2. Barycentrický počet

August Ferdinand Möbius byl významným německým matematikem a teoretickým astronomem. Jako jeden z prvních matematiků zavedl do geometrie nový účinný prostředek, homogenní souřadnice, čímž výrazně ovlivnil další rozvoj projektivní geometrie a určil nový směr, kterým se tato disciplína měla ubírat. Spolu s Juliem Plückerem (1801–1868) patřil mezi hlavní představitele algebraické projektivní geometrie.[1] Je považován za jednoho ze zakladatelů topologie.

Životní osudy A. F. Möbia jsou podrobně popsány v několika publikacích.[2] Připomeneme proto jen základní životopisné a bibliografické údaje, které nám umožní zařadit Möbiovy práce a výsledky do dobového i odborného kontextu.

2.1 August Ferdinand Möbius

August Ferdinand Möbius se narodil dne 17. listopadu 1790 ve městě Schulpforta (Sasko-Anhaltsko). Jeho otec Johann Heinrich Möbius byl učitelem tance, zemřel, když byly Augustovi tři roky. August neměl žádné sourozence. Do svých třinácti let byl vzděláván doma, roku 1803 nastoupil na střední školu v Schulpfortě. Roku 1809 ji ukončil a odešel na univerzitu do Lipska. Na přání matky začal studovat práva, brzy však shledal, že ho tento obor neuspokojuje, a proto již po prvním semestru dal přednost studiu matematiky, fyziky a astronomie. Zájem o matematiku totiž projevoval již v dětství. Z univerzitních profesorů ho nejvíce ovlivnil Karl Mollweide (1774–1825), astronom, který se zabýval také matematikou.[3]

Roku 1813 odjel A. F. Möbius na univerzitu do Göttingen, kde po celý rok studoval teoretickou astronomii u Carla Friedricha Gausse, který v té době působil jako ředitel tamní hvězdárny. Poté, opět na rok, odjel na univerzitu do Halle, kde si rozšiřoval vzdělání u Johanna Friedricha Pfaffa (1765–1825), Gaussova učitele a přítele. Zde se kromě astronomie zajímal hlavně o matematiku. Roku 1815 sepsal v Lipsku disertační práci o pozorování stálic nazvanou *De Computandis Occultationibus Fixarum per Planetas* a začal pracovat na své habilitační práci věnované trigonometrickým rovnicím. Obě tyto práce mu přinesly pověst teoretického astronoma. V době, kdy sepisoval habilitační práci, měl být povolán do pruské armády, ale podařilo se mu vojně vyhnout; někteří historikové matematiky dokonce tvrdí, že snaha vyhnout se službě v pruské armádě byla hlavním důvodem psaní habilitační práce. V roce 1816 K. Mollweide z vlastního zájmu přešel na stolici matematiky, a tak A. F. Möbius nastoupil na jeho místo jako mimořádný profesor astronomie a vyšší mechaniky.

[1] Souběžně s algebraickou projektivní geometrií se v první polovině 19. století rozvíjela také syntetická projektivní geometrie, jejímiž hlavními představiteli byli Jacob Steiner a Michel Chasles (1793–1880).

[2] Např. [FFW], [WA], str. 336–344, a [Can], str. 38–43; relevantní informace poskytuje i webová stránka http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Mobius.html.

[3] V letech 1807 až 1809 objevil K. Mollweide trigonometrické vzorce, které jsou po něm pojmenovány.

A. F. Möbiovi se dlouho nedařilo získat místo řádného profesora. Důvodem mohla být skutečnost, že nebyl příliš dobrým přednášejícím, nedařilo se mu zaujmout svými přednáškami platící studenty, a byl proto nucen pořádat některé své přednášky zdarma, aby přilákal alespoň nějaké studenty.

V roce 1816 bylo A. F. Möbiovi nabídnuto místo astronoma v Greifswaldu a o tři roky později místo matematika v Dorpatu[4]. Obě odmítl, částečně proto, že věřil ve vyšší odbornou úroveň univerzity v Lipsku, částečně pro svoji věrnost rodnému Sasku. Roku 1820 se oženil, během dalších let se mu narodila dcera a dva synové. Roku 1825 K. Mollweide zemřel a A. F. Möbius doufal, že by mohl získat uvolněné místo na stolici matematiky, což se však tentokrát nestalo.

Roku 1844 A. F. Möbia navštívil Hermann Günther Grassmann (1809–1877) a požádal ho, aby napsal recenzi na jeho nové dílo *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*,[5] jež obsahovalo mnoho myšlenek a výsledků podobných Möbiovým. A. F. Möbius, který v té době nerozpoznal význam Grassmannova díla, to však odmítl. Nicméně přesvědčil H. G. Grassmanna, aby svou práci zaslal do soutěže, a teprve poté, kdy Grassmannova práce získala cenu, napsal o ní alespoň krátké vyjádření (1847).[6]

Díky své pověsti úspěšného vědeckého pracovníka dostal A. F. Möbius v roce 1844 pozvání na univerzitu v Jeně a patrně v důsledku toho mu univerzita v Lipsku konečně nabídla místo řádného profesora vyšší mechaniky a astronomie, které zastával až do své smrti. Po celou dobu svého působení v Lipsku, tedy více než padesát let, pracoval také jako pozorovatel a později, od roku 1848, jako ředitel lipské hvězdárny (astronomická observatoř Pleissenburg). Podílel se na její přestavbě, kterou v letech 1818 až 1821 dokonce řídil. Předtím však navštívil řadu dalších observatoří v celém Německu, aby získal vlastní představy a potřebné zkušenosti. Zemřel dne 26. září 1868 v Lipsku.

A. F. Möbius byl významným představitelem algebraické geometrie, je považován za jednoho ze zakladatelů topologie. Jeho zájem o tuto matematickou disciplínu ilustruje např. skutečnost, že se ještě před formulací tzv. *problému čtyř barev* zabýval jeho jednodušší variantou.[7]

---

[4] Jedná se o starší německý název estonského města Tartu, v němž sídlí nejstarší a nejznámější estonská univerzita; byla založena roku 1632 švédským králem Gustavem II. Adolfem.

[5] Viz Grassmann H. G., *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik, dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert*, Verlag von Otto Wigand, Leipzig, 1844, 279 stran.

[6] O Grassmannově monografii viz Bečvář J., *Z historie lineární algebry*, edice Dějiny matematiky, svazek 35, Matfyzpress, Praha, 2007, 519 stran; kapitola VIII. Grassmannova lineární algebra, str. 323–363. O propagaci a přijetí Grassmannových výsledků v českých zemích viz Nádeník Z., *Reception of Grassmann's ideas in Bohemia*, in Schubring G. (ed.), *Hermann Günther Grassmann (1809–1877): visionary mathematician, scientist and neohumanist scholar*, Boston Studies in the Philosophy of Science 187(1996), 147–153.

[7] Roku 1840 A. F. Möbius předložil k řešení následující problém: Král měl pět synů. Ve své závěti stanovil, aby bylo po jeho smrti království rozděleno mezi jeho syny na pět oblastí tak, aby každá oblast měla společnou hranici se všemi ostatními oblastmi. Otázka zněla, zda lze královu poslední vůli splnit. Odpověď na tuto otázku je záporná a dnes je poměrně snadné to dokázat.

Svoji nejvýznamnější geometrickou monografii *Der barycentrische Calcul* publikoval A. F. Möbius v roce 1827 (viz dále). Roku 1837 vydal dvoudílnou učebnici *Lehrbuch der Statik*[8] obsahující geometrický pohled na statiku, který mimo jiné vedl ke studiu svazků přímek v prostoru. Ačkoliv jeho nejdůležitější práce spadají do oblasti matematiky, sepsal také významné astronomické práce, v nichž se věnoval mimo jiné nebeské mechanice; těmi nejznámějšími jsou *Die Hauptsätze der Astronomie*[9] a *Die Elemente der Mechanik des Himmels*[10].

