6 Reakce na Weyrovu teorii v zahraničí

Ze skutečností uvedených v předchozích kapitolách vyplývá, že Eduard Weyr byl již ve své době znám zahraniční matematické komunitě. Zvláště hodnotné byly ohlasy na jeho práce od Jamese Josepha Sylvestera, který byl jednou z vůdčích osobností tehdejšího matematického světa.

Josef Beneš okomentoval jedno z takových ocenění Eduarda Weyra v Drobných zprávách Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky takto:[185]

Chápu se příležitosti, abych širšímu kruhu několika, snad opozděnými, ale okolnostem, tuším, přiměřenými slovy dal zprávu o uznání, jakého se p. professoru dostalo se strany nejpovolanější, od seniora žijících mathematiků, professora geometrie na universitě Oxfordské, Jakuba Josefa Sylvestera, ... (str. 303)

U některých Weyrových prací s maticovou tematikou jsme ve 2. kapitole ihned uvedli reakce českých i zahraničních matematiků. Výjimkou byly články a knihy, které obsahují Weyrovu teorii charakteristických čísel. U nich byly prozatím zmíněny pouze odezvy v referativních časopisech, které vyšly v brzké době po zveřejnění Weyrových textů. Nyní rozebereme převážně pozdější ohlasy na tyto Weyrovy práce. Jedná se o poměrně rozsáhlý soubor publikací, jehož všechny položky je velmi obtížné zkompletovat.

Věříme, že je pro českého čtenáře potěšující, že mnoho výkladů, zobecnění či použití Weyrovy teorie nalézáme i v nejnovější zahraniční časopisecké i knižní literatuře. V posledních letech došlo k celosvětovému oživení zájmu o Weyrovu teorii, jméno Eduarda Weyra nalézáme v uznávaných časopisech věnujících se lineární algebře a více než sto let po Weyrově smrti je zdůrazňována originalita jeho přístupu. Často je srovnáván jeho typický tvar matice s mnohem rozšířenějším Jordanovým kanonickým tvarem.[186] Nejenže jsou tyto dva pojmy analogiemi, ale některé vlastnosti Weyrova tvaru jej staví na pomyslném žebříčku dokonce výše než tvar Jordanův. Začněme však od reakcí mnohem starších, které byly napsány přibližně v prvních třech desetiletích po otištění Weyrovy teorie charakteristických čísel.

6.1 První odezvy po zveřejnění Weyrovy teorie

Nejprve byly publikovány texty reagující na práce *Sur la théorie des matrices* a *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces*, které v roce 1885 představily základy Weyrovy teorie charakteristických čísel. Tyto dva francouzsky psané články jsou zmíněny v souvislosti s kanonickým tvarem matice v poznámce pod čarou v krátkém článku Henryho Tabera

- *On the matrical equation* $\phi\Omega = \Omega\phi$ [Tb1]

z roku 1891. Text je zajímavý z více hledisek. Na jednom místě Taber uvedl mírně modifikovanou Weyrovu charakteristiku, ale nikde ji nedefinoval, což bylo v roce 1891 jistě překvapivé. Pozměnil ji tak, že před soustavu charakteristických čísel příslušných k nějakému vlastnímu číslu psal i jeho násobnost:

185 Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 19(1890), str. 300–305.
186 Stručná historie teorie kanonických tvarů matic viz 1. kapitola.

If the distinct latent roots of Ω *are* g_1*, an m-tuple latent root,* g_2*, an n-tuple latent root, ..., and if the characteristics of the latent root* g_1 *are* $(m; p, q, r, \dots s, t)$*, then ...* ([Tb1], str. 64)

Z ukázky je zřejmé, že jednotlivá charakteristická čísla autor nazval jednoduše *charakteristikami*, Weyrovu charakteristiku naopak nijak nepojmenoval. Uvedl rovněž Weyrův kanonický tvar matice s různými vlastními čísly, a to dokonce dle dnešních zvyklostí, tj. s jednotkovými maticemi nad zobecněnou diagonálou. Tuto skutečnost dnes – se znalostmi následujícího historického vývoje pojmu – považujeme za zcela výjimečnou. Po Taberově využití Weyrova kanonického tvaru matice v článku [Tb1] a po jeho zmínce v poznámce [Tb2] z následujícího roku (viz níže) totiž zájem o Weyrův tvar zcela pohasl, v dalších více než devadesáti letech se patrně v odborné literatuře ani jednou neobjevil.

