vzdálenost v_2 bodů A, B měřenou po hlavní kružnici vypočteme pomocí obr. 16a. Označíme-li C střed úsečky AB, pak je $AC = AM' \,.\, \sin \sphericalangle AM'C = \varrho \,.\, \sin \frac{1}{2} \sphericalangle AM'B = \varrho \sin 18^0$, a dále podle (27):

$$\sin \omega = \frac{AC}{r} = \frac{\varrho \cdot \sin 18^0}{r} = \sin 18^0 \cdot \cos 50^0; \qquad (30)$$

přitom je $\omega = \sphericalangle ASC$. Pro vzdálenost v_2 tedy dostaneme

$$v_2 = \frac{2\omega \cdot \pi r}{180} = \frac{\omega}{90} \pi r. \qquad (31)$$

Numerický výpočet: Z (30) dostaneme $\sin \omega \doteq 0{,}199$, $\omega \doteq 11{,}5^0$; z (31) dostaneme

$$v_2 = 0{,}128 \,.\, 3{,}14 \,.\, 6370 \doteq 2550\,(\mathrm{km}). \qquad (32)$$

Srovnání výsledků (29), (32) ukazuje, že vzdálenost Prahy a Kujbyševa měřená po hlavní kružnici je skutečně menší než jejich vzdálenost měřená po zeměpisné rovnoběžce. Rozdíl je však celkem nepatrný (asi 20 km), neboť obě místa jsou poměrně blízká. Kdybychom zvolili dvě vzdálenější místa, např. Tokio a San Francisco, byl by rozdíl obou vzdáleností značný. V takovém případě je rozdíl rozhodující ve vzduchoplavbě: letadlo nepoletí z Tokia do San Francisca přímo na východ, třebaže obě místa leží přibližně na téže rovnoběžce. Zkrátí si cestu tím, že poletí po oblouku hlavní kružnice, která se odchyluje od rovnoběžky k severu.

Znázorněte si spojnici Tokia a San Francisca na globu gumičkou a vypočtěte rozdíl obou vzdáleností jako v úloze 8.