Obr. 22: August Ferdinand Möbius

Téměř všechny Möbiovy matematické práce byly publikovány v letech 1828 až 1858 v časopisu *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Jedná se převážně o geometrické studie, většina z nich se zabývá rozvíjením a aplikacemi metody, jejíž základy byly položeny v Barycentrickém počtu.[11] Jeho matematické práce, i když neobsahovaly vždy původní výsledky, vynikaly přehledným, jasným

[8] Viz Möbius A. F., *Lehrbuch der Statik*, Erster Theil, Zweiter Theil, bei Georg Joachim Göschen, Leipzig, 1837, 355 + 313 stran.

[9] Viz Möbius A. F., *Die Hauptsätze der Astronomie: zum Gebrauche bei seinen Vorlesungen für Gebildete zusammengestellt*, bei Georg Joachim Göschen, Leipzig, 1836, 30 stran.

[10] Viz Möbius A. F., *Die Elemente der Mechanik des Himmels, auf neuem Wege ohne Hülfe höherer Rechnungsarten dargestellt*, Weidmann'sche Buchhandlung, Leipzig, 1843, 315 stran.

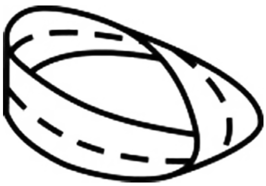
[11] Např. v článku *Barycentrische Lösung der Aufgabe des Herrn Th. Clausen* (Journal für die reine und angewandte Mathematik 5(1830), 102–106) A. F. Möbius s využitím barycentrického počtu řeší následující úlohu: Kružnici je opsán a vepsán trojúhelník tak, že vrcholy opsaného trojúhelníku leží na přímkách, v nichž leží strany vepsaného trojúhelníku. Úkolem je nalézt druhý trojúhelník, je-li jeden z trojúhelníků zadán. Dále např. články *Über eine allge-*

a efektivním výkladem. A. F. Möbius měl velkou představivost a občas postupoval naprosto originálním způsobem. Pracoval pomalu, víceméně izolován od ostatních matematiků, a dokud svoji práci zcela nedokončil, nikde se o ní nezmiňoval. Jeho sebrané spisy vyšly ve čtyřech svazcích v Lipsku v letech 1885 až 1887.[12]

Na závěr zmíníme ještě pár zajímavostí. August Ferdinand nebyl jediným členem rodiny Möbiů, který se stal významným vědcem. Jeho vnuk Paul Julius Möbius (1853–1907), neurolog, se proslavil svými kontroverzními teoriemi o struktuře lidského mozku; podle jednoho jeho závěru se centrum logického myšlení nachází v levém koutu čela (1900). Od něho také víme, že jeho dědeček považoval matematiku za poetickou záležitost. Německý historik matematiky Moritz Cantor (1829–1920) popsal následující Möbiův každodenní zvyk (viz [Can], str. 41): Při odchodu z domu si prý vždy připomněl německou průpovídku „3S und GUT“ složenou z počátečních písmen věcí, které nechtěl v žádném případě zapomenout: Schlüssel (klíč), Schirm (deštník), Sacktuch (kapesník), Geld (peníze), Uhr (hodinky), Taschenbuch (zápisník). Po A. F. Möbiovi je pojmenována postava Johanna Wilhelma Möbia z Dürrenmattova dramatu *Fyzikové*.[13]

2.2 Möbiův list

Möbiovo jméno je dnes v matematice nejčastěji spojováno s tzv. *Möbiovým listem* (proužkem, páskou), což je dvourozměrný útvar, který má pouze jednu stranu, z čehož vyplývají jeho další zajímavé topologické vlastnosti, např. neorientovatelnost. V trojrozměrném prostoru jej lze jednoduše vytvořit tak, že se konce obdélníkového proužku papíru vzájemně otočí o 180° a slepí dohromady (viz obr. 23).



Obr. 23: Möbiův list

meinere Art der Affinität geometrischer Figuren (Journal für die reine und angewandte Mathematik 12(1834), 109–133) nebo *Über die Zusammensetzung gerader Linien und eine daraus entspringende neue Begründungsweise des barycentrischen Calculs* (Journal für die reine und angewandte Mathematik 28(1844), 1–9).

[12] Baltzer R., Klein F., Scheibner W. (eds.), *August Ferdinand Möbius, Gesammelte Werke*, Band I–IV, Verlag von S. Hirzel, Leipzig, 1885, 1886, 1886, 1887, 633 + 708 + 580 + 731 stran.

[13] Švýcarský dramatik Friedrich Dürrenmatt (1921–1990) hru *Fyzikové* (die Physiker) sepsal roku 1962. Jedná se o komedii o dvou dějstvích s detektivní zápletkou. Děj se odehrává v psychiatrickém ústavu, kam se fyzik Möbius, předstírající duševní chorobu, uchýlil z obavy před svým vynálezem, který může zničit svět. V českém překladu hra poprvé vyšla v nakladatelství Dilia v Praze v roce 1963 (přeložil Bohumil Černík, 78 stran), a dále v letech 1972 (přeložil Jiří Stach, 72 stran) a 1989 (přeložil Jiří Stach, 65 stran).

Německý matematik Johann Benedict Listing (1808–1882), který roku 1847 zavedl termín topologie v první práci věnované tomuto tématu,[14] vytvořil Möbiův proužek již roku 1858, dříve než A. F. Möbius. Dospěl k němu v souvislosti se snahou najít komplikovaný objekt, pro který neplatí Eulerova věta pro konvexní mnohostěny.[15] Svůj objev publikoval roku 1862 v práci *Der Census räumlicher Complexe, oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyedern.*[16] Zdůraznil, že proužek má pouze jednu stěnu, jednu hranu a 4 vrcholy (nebo žádný, pokud nepočítáme spoj).

Tento objekt je však nazván po A. F. Möbiovi, který jej zcela nezávisle na J. B. Listingovi popsal roku 1861 v rukopisu předloženém Pařížské akademii věd jako odpověď na soutěžní téma týkající se nových poznatků z geometrické teorie mnohostěnů.[17] A. F. Möbius zde zkoumal obecné vlastnosti ploch majících pouze jednu stranu. Ačkoliv jeho text obsahoval celou řadu nových, zajímavých myšlenek, porota jej neocenila. Přispěl k tomu zřejmě fakt, že byl napsán špatnou francouzštinou, a patrně proto jeho význam nebyl pochopen. Základní myšlenky svého příspěvku publikoval později v pojednáních *Theorie der elementaren Verwandtschaft*[18] a *Über die Bestimmung des Inhalts eines Polyeders*[19]. Původní rukopis z roku 1861 byl objeven až po Möbiově smrti.

A. F. Möbius v této souvislosti přišel s pojmem *orientovatelnost*,[20] který mu umožnil rozlišovat kladné a záporné délky, obsahy a objemy. Navíc Möbiův list není jedinou jednostrannou plochou, kterou uvažoval; popsal totiž celou třídu mnohostěnů s touto vlastností – všechny mají nulový objem a nesplňují Eulerův vzorec. Nejmenší má 10 trojúhelníkových stěn, 15 hran a 6 vrcholů. A. F. Möbius též zavedl pojem *duální mnohostěn.*[21]

[14] Viz Listing J. B., *Vorstudien zur Topologie*, in Göttinger Studien, Erste Abtheilung: Mathematische und naturwissenschaftliche Abhandlungen, redigirt von Dr. August Bernhard Krische, bei Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1847, 811–875.