Taber v práci nejprve vyjádřil (psáno v jeho symbolice) danou matici Ω jako součin $\omega\theta\omega^{-1}$, kde θ je Weyrův kanonický tvar, a poté prohlásil, že matici ϕ komutující s danou maticí Ω lze vyjádřit jako $\omega\eta\omega^{-1}$, kde matice η je blokově diagonální matice, jejíž diagonální bloky η_i mají jistý tvar (viz níže). Jelikož po dosazení za Ω a ϕ do vztahu $\phi\Omega = \Omega\phi$ a jeho úpravě dospějeme k rovnosti $\eta\theta = \theta\eta$, vyjádřil Taber vlastně matice komutující s Weyrovým tvarem θ. Jeho výsledek však není zcela v pořádku, jak se můžeme snadno přesvědčit v konkrétním číselném příkladu. Uveďme Taberovo vyjádření bloků na diagonále:

$$\eta_1 = \left|\begin{array}{c|c|c|c}
\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{matrix} &
\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & a_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pq} \end{matrix} &
\begin{matrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pr} \end{matrix} & \text{etc.} \\
\hline
 & \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qq} \end{matrix} &
\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & a_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qr} \end{matrix} & \text{etc.} \\
\cline{2-3}
 & & \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{matrix} & \text{etc.} \\
\cline{3-3}
 & & & \text{etc.}
\end{array}\right|$$

the a's, b's, c's, etc. being arbitrary; the mode of filling up the remaining squares along the principal diagonal and the rectangles above the principal diagonal is obvious. A similar expression obtains for η_2*, etc.* ([Tb1], str. 66)

Porovnáním se správným výsledkem (viz str. 283) vidíme, že Taber zapomněl uvést nulovost některých prvků. Pokud například $p = q + 1$, musí být

$a_{p1} = a_{p2} = \ldots = a_{p,q} = 0$. Článek je bohužel psán bez odvození a důkazů, proto je těžké odhadnout, proč se jeho autor zmýlil.

Zajímavá je i terminologie. Pojem, který přibližně ve stejné době Eduard Weyr nazval *typický* tvar, je zde pojmenován *kanonický* nebo *standardní* tvar.

Po krátké době navázal Taber na článek [Tb1] pojednáním

- *On a theorem of Sylvester's relating to non-degenerate matrices* [Tb2].

V něm sice žádnou Weyrovu práci necitoval, ale uvedl zde Weyrovy charakteristiky matic *non-degenerate*, tj. matic, které nejsou, dle originální Sylvesterovy terminologie, *dérogatoire*. Jednalo se tedy o posloupnosti $(1, 1, \ldots, 1)$, resp. v Taberově značení $(m; 1, 1, \ldots, 1)$, kde m značí násobnost příslušného vlastního čísla. V souvislosti s charakteristikami autor tentokrát zmínil přírůstky nulit postupně získaných mocnin matic.

Odkazy na dvě francouzsky psané Weyrovy práce můžeme nalézt také v již zmíněné[187] disertační práci Williama Henryho Metzlera (1863–1943)

- *On the roots of matrices* [Mz1]

z roku 1892, v níž je podán výklad Weyrovy teorie, dále v přehledu

- *List of writings on the theory of matrices (1857–1893)* [Mu2]

z roku 1898, který napsal Thomas Muir,[188] či v díle Encyclopédie des sciences mathématiques, konkrétně v přehledovém článku

- *Analyse combinatoire et theorie des déterminants* [NV1] (1907)

autorské dvojice Eugen Otto Erwin Netto (1848–1919) a Paul Heinrich Vogt (1850–1935).

Jedny z prvních reakcí, které se váží zejména ke dvěma obsáhlejším publikacím Eduarda Weyra, v nichž je prezentována Weyrova teorie charakteristických čísel, tj. ke knížce *O theorii forem bilinearných* a její německé časopisecké verzi *Zur Theorie der bilinearen Formen*, nalézáme v práci Ludwiga Schlesingera (1864–1933) z roku 1895 nazvané

- *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen* [Sl1]

a v jeho dalších pracích

- *Bemerkungen zur Theorie der Fundamentalgleichung* [Sl2][189]

z roku 1895,

[187] Viz ohlasy na práce obsahující matice e^M a $\log M$ v 2. kapitole.