[15] Podle Eulerovy věty pro konvexní mnohostěny platí rovnost $s + v = h + 2$, kde s je počet stěn, h je počet hran a v je počet vrcholů mnohostěnu.

[16] Viz Listing J. B., *Der Census räumlicher Complexe, oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyedern*, aus dem zehnten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, in der Dieterichschen Buchhandlung, Göttingen, 1862, 86 stran.

[17] Originální zadání soutěžního úkolu znělo: *Perfectionner en quelque point important la théorie géométrique des polyèdres.* Viz Programme des prix proposés par l'Académie des sciences pour les années 1858, 1859, 1860 et 1861, Institut impérial de France, Académie des sciences, Sciences mathématiques, Grand prix de mathématiques, proposé pour 1861, str. 6.

[18] Viz Möbius A. F., *Theorie der elementaren Verwandtschaft*, Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Classe 15(1863), S. Hirzel, Leipzig, 18–57.

[19] Viz Möbius A. F., *Über die Bestimmung des Inhalts eines Polyeders*, Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Classe 17(1865), S. Hirzel, Leipzig, 31–68.

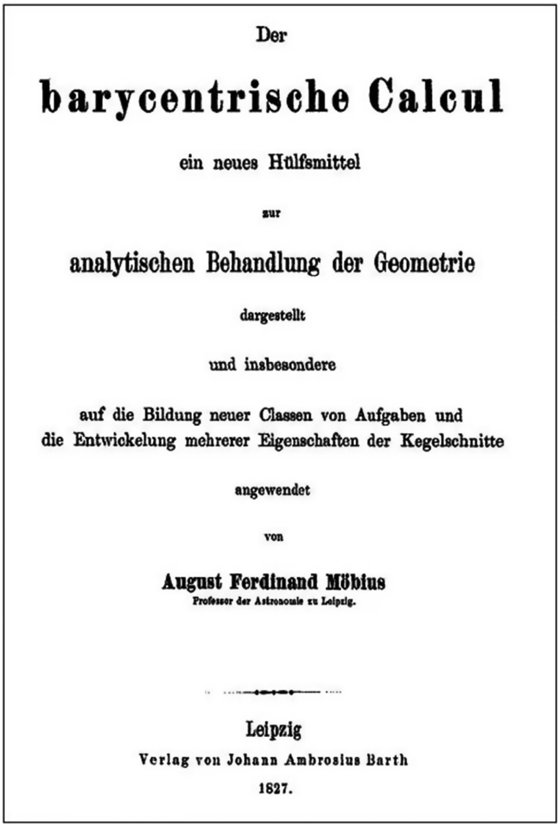
[20] Pojem orientovatelné veličiny v syntetické geometrii poprvé systematicky užíval Lazare Nicolas Carnot v práci *Géométrie de position* z roku 1803. A. F. Möbius tento pojem zavedl a využíval v analytické geometrii.

[21] Duálním mnohostěnem k danému mnohostěnu rozumíme mnohostěn, jenž má vrcholy ve středech jeho stěn. Navzájem duálními mnohostěny jsou např. krychle a pravidelný osmistěn nebo pravidelný dvanáctistěn a pravidelný dvacetistěn. Pravidelný čtyřstěn je duální sám k sobě.

2.3 Barycentrické (homogenní) souřadnice

Möbiův přístup

Roku 1827 vydal A. F. Möbius knihu *Der barycentrische Calcul*,[22] v níž podal úplný výklad svého nového počtu. Základní myšlenkou se zabýval již roku 1818, o pět let později publikoval první nástin své nové metody jako krátký dodatek k práci *Beobachtungen auf der Königlichen Universitäts-Sternwarte zu Leipzig.*[23]



Der

barycentrische Calcul

ein neues Hülfsmittel

zur

analytischen Behandlung der Geometrie

dargestellt

und insbesondere

auf die Bildung neuer Classen von Aufgaben und
die Entwickelung mehrerer Eigenschaften der Kegelschnitte

angewendet

von

August Ferdinand Möbius

Professor der Astronomie zu Leipzig.

Leipzig

Verlag von Johann Ambrosius Barth

1827.

Obr. 24: August Ferdinand Möbius – *Der barycentrische Calcul*

[22] Viz Möbius A. F., *Der barycentrische Calcul, ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie dargestellt und insbesondere auf die Bildung neuer Classen von Aufgaben und die Entwickelung mehrerer Eigenschaften der Kegelschnitte*, Georg Olms Verlag, Leipzig, 1827, 454 stran; též viz *August Ferdinand Möbius, Gesammelte Werke*, Erster Band, Herausgegeben von R. Baltzer, Verlag von S. Hirzel, Leipzig, 1885, 1–388.

[23] Viz Möbius A. F., *Zwei geometrische Aufgaben*, Anhang zu „Beobachtungen auf der Königlichen Universitäts-Sternwarte zu Leipzig etc.“, bei Carl Cnobloch, Leipzig, 1823, 57–64; též *August Ferdinand Möbius, Gesammelte Werke*, Erster Band, Herausgegeben von R. Baltzer, Verlag von S. Hirzel, Leipzig, 1885, 389–398.

V *Barycentrickém počtu* poprvé představil tzv. *barycentrické* (*homogenní*) *souřadnice*. Nezávisle na něm a téměř ve stejném okamžiku publikovali Karl Wilhelm Feuerbach (1800–1834)[24] v Německu a Étienne Bobillier (1798–1840)[25] ve Francii práce využívající homogenní souřadnice.

A. F. Möbius svůj nový počet odvodil na základě metod geometrické statiky. V předmluvě k *Barycentrickému počtu* poukázal na skutečnost, že fyzikální koncept těžiště se s úspěchem využíval již v Archimédově době, kdy vedl k objevu řady vztahů mezi geometrickými veličinami. Zmínil rovněž Guldinovy věty.[26]

> *Es ist bekannt, dass die der Mechanik zugehörige Lehre vom Schwerpunkte schon oftmals als Hülfsmittel zur Erfindung rein geometrischer Wahrheiten benutzt worden ist. Die frühesten Versuche sind unstreitig die mechanische Quadratur der Parabel von Archimedes und der schon in des Pappus mathematischen Sammlungen sich vorfindende, jetzt unter dem Namen der centrobaryschen oder Guldins Regel bekannte Satz. ... Von demselben elementaren und rein geometrischen Begriffe des Schwerpunkts gehen auch die vorliegenden Untersuchungen aus. Die erste Veranlassung hierzu war die Erwägung der Fruchtbarkeit des Satzes, dass jedes System gewichtiger Punkte nur einen Schwerpunkt hat, und dass daher, in welcher Folge man auch die Punkte nach und nach in Verbindung bringt, zuletzt doch immer ein und derselbe Punkt gefunden werden muss. Die einfache Art, womit ich dadurch, mehrere geometrische Sätze zu beweisen, mich im Stande sah, bewog mich, zu noch grösserer Vereinfachung solcher Untersuchungen einen dafür passenden Algorithmus auszumitteln.* ([M2], str. iii a iv)

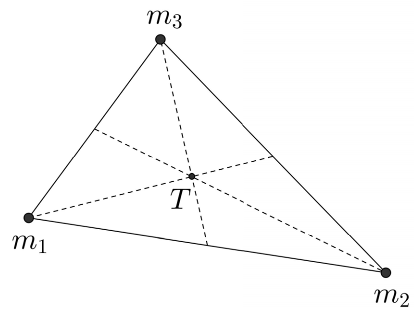
Základní myšlenka Möbiových barycentrických souřadnic je následující. Uvažujme pevně daný trojúhelník. Jako souřadnice libovolného bodu roviny označme hmoty m_1, m_2, m_3, které musíme umístit ve vrcholech daného trojúhelníku tak, aby uvažovaný bod roviny byl těžištěm (barycentrem, v originále *Schwerpunkt*) těchto hmot (viz obr. 25, na němž bodu T odpovídají souřadnice $m_1 = m_2 = m_3$). Pokud uvažovaný bod leží na hranici trojúhelníku, je jedna ze souřadnic nulová, pokud leží vně daného trojúhelníku, je alespoň jedna ze souřadnic záporná. Pokud všechny tři hmoty vynásobíme stejnou konstantou, jejich těžiště se nezmění. Barycentrické souřadnice bodu proto nejsou určeny jednoznačně, jednoznačně je určen pouze jejich poměr $m_1 : m_2 : m_3$.

[24] Viz Feuerbach K. W., *Grundriß zu analytischen Untersuchungen der dreieckigen Pyramide*, In Commission bei Riegel und Wiesner, Nürnberg, 1827, 48 stran.

[25] Viz Bobillier É., *Géométrie de situation. Démonstration de quelques théorèmes sur les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres*, Annales de mathématiques pures et appliquées 18(1827/28), 89–98; *Géométrie analytique. Recherche de quelques lieux géométriques, dans l'espace*, Annales de mathématiques pures et appliquées 18(1827/28), 230–248.

[26] Guldinovy věty (též Pappos–Guldinovy věty) jsou pojmenovány po švýcarském matematikovi Paulu H. Guldinovi (1577–1643). Slouží k výpočtu povrchu a objemu rotačních těles. První Guldinova věta říká, že objem rotačního tělesa je roven součinu obsahu rotujícího útvaru a délky kružnice, kterou při rotaci opisuje těžiště rotujícího útvaru. Podle druhé Guldinovy věty je povrch rotačního tělesa roven součinu obvodu rotujícího útvaru a délky kružnice, kterou při rotaci opisuje těžiště rotujícího útvaru.

V tomto souřadném systému mají všechny členy rovnice nějaké křivky nebo plochy stejný stupeň, jsou tzv. homogenní (odtud název). Barycentrické souřadnice umožňují charakterizovat i nekonečně vzdálené body v projektivní rovině a operovat s imaginárními prvky.



Obr. 25: Barycentrické souřadnice

Vytvořením prvního významného příkladu homogenních souřadnic vlastně A. F. Möbius ukázal cestu, jak přenést Descartův analytický přístup do kontextu projektivní geometrie. Möbiova myšlenka užití barycentrických souřadnic k popisu bodů projektivní roviny připoutala okamžitě pozornost celé matematické komunity. Homogenní souřadnice se brzy staly obecně používaným prostředkem algebraické projektivní geometrie.

Plückerův přístup

A. F. Möbius inspiroval například Julia Plückera (1801–1868),[27] který v článku *Über ein neues Coordinatensystem*[28] z roku 1830 poprvé představil tzv. *trilineární souřadnice*. Postupoval však jinak než A. F. Möbius. Uvažoval tři různé přímky OO', OO'' a $O'O''$, z nichž každé dvě jsou různoběžné, a za souřadnice libovolného bodu M roviny vzal orientované kolmé vzdálenosti p, q, r bodu M od daných přímek (viz obr. 26, na němž pro souřadnice vnitřního bodu M ostroúhlého trojúhelníku $OO'O''$ platí: $p > 0$, $q < 0$, $r < 0$). Tyto souřadnice opět nejsou určeny jednoznačně (závisí na volbě jednotky), jsou určeny až na násobek libovolnou nenulovou konstantou.

Ve druhém svazku dvoudílné knihy *Analytisch-geometrische Entwicklungen*[29] zavedl J. Plücker obecné homogenní souřadnice projektivního prostoru, jimiž lze

[27] Julius Plücker byl dalším významným představitelem algebraické projektivní geometrie. Studoval na univerzitách v Bonnu a v Paříži. Roku 1825 v Bonnu obhájil svou disertační práci. V letech 1828 až 1831 působil jako mimořádný profesor matematiky na univerzitě v Bonnu, v letech 1832 až 1834 jako řádný profesor matematiky na univerzitě v Berlíně. Od roku 1836 až do své smrti zastával místo řádného profesora matematiky a fyziky na univerzitě v Bonnu. Ačkoliv jeho nejvýznamnější práce spadají do oblasti matematiky, sám se považoval spíše za experimentálního fyzika. Věnoval se krystalomagnetismu a spektrální teorii. V roce 1859 objevil katodové paprsky, jež vznikají ve výbojové trubici za sníženého tlaku.

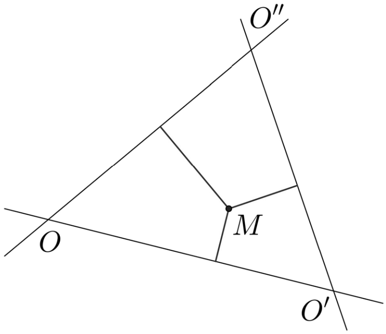
[28] Viz Journal für die reine und angewandte Mathematik 5(1830), 1–36.

[29] Viz Plücker J., *Analytisch-geometrische Entwicklungen*, Zweiter Band, G. D. Baedeker, Essen, 1831, 293 stran.

popsat také přímky a roviny. Uvažoval speciální případ trilineárních souřadnic, který odpovídá situaci, kdy se jedna strana trojúhelníku stane přímkou v nekonečnu. Tyto souřadnice (x_1, x_2, x_3) získáme z obvyklých kartézských souřadnic (x, y) substitucí

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}.$$

Rovnice každé křivky je pak homogenní v souřadnicích (x_1, x_2, x_3).



Obr. 26: Trilineární souřadnice

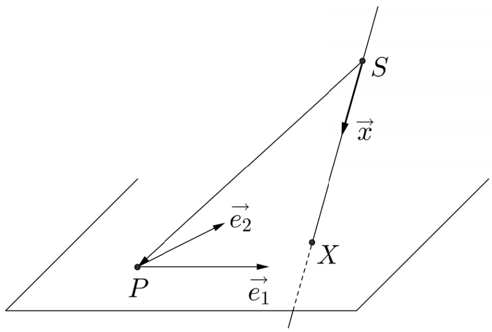
Homogenní souřadnice umožnily J. Plückerovi algebraicky charakterizovat nekonečně vzdálené (nevlastní) a imaginární prvky (přímka v nekonečnu má v tomto homogenním souřadném systému rovnici $x_3 = 0$) a vedly k zavedení přímkových souřadnic. Má-li rovnice přímky tvar $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$, představuje trojice čísel (u_1, u_2, u_3) tzv. přímkové souřadnice této přímky. Tuto rovnici můžeme chápat jednak jako podmínku, za níž proměnný bod (x_1, x_2, x_3) leží na pevně dané přímce určené souřadnicemi (u_1, u_2, u_3), jednak jako podmínku, za níž proměnná přímka určená souřadnicemi (u_1, u_2, u_3) prochází pevně daným bodem (x_1, x_2, x_3). Ze symetrie výrazu $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3$ tak J. Plücker analyticky odvodil platnost principu duality. Plückerovo jméno nese šest homogenních souřadnic $p_{ij} = x_iy_j - x_jy_i$ přímky v prostoru, která prochází body (x_i) a (y_i), ačkoliv je jako první zavedl H. G. Grassmann roku 1844 ve své knize *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*.