[188] Zmíněný Muirův seznam je posledním, osmnáctým paragrafem jeho práce *A reinvestigation of the problem of the automorphic linear transformation of a bipartite quadric* [Mu1], který Muir uvedl slovy:

18. In order that previous work on the above matters may be known, I append hereto a first approximation to a complete list of writings on Matrices. A supplementary list, to which I invite contributions, will be published when it is sufficiently bulky to warrant attention. ([Mu1], str. 225)

[189] Děkujeme panu Janu Peteru Schäfermeyerovi za upozornění na tento článek.

- *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen* [Sl4]

z roku 1908 a

- *Bericht über die Entwickelung der Theorie der linearen Differentialgleichungen seit 1865* [Sl5]

z roku 1909.

Totéž platí pro monografii Petera Mutha (1860–1907)

- *Theorie und Anwendung der Elementartheiler* [Mh1][190]

z roku 1899 a pro dva přehledové texty z Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften vydané na přelomu 19. a 20. století. Jedná se o příspěvek

- *Invariantentheorie* [My1]

Friedricha Wilhelma Franze Meyera a o stať

- *Theorie der gemeinen und höheren complexen Grössen* [Su1],

kterou připravil Eduard Study (1962–1930). Tyto dva články byly přepracovány a podstatně rozšířeny pro francouzské dílo Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Meyerův text byl upraven Julesem Josephem Drachem (1871–1949) a nazván

- *Theorie des formes et des invariants* [MD1].

Studyho stať přepracoval Elie Joseph Cartan, byla publikována pod názvem

- *Nombres complexes* [SC1] (1908).

V obou pracích jsou obsaženy ohlasy na Weyrovu publikaci *Zur Theorie der bilinearen Formen.*

Weyrovo jméno je uvedeno v souvislosti s charakteristickými čísly v Taberově článku

- *Notes on the theory of bilinear forms* [Tb4],

který byl publikován v roce 1897, Weyrova německy psaná práce z roku 1890 je okrajově zmíněna i v Taberově článku

- *On hypercomplex number systems* [Tb5]

z roku 1904. Citaci Weyrova německého textu lze nalézt též v pojednání

- *The partial differential equations for the hyperelliptic* Θ- *and* σ-*functions* [Bx1]

[190] Monografie není psána maticovou řečí. Thomas John I'anson Bromwich (1873–1929), anglický matematik, který již na přelomu století maticovou terminologii používal, v recenzi nazvané *Muth's Elementartheiler* v roce 1901 napsal:

... the author follows Frobenius in preference to Cayley, and introduces a matrix only as a picture (Bild) of the bilinear form. (str. 314)

Peter Muth je tedy příkladem matematika, který práci psanou maticovým aparátem znal, a přesto maticovou řeč odmítal přijmout. V případě jiných matematiků se můžeme pouze domnívat, zda důvodem nepřijetí maticového aparátu byla pouze jeho neznalost, či zásadní odpor.

německého matematika Oskara Bolzy (1857–1942). Je sice uvedena pouze v poznámce pod čarou, ale o to zajímavější je, k jakému tvrzení se odkaz vztahuje. Uvážíme-li, že datem publikace je rok 1899, tj. rok spadající do období, které teorii matic ještě nakloněno nebylo, jsou následující autorova slova znakem jeho dobrého povědomí o existenci a užitečnosti nově se rodící matematické disciplíny (hvězdička značí, tak jako v originále, umístění odkazu):

In both proofs the work is vastly simplified by the notations and methods of the theory of matrices which has already been so successfully applied to the treatment of Θ-functions …* ([Bx1], str. 107–108)

V pracích vydaných v prvním desetiletí 20. století můžeme zmínky o Weyrově teorii nalézt v druhém vydání kompendia Ernesta Pascala (1865–1940)

- *Repertorium der höheren Mathematik. I. Analysis, II. Geometrie* [PaN] (1910)[191]

či v padesátistránkovém článku Kurta Hensela

- *Theorie der Körper von Matrizen* [Hn1],

jenž byl publikován v roce 1904. Kurt Hensel v práci napsal:

Bei dem hier gewählten Eingange ergeben sich die schönen Resultate, welche Eduard Weyr in seiner großen Abhandlung „Zur Theorie der bilinearen Formen“… hergeleitet, aber nicht ohne beträchtliche Schwierigkeiten bewiesen hat, als selbstverständliche Folgerungen … ([Hn1], str. 116–117)

Weyrův německý text je citován rovněž ve Wedderburnově článku

- *A theorem on finite algebras* [Wd1]

z roku 1905. V souvislosti s problematikou současné transformace dvou bilineárních forem je Weyrovo jméno zmíněno v úvodu článku

- *The reduction of families of bilinear forms* [Hs1],

který byl publikován americkým matematikem Herbertem Edwinem Hawkesem (1872–1943) v roce 1910.

Vedle Sylvestera řadíme mezi nejvýraznější osobnosti teorie matic druhé poloviny 19. století Georga Ferdinanda Frobenia, i když se tento matematik vyjadřování výsledků teorie matic jejím jazykem dlouho bránil.[192] Také Frobenius, stejně jako Sylvester, Weyrovy výsledky znal. Jméno Eduarda Weyra se často vyskytuje ve Frobeniově článku

- *Über den Rang einer Matrix* [Fr15]

[191] Originální, méně obsáhlá italská verze díla byla publikována pod názvem *Repertorio di matematiche superiori (Definizioni - Formole - Teoremi - Cenni bibliografici). I. Analisi, II. Geometria* [PaI] ve dvou částech v letech 1898 a 1900. První německé vydání, připravené kolektivem autorů pod vedením Paula Epsteina (1871–1939) a Heinricha Emila Timerdinga (1873–1945), vyšlo v letech 1900 a 1902, jednotlivé části druhého vydání v letech 1922, 1927 a 1929.

[192] Více informací o změně paradigmatu ve Frobeniových pracích viz 1. kapitola.

z roku 1911, který začíná následujícími slovy upozorňujícími na Weyrův neobvyklý přístup ke studované problematice:

Die Reduktion einer Schar von bilinearen Formen auf die Normalform von Weierstrass hat Eduard Weyr in seiner Abhandlung Zur Theorie der bilinearen Formen, ..., mit Hilfe der Matrizenrechnung ausgeführt. Die invarianten Zahlen, von denen die Normalform abhängt, hat er, ebenso wie Weierstrass, aber auf einem ganz anderen Wege, direkt definiert, nicht, wie Camille Jordan oder Stickelberger, ihre Bedeutung aus der Normalform nachträglich abgelesen. ([Fr15], str. 479)

Frobenius dále uvedl jméno Eduarda Weyra v souvislosti se vztahy týkajícími se odhadu hodnosti součinu matic, které jsou v článku hojně studovány. Jak však víme, Weyr používal místo pojmu hodnost spíše analogický pojem nulita, což Frobenius nezapomněl zdůraznit.

Weyrovu práci *Zur Theorie der bilinearen Formen* znala rovněž americká matematička Olive Clio Hazlett (1890–1974), která na ni odkázala roku 1917 v článku

- *On the theory of associative division algebras* [Ht1].

6.2 Sporadické ohlasy v letech 1920 až 1980

Weyrova teorie charakteristických čísel se po svém zveřejnění velkého zájmu nedočkala. Tato situace zůstala stejná i v dalších desetiletích, v nichž byly Weyrovy výsledky citovány jen výjimečně, k jejich výraznějšímu rozpracování nedošlo.

V roce 1921 Weyrovu teorii charakteristických čísel rozšířil německý matematik Wolfgang Krull (1899–1971) v práci

- *Über Begleitmatrizen und Elementarteilertheorie* [Ku1]

pro matice nad libovolným tělesem. Výklad Weyrovy teorie dále podal německý matematik Julius Wellstein (1888–1978) v textu

- *Über symmetrische, alternierende und orthogonale Normalformen von Matrizen* [Wl1]

z roku 1930. Spis *O theorii forem bilinearných* a jeho německá verze jsou společně rozebrány v Muirově historickém přehledu

- *Contributions to the History of Determinants 1900–1920* [Mu4]

z roku 1930. Ve 2. kapitole již byla uvedena Muirova slova vyjadřující podivení nad názvem, jenž obsahuje termín bilineární forma místo vhodnějšího termínu matice. Rovněž další řádky více než stránkového rozboru zdůrazňují výskyt maticového aparátu (např.: *for the whole of the first ten chapters (...) deal with nothing but matrices: ...* (str. 3)) a dále upozorňují např. na pojem nulity, na nulitu součinu matic, resp. na možnost nulitu součinu v některých případech přesně určit.