Na základě analytického přístupu v geometrii představil J. Plücker ještě jednu zcela původní myšlenku. Roku 1865 (podle některých zdrojů však již v roce 1829) poukázal na to, že geometrie nemusí být vystavena pouze na bodu jako základním prvku; přímky, roviny nebo kružnice lze rovněž užít jako základní prvky nějaké geometrie. Tato myšlenka vedla k prvním úvahám o dimenzi geometrie. Tento pojem byl zaveden jako počet nezávislých údajů, kterých je potřeba k popisu polohy základního prvku uvažované geometrie. Např. rovina je dvoudimenzionální, pokud uvažujeme za základní prvky body nebo přímky, neboť bod v rovině se zvolenou soustavou souřadnic je určen dvěma souřadnicemi, dvěma čísly, stejně jako přímka, jejíž polohu v rovině můžeme jednoznačně popsat pomocí úseků, které vytíná na obou souřadných osách. Na druhé straně je však rovina trojdimenzionální, pokud za základní prvky uvažujeme kružnice, k jejichž jednoznačnému popisu polohy jsou třeba tři údaje – souřadnice jejího středu a poloměr.

J. Plücker později zobecnil Möbiovu myšlenku barycentrických souřadnic ve své knize *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*,[30] v níž homogenní souřadnice zavedl jako souřadnice, které se vztahují k základnímu čtyřstěnu.

Současný přístup

Pro porovnání uveďme, že v dnešní době se homogenní souřadnice zavádějí tak, že se v rovině zvolí lineární soustava souřadnic – bod P (počátek) a dva lineárně nezávislé vektory $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$. Mimo danou rovinu se zvolí bod S (viz obr. 27).



Obr. 27: Homogenní souřadnice

Každá přímka procházející bodem S je kromě tohoto bodu jednoznačně určena nenulovým směrovým vektorem $\vec{x}$; tento vektor lze zapsat jako lineární kombinaci vektorů $P - S$, $\vec{e_1}$ a $\vec{e_2}$:

$$\vec{x} = x_0(P - S) + x_1 \vec{e_1} + x_2 \vec{e_2} \,.$$

Při hledání průsečíku $X = [x, y]$ přímky s danou rovinou pak řešíme rovnici

$$P + x \vec{e_1} + y \vec{e_2} = S + t \left[x_0(P - S) + x_1 \vec{e_1} + x_2 \vec{e_2} \right],$$

neboli

$$P - S + x \vec{e_1} + y \vec{e_2} = tx_0(P - S) + tx_1 \vec{e_1} + tx_2 \vec{e_2} \,.$$

Protože vektory $P-S$, $\vec{e_1}$ a $\vec{e_2}$ jsou lineárně nezávislé, musí být splněny následující podmínky:

$$1 = tx_0, \quad x = tx_1, \quad y = tx_2.$$

Je-li x_0 nenulové, získáme jako průsečík vlastní bod $X = \left[\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right]$, je-li x_0 rovno nule, má uvažovaná přímka s danou rovinou společný nevlastní bod, neboli směr $x_1 \vec{e_1} + x_2 \vec{e_2}$. Trojici čísel (x_0, x_1, x_2) nazýváme homogenní souřadnice (vlastního nebo nevlastního) bodu projektivní roviny; jsou určeny až na násobek libovolnou nenulovou konstantou. Dá se ukázat, že Möbiovy barycentrické souřadnice jsou jejich speciálním, limitním případem, kdy vztažný bod S uvažujeme v nekonečnu.

[30] Viz Plücker J., *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*, Erste Abtheilung, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1868, 226 stran, Zweite Abtheilung, Herausgegeben von Felix Klein, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1869, str. 227–378.

2.4 Geometrické transformace

Celá kniha *Der barycentrische Calcul* je rozdělena do tří tematických částí. První část (9 kapitol, str. 3–178) připomíná pojem těžiště a jeho vlastnosti a zavádí novou metodu barycentrického počtu pro určení polohy bodů. Dále se zabývá vyjádřením přímek, rovin, křivek (rovinných i prostorových) a ploch v těchto nových souřadnicích a převodem mezi barycentrickými a kartézskými souřadnicemi. Druhá část (8 kapitol, str. 179–368) se věnuje geometrickým transformacím, třetí část (5 kapitol, str. 369–454) se týká kuželoseček.

V následujících odstavcích se zaměříme na Möbiův přístup ke geometrickým transformacím a připomeneme jeho stěžejní myšlenky. V *Barycentrickém počtu* představil obecný koncept geometrické transformace, zaměřil se na vyšetřování transformací zprostředkujících přechod od jednoho geometrického útvaru k druhému. Geometrickou transformaci, tj. vzájemně jednoznačné zobrazení mezi dvěma objekty prostoru, nazýval termínem *Verwandtschaft* (příbuznost).[31] Základní „geometrické příbuznosti" byly tehdy všestranně studovány, a proto se brzy objevila otázka jejich klasifikace, jíž se A. F. Möbius ve své knize zabýval.

V předmluvě nejprve popsal, jak v něm velké možnosti barycentrických souřadnic podnítily zájem o studium geometrických příbuzností. To ho vedlo ke zkoumání vztahů mezi dvěma geometrickými útvary, a tak „vznikla druhá část jeho knihy pojednávající o geometrických příbuznostech jako o nauce, která v sobě zahrnuje základy veškeré geometrie a která by byla jednou z nejobtížnějších, kdyby měla být zpracována v plné obecnosti a do všech důsledků". Poukázal přitom na skutečnost, že v dané době se pozornost soustředí pouze na nejjednodušší typy geometrických příbuzností, speciálně na ty, které mají své využití v elementární geometrii.

> *Zugleich aber wurde ich dadurch bewogen, noch mehrere dergleichen Beziehungen zwischen Figuren auszumitteln, und somit entstand der zweite Abschnitt meines Buchs, welcher von den geometrischen Verwandtschaften handelt, einer Lehre, welche in dem hier gebrauchten Sinne die Grundlage der ganzen Geometrie in sich fasst, die aber auch eine der schwierigsten seyn möchte, wenn sie in völliger Allgemeinheit und erschöpfend vorgetragen werden soll. Im Gegenwärtigen sind nur die einfachsten Arten der Verwandtschaften betrachtet worden, diejenigen nämlich, welche auch in der niedern Geometrie in Anwendung kommen können.* ([M2], str. x)

V předmluvě též uvedl následující typy geometrických příbuzností: shodnost (*die Gleichheit und Aehnlichkeit*),[32] podobnost (*die Aehnlichkeit*), afinitu (*die Affinität*) a kolineaci (*die Collineation*), a vysvětlil jejich vzájemný vztah.[33]

[31] Jedná se nejspíše o německý překlad Eulerova označení *affinitas*.

[32] A. F. Möbius pro „shodné" útvary i v první polovině 19. století stále užívá dřívější termín „shodné a podobné". Termín „shodný" (*gleich* = stejný, rovný) vyjadřující vztah mezi dvěma útvary používal ve smyslu „rovnoplochý". Viz [M2], str. 213: *Zwei Dreiecke pflegt man einander gleich zu nennen, wenn sie einerlei Flächeninhalt haben.*

[33] Termín *afinita* zavedl L. Euler v díle *Introductio in analysin infinitorum* z roku 1748. Označení *kolineace* použil A. F. Möbius z podnětu svého přítele, filologa Benjamina Gottholda Weiskeho (1788–1842).

Von diesen Aufgaben schein man bisher bloss diejenigen gekannt zu haben, welche aus der Gleichheit und Aehnlichkeit, als der einfachsten Verwandtschaft, ihren Ursprung ziehen ... Die Aufgaben, zu denen die Aehnlichkeit allein führt, sind hiervon nicht wesentlich unterschieden. Wohl aber gelangt man zu Aufgaben ganz anderer Art durch die Affinität und durch die Gleichheit, welche letztere eine eben so specielle Art von der Affinität ist, als die Gleichheit und Aehnlichkeit von der Aehnlichkeit allein. Noch andere Aufgaben endlich bietet die noch allgemeinere Verwandtschaft der Collineation dar.