Ve třicátých letech se Weyrova charakteristika objevila ve třech monografiích věnovaných teorii matic – všechny již byly zmíněny. První z nich,

- *An Introduction to the Theory of Canonical Matrices* [TA1],[193]

publikovali v roce 1932 Herbert Westren Turnbull a Alexander Craig Aitken. Velmi stručně a jasně zde definovali Weyrovu charakteristiku:[194]

If the successive differences in nullity (or rank) in the matrix powers $(A - \lambda_i I)^p$, $p = 0, 1, 2, \ldots,$ *are regarded as a partition (called the Weyr characteristic) of the total multiplicity of the latent root* λ_i*, then the conjugate partition is the Segre characteristic associated with* λ_i. ([TA1], str. 80)

Autorem druhé monografie, úsporně napsaného textu

- *The Theory of Matrices* [Mc1],

je Cyrus Colton MacDuffee. Publikoval jej roku 1933 v edici Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Zdařile napsaná útlá kniha obsahující značné množství informací je rozdělena do deseti kapitol, v nichž je celkem padesát sedm paragrafů. Čtyřicátý paragraf (str. 73–74) obsažený v šesté kapitole *Similarity* má název *Weyr's characteristic.* Na rozdíl od Eduarda Weyra, který používal termín latentní kořen nebo pouze kořen, nazval MacDuffee kořeny charakteristické rovnice kořeny charakteristickými.[195] Zmíněný paragraf věnoval především zavedení Weyrovy charakteristiky a jejímu vztahu k Segreově charakteristice (zde se odvolává na monografii [TA1], str. 80). V závěru paragrafu je uvedeno tvrzení, že Weyrova charakteristika matice spolu s vlastními čísly tvoří úplný systém invariantů podobnosti matic. Citovány jsou Weyrovy práce *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* a *Zur Theorie der bilinearen Formen.*

Celkem sedm Weyrových prací je uvedeno v rozsáhlé bibliografii knihy

- *Lectures on Matrices* [Wd2] (1934)

Josepha Henryho Maclagena Wedderburna.[196]

V roce 1936 publikoval MacDuffee krátký článek

- *On a fundamental theorem in matric theory* [Mc2].

V něm Weyrovu charakteristiku použil (aniž by ji vysvětloval)[197] v důkazu věty o elementárních dělitelích. Rovněž v MacDuffeeho knize

- *Vectors and Matrices* [Mc3]

z roku 1943[198] je Weyrově charakteristice věnován samostatný paragraf pojmenovaný *The Weyr characteristic.*

[193] Jak uvidíme později, právě tento text v posledních desetiletích velmi napomohl k podnícení zájmu o Weyrovy výsledky.

[194] Vedle této pasáže zmiňují autoři Weyrovu charakteristiku také na stranách 187 a 188.

[195] Pojem charakteristický kořen je zaveden již na 22. straně. Na téže straně je v poznámce pod čarou uveden (spolu se Sylvesterovým jménem) i termín *latent roots.*

[196] Jedná se o těchto sedm prací: *O základní větě v theorii matric* (1884), *Sur la théorie des matrices* (1885), *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* (1885), *O binarných matricích* (1887), *Sur la réalisation des systèmes associatifs de quantités complexes à l'aide des matrices* (1887), *O theorii forem bilinearných* (1889), *Zur Theorie der bilinearen Formen* (1890).

[197] Autor pouze v poznámce pod čarou uvedl odkaz na 80. stranu práce [TA1].

[198] Kniha byla publikována v dalších vydáních v letech 1947, 1949, 1953, 1961 a 1966.

V roce 1936 upozornil americký matematik Merrill Meeks Flood (1908–1991) v poznámce

- *On the highest common factor of two polynomials* [Fl1]

na chybu (konkrétněji na mylný předpoklad), které se dopustil americký matematik William Vann Parker (1901–1987) v článku *The degree of the highest common factor of two polynomials* [Pw1] z roku 1935. Ve své verzi důkazu Flood uvedl, že použil metody Frobenia a Weyra. Konkrétně odkázal na poznatek o nulitě matice, který Weyr uvedl v práci *Zur Theorie der bilinearen Formen* na straně 179.

Některá fakta Weyrovy teorie byla zmíněna ve čtyřicátých letech 20. století v publikacích italských matematiků. Máme na mysli článek

- *Segnatura di una matrice in un campo di razionalità* [Cc1]

z roku 1940, resp. o dva roky mladší pojednání

- *Segnatura, divisori elementari e forme canoniche di una matrice* [Che1]

z roku 1942. První text napsal Leopoldo Cavallucci, druhý Salvatore Cherubino (1885–1970). Nejedná se však o ohlasy na Weyrovy práce v pravém slova smyslu. Z „rukopisů" obou publikací (přístup autorů, použitá terminologie apod.) a také z uvedených odkazů na starší literaturu se zdá, že Weyrovy výsledky autoři neznali.[199]

Roku 1946 byla Weyrova práce *Zur Theorie der bilinearen Formen* referována rovněž ve francouzsky psané odborné literatuře. Konkrétně se jedná o článek

- *Sur la réduction canonique des couples de matrices* [Dd1],

pod nímž je podepsán známý francouzský matematik Jean Alexandre Eugène Dieudonné (1906–1992).

Weyrově a Segreově charakteristice a jejich dualitě se věnoval Anatolij Ivanovič Mal'cev (1909–1967) ve své známé učebnici

- *Osnovy linejnoj algebry* [Ma1],

jejíž první vydání vyšlo roku 1948.[200]

Z cizojazyčných prací z počátku padesátých let 20. století, v nichž lze nalézt reakce na Weyrovy práce *O theorii forem bilinearných* a *Zur Theorie der bilinearen Formen*, jmenujme nejprve knihu

[199] V souvislosti s dřívějšími poznatky z přidružené problematiky jsou naopak v obou článcích zmíněni další italští matematikové, Pilo Predella (1863–1939) a Bernardino Gaetano Scorza (1876–1939).

[200] Postupně vyšlo několik dalších rusky psaných vydání: druhé v roce 1956, třetí v roce 1970 a čtvrté v roce 1975. Kniha byla přeložena do několika cizích jazyků. Anglicky vyšla pod názvem *Foundations of Linear Algebra* v roce 1963, španělsky pod názvem *Fundamentos de algebra lineal* v roce 1970 a italsky pod názvem *Fondamenti di algebra lineare* v roce 1980. Segreova a Weyrova charakteristika jsou studovány na str. 186 (vydání z roku 1948), resp. 132–133 (1956), resp. 117–118 (1963), resp. 135–136 (1970), resp. 179–180 (1975), resp. 181 (1980).

- *Matrizen. Eine Darstellung für Ingenieure* [Zu1]

Rudolfa Zurmühla (1904–1966) z roku 1950, v níž je paragraf *Die Weyrschen Charakteristiken* (str. 212–214),[201] a dále monografii Felikse Ruvimoviče Gantmachera (1908–1964)

- *Teorija matric* [Gn1]

z roku 1953.[202]

Roku 1950 využil jednu větu Weyrovy teorie slovenský kněz, fyzik a teolog Michal Kumorovitz v článku

- *Une solution du système linéaire homogène d'équations différentielles du premier ordre à coefficients constants* [Km1].

Pomocí ní odvodil řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty. Vedle Weyrovy knihy *O theorii forem bilinearných* z roku 1889 zmínil i Borůvkovu poznámku *Sur les matrices singulières* z roku 1936. Kumorovitz a Borůvka pracovali se soustavami diferenciálních rovnic obdobně, avšak nezávisle na sobě.[203]

Reakci na Weyrův článek *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* a také na spis *O theorii forem bilinearných*, resp. na jeho časopiseckou verzi *Zur Theorie der bilinearen Formen* lze nalézt v knize

- *Linear transformations in n-dimensional vector space. An introduction to the theory of Hilbert space* [HG1],

za jejímž vznikem v roce 1951 stojí autorská dvojice Hans Ludwig Hamburger (1889–1956) a Margaret Eleanor Grimshaw (1904–1990).

Dva přehledové články z nedokončeného druhého vydání *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen* nazvané

- *Lineare Algebra* [Pg1] a
- *Normalformen von Matrizen* [Pg2]

zpracoval na počátku padesátých let 20. století Günter Pickert. V druhém z nich nalezneme Weyrovo jméno (na str. 47) nejprve v souvislosti se zobecněním jednoho jeho výsledku Otakarem Borůvkou[204] v roce 1936 a poté (na str. 57) při zavedení Weyrovy charakteristiky jako duálního pojmu k Segreově charakteristice. Odkaz na konkrétní Weyrovu práci zde uveden není, jedná se opět o odezvy na práce obsahující Weyrovu teorii.

---

[201] Jedná se o část podkapitoly *Hauptvektoren. Transformation auf Normalform.* Úvod do problematiky Weyrovy charakteristiky je zachycen již na straně 211, Weyrova charakteristika je zmíněna i na straně 371 (odstavec *Verhalten bei nichtlinearen Elementarteilern* podkapitoly *Systeme linearer Differentialgleichungen*).