([M2], str. x–xi)

Shodnost a podobnost se podle A. F. Möbia podstatně neliší; toto tvrzení odpovídá vlastnostem tzv. hlavní grupy pozdějšího Erlangenského programu.[34] Obecnější jsou afinity, které zahrnují shodnosti a podobnosti jako zvláštní případy – to odpovídá vztahu mezi afinní a hlavní grupou. Ještě obecnější jsou kolineace. Také zde A. F. Möbius předjímal, přirozeně bez užití termínu grupa a bez výslovného grupového uvažování, začlenění afinní geometrie do geometrie projektivní.

Barycentrický počet obsahuje mnoho původních výsledků z oblasti afinní a projektivní geometrie. Barycentrické souřadnice umožnily A. F. Möbiovi popsat celou řadu afinních a projektivních vlastností dvou- a třídimenzionálních objektů. Proto významnou část své práce věnoval afinním a projektivním transformacím, které poprvé zapisoval analyticky v barycentrických souřadnicích.[35] Uvažoval obecně všechny spojité transformace roviny, které zachovávají linearitu, tj. přímky zobrazují opět na přímky. Zvláštní pozornost pak věnoval několika speciálním typům lineárních transformací – shodnostem, které navíc zachovávají délky úseček, podobnostem, které zachovávají tvary objektů, afinitám, které zachovávají rovnoběžnost, a kolineacím, které zachovávají kolineárnost bodů.

Shodné útvary definoval A. F. Möbius jako takové útvary, u nichž vzájemné vzdálenosti mezi každými dvěma body jednoho útvaru a odpovídajícími body druhého útvaru jsou stejné. Vlastní podobnost pak nepřesně přiblížil jako vztah mezi dvěma útvary, z nichž jeden lze chápat jako „opakování druhého útvaru ve větším nebo menším měřítku“; přesněji řečeno jako zobrazení, které zachovává poměr vzdáleností mezi body jednoho útvaru a odpovídajícími body druhého útvaru.

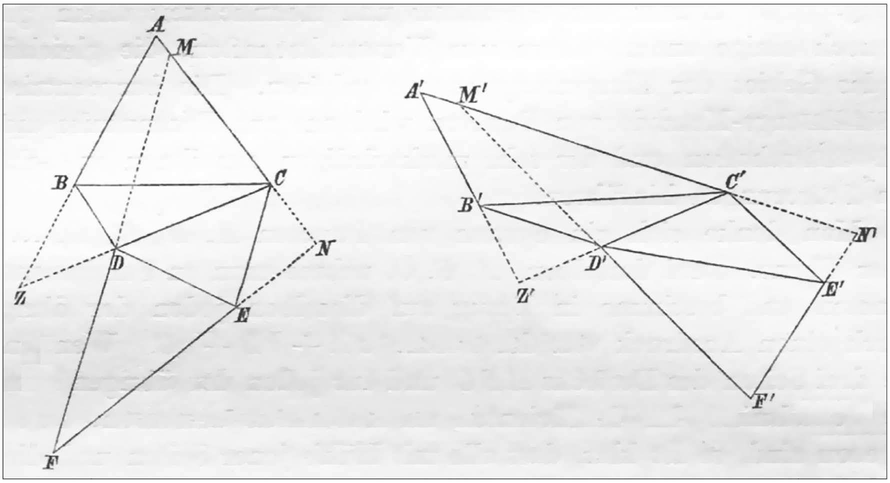
Wenn in zwei Figuren jedem Punkte der einen Figur ein Punkt der andern entspricht, dergestalt, dass der gegenseitige Abstand je zweier Punkte der einen Figur dem gegenseitigen Abstande der entsprechenden Punkte in der andern Figur gleich ist, so sind die Figuren einander gleich und ähnlich. ... Weniger einfach und von grösserer Ausdehnung ist die blosse Aehnlichkeit. Hier kann man die eine Figur als eine Wiederholung der andern nach einem grössern oder kleinern Maßstabe betrachten, oder bestimmter: Zwei Figuren sind einander ähnlich, wenn die gegenseitigen Abstände je zweier Punkte der einen

[34] O Erlangenském programu podrobně pojednává kapitola 4 této monografie.
[35] Projektivní transformace lze vyjádřit jako lineární transformace barycentrických souřadnic.

Figur in denselben Verhältnissen zu einander stehen, als wie die Abstände der entsprechenden Punkte in der andern.

([M2], str. 181, 187)

Kromě shodnosti a podobnosti A. F. Möbius podrobně vyšetřoval afinitu. Toto zobrazení přiblížil s využitím barycentrických souřadnic. Jsou-li v rovině dány tři nekolineární body A, B, C (*die Fundamentalpunkten*), lze každý bod roviny ABC vyjádřit jako nějakou jejich lineární kombinaci $aA + bB + cC$, kde a, b, $c \in \mathbb{R}$. Nechť bodům A, B, C jednoho útvaru odpovídají po řadě body A', B', C' druhého útvaru (viz obr. 28). Potom libovolnému bodu $D = aA + bB + cC$ odpovídá ve stejném zobrazení bod $D' = aA' + bB' + cC'$, jenž A. F. Möbius našel následujícím způsobem: Sestrojil průsečík Z přímek AB a CD, úsečku $A'B'$ prodloužil za bod B' a našel na jejím prodloužení bod Z' tak, aby pro délky úseček platila rovnost poměrů $|A'B'| : |B'Z'| = |AB| : |BZ|$. Dále sestrojil úsečku $C'Z'$ a našel na ní bod D' tak, aby platilo $|C'D'| : |D'Z'| = |CD| : |DZ|$.



Obr. 28: Afinita v Möbiově *Barycentrickém počtu*
(viz [BKS], Fig. 29, str. 178)

Analyticky lze uvažované afinní zobrazení popsat následujícím způsobem. Nechť A, B, C, P a A', B', C', P' jsou dvě čtveřice navzájem si odpovídajících bodů dvou útvarů; bodu $P = pA + qB + rC$ odpovídá bod $P' = pA' + qB' + rC'$, kde p, q, $r \in \mathbb{R}$. Zvolíme-li soustavu souřadnic tak, že přímka CA bude osou x a přímka CB bude osou y, má bod P vzhledem k této soustavě souřadnice

$$x = \frac{p}{p+q+r}\,|CA|\ , \quad y = \frac{q}{p+q+r}\,|CB|\ .$$

Analogicky zvolíme u druhého útvaru soustavu souřadnic tak, že osou x bude přímka $C'A'$ a osou y přímka $C'B'$. Potom souřadnice bodu P' vzhledem k takto zvolené soustavě souřadnic lze vyjádřit ve tvaru

$$x' = \frac{p}{p+q+r}\,|C'A'|\ , \quad y' = \frac{q}{p+q+r}\,|C'B'|\ ,$$

neboli platí

$$x' = \frac{|C'A'|}{|CA|}\,x\,, \quad y' = \frac{|C'B'|}{|CB|}\,y\,.$$[36]

V dalším odstavci odkázal na Eulerovu práci *Introductio in analysin infinitorum* pojednávající o výše uvedeném vzájemném vztahu mezi dvěma útvary. A. F. Möbius převzal Eulerovo označení *afinita*, část textu z jeho knihy dokonce ocitoval.