[202] Obě knihy vycházely opakovaně (zahrneme-li i vydání Zurmühlova textu s pozměněnými názvy) v průběhu následujících pěti desetiletí. Gantmacherova kniha byla navíc publikována v anglickém, francouzském a německém překladu.

[203] Uveďme, že na tuto Kumorovitzovu práci naopak odkázal Borůvka ve své pozdější práci *Poznámka o použití Weyrovy theorie matic k integraci systémů diferenciálních lineárních rovnic s konstantními koeficienty* [Bo6] z roku 1954 a v témže roce také Jiří Čermák v článku *On a new method of solving homogeneous systems of linear difference equations with constant coefficients* [Ce3]. Viz 5. kapitola.

[204] Reakce Otakara Borůvky a dalších brněnských matematiků na Weyrovu teorii charakteristických čísel viz 5. kapitola.

V roce 1953 publikoval Brian E. Mitchell třístránkovou poznámku

- *Normal and diagonalizable matrices* [Mi1],

v níž vyložil vztah mezi normálními a diagonalizovatelnými maticemi a především mezi normálními maticemi a vlastními čísly, resp. vlastními vektory matic A^*A a A^*.[205] V závěru uvedl vzájemně jednoznačné vztahy mezi Weyrovou a Segreovou charakteristikou matice A, nulitami matic $(A-\lambda E)^k$, $k \in \mathbb{N}$, a jistou větou Michaela P. Drazina.[206]

V knize Roberta McDowella Thralla (nar. 1914) a Leonarda Tornheima (1915–2009)

- *Vector Spaces and Matrices* [TT1]

z roku 1957 není sice zavedena přímo Weyrova charakteristika, ale jsou (na straně 270) definována tzv. *Weyrova čísla* (*Weyr numbers*).

S Weyrovou charakteristikou byl obeznámen rovněž William Grenfell Leavitt (nar. 1916), který tento pojem a termín použil již ve své disertační práci[207]

- *A normal form for matrices whose elements are holomorphic functions* [Le1]

z roku 1947 a potom též v článku

- *Canonical forms for mappings of vector spaces* [Le3]

z roku 1953. V posledně jmenované publikaci je Weyrova charakteristika přiřazena nikoliv k matici, ale k lineárnímu zobrazení (endomorfismu, resp. operátoru).

Let A be a linear mapping of an n-dimensional vector space S over a field F. Define $A^0 = I$ (the identity mapping), and consider the successive powers A^i $(i = 0, 1, \ldots)$. If $V \in S$ for which $VA^{i-1} = 0$, then $VA^i = 0$, so that the null space $N(A^{i-1}) \subseteq N(A^i)$. If $\nu(A)$ designates the dimension $d[N(A)]$, this implies that $\nu(A^{i-1}) \leq \nu(A^i)$. Define $\omega_i = \nu(A^i) - \nu(A^{i-1})$. … For a mapping A, let $F[A]$ be the set of all polynomials in A with coefficients in F. … let $\alpha \in F[A]$ … It may be remarked that if $\alpha = A - cI$ is singular (in which case c is called a characteristic value), then the set $\{\omega_i\}$ relative to α is called the Weyr characteristic of A relative to c. ([Le1], str. 75, 76, 79)

Americký matematik Murray Gerstenhaber (nar. 1927) publikoval v roce 1959 takřka čtyřicetistránkové pojednání

- *On nilalgebras and linear varieties of nilpotent matrices, III* [Gh1].

---

[205] Matici A nazveme normální, platí-li $AA^* = A^*A$, kde A^* je matice konjugovaná, tj. transponovaná a komplexně sdružená k matici A. Součiny se nemusí rovnat matici jednotkové, jak je tomu u unitární matice.

[206] Drazin M. P., *On diagonable and normal matrices* [Dz1], Theorem 1 (i), str. 189:
If A is any given $n \times n$ matrix, then each of the following conditions is necessary and sufficient for the diagonability of A:
(i) For every n-vector ξ, and every scalar λ, $(A-\lambda I)^2\xi = 0$ implies $(A-\lambda I)\xi = 0$;
(ii) …

[207] Stejnojmenný desetistránkový Leavittův článek [Le2] vyšel o rok později v časopisu Duke Mathematical Journal.