> *Von einer solchen gegenseitigen Beziehung der Figuren hat schon Euler gehandelt. ... Der von Euler hier aufgestellte Begriff der Affinitas ist also ganz mit dem vorhin entwickelten einerlei, und ich will daher gleichfalls diese allgemeinere Verwandtschaft Affinität, und Figuren, zwischen denen sie statt findet, affine Figuren nennen.*
> ([M2], str. 194–195)

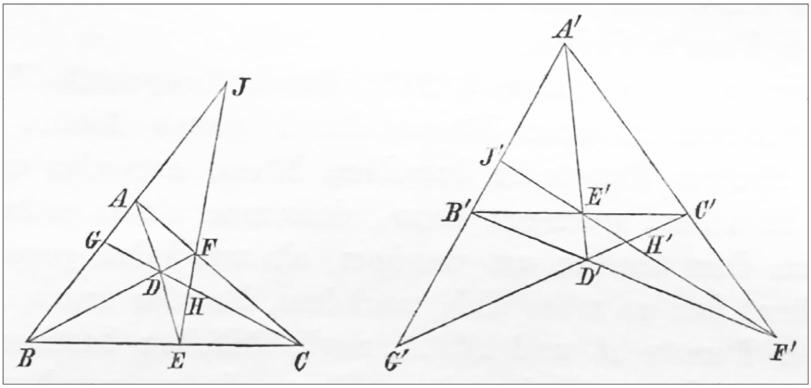
V následujícím textu své úvahy o afinitách analogicky rozšířil i na trojrozměrné útvary. Navíc mimo jiné ukázal, že se při afinních transformacích zachovávají poměry orientovaných délek, obsahů i objemů.

Dva geometrické útvary mohou být navzájem ještě v obecnějším vztahu, než je afinita. Takové „nejobecnější“ zobrazení A. F. Möbius nazval *kolineace* a definoval je jako zobrazení, které kolineární body zobrazí opět na kolineární body.

> *Das Wesen dieser neuen Verwandtschaft besteht also darin, dass bei zwei ebenen oder körperlichen Räumen, jedem Punkte des einen Raums ein Punkt in dem andern Raume dergestalt entspricht, dass, wenn man in dem einen Raume eine beliebige Gerade zieht, von allen Punkten, welche von dieser Geraden getroffen werden (collineantur), die entsprechenden Punkte in dem andern Raume gleichfalls durch eine Gerade verbunden werden können. Es ist deshalb diese Verwandtschaft die Verwandtschaft der Collineation genannt worden. Figuren, zwischen denen sie statt findet, heissen collinear verwandte, oder schlechthin collineare Figuren.* ([M2], str. 302)

Dále ukázal, že kolineace roviny je jednoznačně určena čtyřmi body, z nichž žádné tři nejsou kolineární, a jejich předepsanými obrazy, z nichž opět žádné tři nejsou kolineární. Nechť bodům A, B, C, D odpovídají v uvažované kolineaci po řadě body A', B', C', D' (viz obr. 29). Potom každému bodu přímky AD odpovídá určitý bod přímky $A'D'$, každý bod přímky BC má svůj jednoznačný obraz na přímce $B'C'$ atd. Proto průsečíku přímek AD a BC, jenž je na obr. 29 označen jako bod E, musí odpovídat průsečík přímek $A'D'$ a $B'C'$, tj. bod E'. Analogicky lze tímto postupem získat další dvojice odpovídajících si bodů; s využitím nově získaných dvojic bodů lze tento proces opakovat do nekonečna.

[36] Poznamenejme, že v originále je na tomto místě překlep; souřadnice y' je zapsána ve tvaru $y' = \frac{|C'B'|}{|CB|}\,x$. Viz [M2], str. 194.

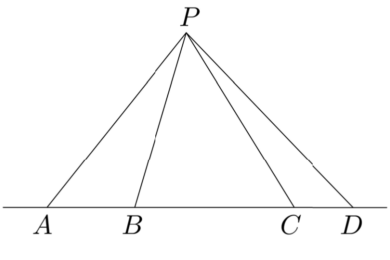


Obr. 29: Kolineace v Möbiově *Barycentrickém počtu* (viz [BKS], Fig. 49, str. 267)

A. F. Möbius dospěl jako první k ucelené teorii dvojpoměru čtyř kolineárních bodů (v originále *das Doppelschnittsverhältniss* (*ratio bissectionalis*)) a k důkazu skutečnosti, že dvojpoměr je invariantní při projektivních transformacích.[37] Mimo jiné ukázal, že dvojpoměr čtyř kolineárních bodů A, B, C, D lze vyjádřit jako poměr

$$\frac{\sin APB}{\sin APC} : \frac{\sin BPD}{\sin CPD},$$

kde P je libovolný bod roviny neležící na uvažované přímce (viz obr. 30).



Obr. 30: Dvojpoměr čtyř kolineárních bodů

V *Barycentrickém počtu* je na konci druhé části věnované transformacím v rámci závěrečných poznámek obsažena následující algebraická charakteristika geometrických příbuzností (viz tab. 1). Pro každou ze čtyř základních geometrických příbuzností (shodnost, podobnost, afinita, kolineace) je v tabulce uveden přesný počet nezávislých údajů, které je třeba zadat pro soustavu n bodů, aby bylo možno určit jejich obrazy při daném zobrazení; sloupce I, II, III odpovídají postupně případům, kdy zadané body leží v jedné přímce, resp. v jedné rovině, resp. v jednom prostoru.

[37] Viz [M2], Zweiter Abschnitt, Fünftes Capitel: *Die Doppelschnittsverhältnisse*, str. 243–265.

	I.	II.	III.
Gleichheit und Aehnlichkeit	$n-1$	$2n-3$	$3n-6$
Aehnlichkeit	$n-2$	$2n-4$	$3n-7$
Affinität	$n-2$	$2n-6$	$3n-12$
Collineation	$n-3$	$2n-8$	$3n-15$

Tab. 1: Algebraická charakteristika geometrických příbuzností (upraveno podle [M2], str. 364)

Pokusíme se vysvětlit, jak byly získány alespoň některé výsledky z výše uvedené tabulky. Uvažujme soustavu n bodů A, B, C, D, $\ldots$, které leží v jedné přímce. Při konstrukci shodné soustavy bodů ležících na nějaké přímce lze obraz A' bodu A zvolit zcela libovolně. Obraz B' bodu B je pak určen na základě vzdálenosti bodů A, B; musí platit rovnost $|A'B'| = |AB|$. Není přitom podstatné, na kterou stranu od bodu A' bod B' na danou přímku umístíme. Také další obraz C' bodu C musí vyhovovat rovnosti $|A'C'| = |AC|$, jeho poloha je však tentokrát určena již jednoznačně – umístíme jej buď na stejnou, nebo na opačnou stranu od bodu A' jako bod B', podle toho, zda body B a C leží na stejné polopřímce s počátečním bodem A, či nikoliv. Je tedy zřejmé, že po umístění obrazu A' prvního bodu je pro nalezení obrazu každého ze zbylých $n-1$ bodů zapotřebí znát jeho vzdálenost od bodu A. Ke konstrukci celé soustavy obrazů je tak třeba zadat celkem $n-1$ údajů.

Pokud body A, B, C, D, $\ldots$ nejsou kolineární, ale leží v jedné rovině, lze polohu bodu A' v uvažované rovině opět zvolit libovolně. Bod B' pak musí ležet ve vzdálenosti $|AB|$ od bodu A', tj. je libovolným bodem kružnice se středem v bodě A' a poloměrem $|AB|$; tuto kružnici označíme $k(A'; |AB|)$. Bod C' pak najdeme jako jeden (libovolný) z průsečíků kružnic $k(A'; |AC|)$ a $k(B'; |BC|)$. Bod D' musí být průsečíkem kružnic $k(A'; |AD|)$ a $k(B'; |BD|)$ – tentokrát však zvolíme ten z obou průsečíků, který leží buď ve stejné, nebo v opačné polorovině určené přímkou $A'B'$ jako bod C', podle toho, zda body C a D leží ve stejné polorovině určené přímkou AB, či nikoliv. Obecně pro soustavu n bodů tedy platí: Po umístění obrazu prvního bodu je k určení obrazu druhého bodu zapotřebí jeden údaj (jedna vzdálenost). Nalezení obrazu každého ze zbylých $n-2$ bodů pak vyžaduje znalost dvou údajů (dvou vzdáleností), čili celkem je třeba zadat $1+2(n-2) = 2n-3$ údajů. Analogicky pro body trojrozměrného prostoru, které nejsou ani kolineární, ani komplanární, získáme $1+2+3(n-3) = 3n-6$ údajů (vzdáleností) potřebných pro konstrukci shodné soustavy bodů.

Ke konstrukci podobné soustavy bodů ležících jak na přímce, tak v rovině nebo v prostoru bude zapotřebí vždy právě o jeden údaj méně než v případě shodnosti, neboť u podobnosti postačí znát pouze poměry jedné z výše uvedených vzdáleností k ostatním vzdálenostem.

Konstrukce afinního obrazu v případě n bodů v rovině bude probíhat následujícím způsobem. Prvním třem bodům A, B, C lze obrazy A', B', C' předepsat libovolně. Dalšímu bodu D však již musíme přiřadit bod D' tak, aby zůstaly zachovány poměry obsahů trojúhelníků:

$$D'B'C' : D'C'A' = DBC : DCA, \quad D'C'A' : D'A'B' = DCA : DAB.$$

Tato dvojitá podmínka musí platit pro každý ze zbylých $n-3$ bodů, proto celkový počet potřebných údajů je roven $2(n-3) = 2n-6$. Ostatní údaje z tabulky již ponecháme bez komentáře.

A. F. Möbius v pozdějších letech některé základní myšlenky o geometrických transformacích dále rozvedl a rozšířil na další „příbuznosti". Jako první uvažoval obecné projektivní transformace prostoru, které bodům přiřazují roviny, spec. kolineární body zobrazují do koaxiálních rovin, tj. do svazku rovin. Takové transformace nazýval *korelace* – použil termín, jenž zavedl L. N. Carnot. V roce 1858 se obrátil k úvahám o tzv. elementárních příbuznostech (homeomorfismech), které jsou ještě obecnější než kolineace. Tyto úvahy dnes spadají do oblasti topologie.

V první polovině 19. století se poprvé objevily významnější úvahy týkající se vícerozměrné geometrie. A. F. Möbius v této souvislosti v *Barycentrickém počtu* poukázal na skutečnost, že geometrické objekty, které nelze vzájemně zobrazit na sebe v trojrozměrném prostoru, neboť jsou svými zrcadlovými obrazy, by mohly být na sebe zobrazeny ve čtyřrozměrném prostoru. Dále však tuto myšlenku zamítl a uvedl, že toto zobrazení není možné, neboť takový prostor nelze uvažovat.

> *Zur Coincidenz zweier sich gleichen und ähnlichen Systeme im Raume von drei Dimensionen: $A, B, C, D, \ldots,$ und $A', B', C', D', \ldots,$ bei denen aber die Punkte $D, E, \ldots$ und $D', E', \ldots$ auf ungleichnamigen Seiten der Ebenen ABC und $A'B'C'$ liegen, würde also, der Analogie nach zu schliessen, erforderlich seyn, dass man das eine System in einem Raume von vier Dimensionen eine halbe Umdrehung machen lassen könnte. Da aber ein solcher Raum nicht gedacht werden kann, so ist auch die Coincidenz in diesem Falle unmöglich.*
>
> ([M2], str. 185)

Nové algebraické metody obsažené v *Barycentrickém počtu* umožňují obecné řešení některých fundamentálních problémů, jako je určení kuželosečky procházející danými body, resp. dotýkající se daných přímek. A. F. Möbius nalezl racionální parametrické reprezentace kuželoseček, jako jeden z prvních matematiků studoval křivky třetího stupně v trojrozměrném prostoru a jejich vlastnosti. Jedním z jeho nejzajímavějších numerických výsledků týkajících se kuželoseček je teorém, podle něhož pravděpodobnost, že pět náhodně zvolených bodů projektivní roviny leží na hyperbole, je nekonečně větší než pravděpodobnost, že tyto body leží na elipse; poměr určený úvahami je odmocnina z nekonečna ku jedné.

… weil die Fläche einer sich in das Unendliche erstreckenden Parabel sich zu der unendlichen Ebene, in welcher sie liegt, wie eine endliche Grösse zu $\sqrt{\infty}$ verhält, so kann man immer die Quadratwurzel aus dem Unendlichen gegen ein Endliches wetten, dass fünf in einer Ebene willkührlich genommene Punkte eher in einer Hyperbel, als in einer Ellipse liegen. ([M2], str. 383)

A. F. Möbiovi se za jeho práci v oblasti geometrie dostalo uznání dvou velkých matematiků. Carl Friedrich Gauss označil Möbiův nový, jednotící pohled na geometrii jako jednu z nejrevolučnějších intuicí v historii matematiky. Barycentrický počet umístil na stejnou úroveň jako svoji teorii kongruencí, jako diferenciální počet a Lagrangeův variační počet. Také Felix Klein (1849–1925) (spoluvydavatel Möbiových sebraných spisů) ocenil Möbiův přínos ke klasifikaci geometrie, označil ho za svého předchůdce.

Wenn auch Moebius noch nicht den modern formulierten Gruppenbegriff besitzt, so bietet doch der Begriff der „Verwandtschaft“ ein Äquivalent; Moebius wird dadurch genau zu einem Vorläufer des „Erlanger Programms“. ([K9], Teil I, str. 118)

F. Klein považoval za vhodné uvést tuto skutečnost dodatečně i v samotném Erlangenském programu. V jednom z pozdějších vydání připsal do původní verze z roku 1872 tři nové poznámky pod čarou. Poslední z nich, zařazená na úplný závěr textu, odkazuje na Möbiovy geometrické úvahy, jež odpovídají základní myšlence Erlangenského programu.

Im übrigen verweise ich gern noch, indem ich diesen Wiederabdruck des Erlanger Programms abschließe, auf die Arbeiten von Moebius (die ich selbst erst nach ihrem inneren Zusammenhang erfaßte, nachdem ich bei der von der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften in den Jahren 1885–1887 veranstalteten Gesamtausgabe seiner Werke mitwirken durfte). Moebius hat den allgemeinen Gruppenbegriff und auch viele der geometrischen Transformationen, die zu seiner Illustration im Erlanger Programm herangezogen werden, noch nicht gekannt, aber er hat, von einem sicheren Gefühl geleitet, seine aufeinanderfolgenden geometrischen Arbeiten genau so eingerichtet, wie es dem Grundgedanken des Programms entspricht. Schon im Mittelabschnitt seines Baryzentrischen Kalkuls (1827) ordnet er die „geometrischen Aufgaben“ nach den „Verwandtschaften“der„Gleichheit“(Kongruenz), „Ähnlichkeit“, „Affinität“ und „Kollineation“. ([K8], str. 497)

V první polovině 19. století však většina původních myšlenek *Barycentrického počtu*, kromě zavedení barycentrických souřadnic, zůstala bez větší odezvy. S Möbiovými výsledky se v plném rozsahu seznámilo pouze několik špičkových matematiků. Michael J. Crowe v této souvislosti napsal:

Möbius' highly original and well-presented work was well received, with Cauchy, Jacobi, Dirichlet, Steiner, Plücker, and Gauss all taking some interest in it. However his methods never attained widespread use, and no second edition of the work appeared … ([Cw], str. 50)

Plného uznání a všeobecného přijetí se Möbiovu životnímu dílu v geometrii dostalo až později. Nedostatek formálního, zejména algebraického aparátu, kterým byly teorie grup a teorie invariantů, neumožnil A. F. Möbiovi uskutečnit zamýšlenou klasifikaci geometrie. K tomu dospěl až F. Klein ve svém Erlangenském programu (1872), o němž bude pojednáno v samostatné kapitole.