V něm jsou citovány Weyrovy práce *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* a *Zur Theorie der bilinearen Formen.*[208]

Weyrovu a Segreovu charakteristiku nalézáme i ve dvou pracích Alvina N. Feldzamena. Jsou to články

- *A generalized Weyr characteristic* [Fz1]

z roku 1959 a

- *Semi-similarity invariants for spectral operators on Hilbert space* [Fz2]

z roku 1961. Obě práce mají podobný charakter, věnují se spektrální teorii operátorů na Hilbertových (obecněji Banachových) prostorech.[209] V prvním textu není zmíněna žádná konkrétní Weyrova práce, v druhém jsou citovány články *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* a *Zur Theorie der bilinearen Formen.* Reference jsou v textu uvedeny v okamžiku, kdy autor zmínil Weyrovo jméno (a s ním i konkrétní práce), aby vysvětlil, po kom je Weyrova charakteristika pojmenována.

V první Feldzamenově praci jsou čísla odpovídající Weyrovým charakteristickým číslům definována zcela bez výskytu vlastních čísel matice, Weyrova charakteristika je zavedena v kontextu pojmů borelovská množina, borelovská funkce, mohutnost soustavy vektorů, spektrální a normální operátor apod. Teprve poté je poukázáno na rovnost mezi čísly definovanými Feldzamenem a Weyrem.

Feldzamenův druhý, takřka padesátistránkový článek je Weyrovou charakteristikou doslova „protkán“. Autorův přístup k tomuto pojmu je však od Weyrova postupu opět značně odlišný,[210] přestože tentokrát pracoval (již od prvního odstavce) vedle výše zmíněných pojmů i s vlastním číslem matice. V textu se často poukazuje na úzkou spojitost mezi Weyrovou a Segreovou charakteristikou, z několika výskytů popisu tohoto vztahu v textu vybereme ukázku z úvodu, v níž je T operátor a $u(\lambda_0)$ značí násobnost jeho vlastního čísla λ_0:

... let $\mathcal{W}(\lambda_0,\, k)$ be the kth integer in the Weyr characteristic of λ_0 for T, and $\mathcal{S}(\lambda_0,\, k)$ be the number of occurrences of k as an exponent of the elementary divisors of T that contain λ_0 – that is, the number of occurrences of k in the Segre characteristic. Then these are related in a simple manner:

$$\mathcal{S}(\lambda_0,\, k) = \mathcal{W}(\lambda_0,\, k) - \mathcal{W}(\lambda_0,\, k+1),$$

[208] Odkaz na obě práce je uveden u následujícího poznatku:

LEMMA 1.2. A is similar to B if and only if $\operatorname{rank}(A-\lambda)^k = \operatorname{rank}(B-\lambda)^k$, $k = 1, \dots, n$, *where λ runs through all proper values of A and B.* ([Gh1], str. 171)

Je zajímavé, že Gerstenhaber ještě v roce 1959 používal zápis $(A-\lambda)^k$ místo korektního $(A-\lambda E)^k$. Nejenže tedy zveřejnil Weyrův výsledek, ale v celé práci užíval Weyrovu, z dnešního hlediska nepřesnou symboliku.

[209] Pětistránková práce *A generalized Weyr characteristic* shrnuje výsledky Feldzamenovy disertační práce zpracované na Yale University pod vedením Nelsona Dunforda. O dva roky mladší, mnohem rozsáhlejší článek *Semi-similarity invariants for spectral operators on Hilbert space* naopak doktorskou práci reviduje a rozšiřuje.

[210] *... it is convenient to reclothe the characteristics in more modern garb.* ([Fz2], str. 277)

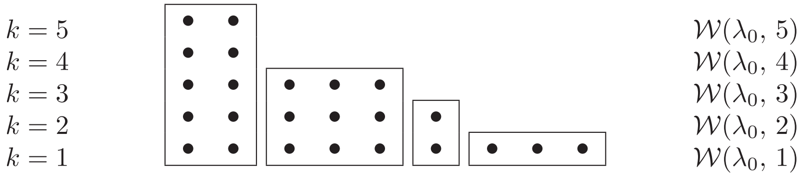
and,

$$\sum_k \mathcal{W}(\lambda_0,\,k) = \sum_k k\mathcal{S}(\lambda_0,\,k) = u(\lambda_0).$$

([Fz2], str. 277–278)

Intepretujme uvedené vztahy pomocí Ferrersova diagramu příslušného vlastnímu číslu λ_0, v němž charakteristické číslo $\mathcal{W}(\lambda_0,\,1)$ znázorníme tečkami v prvním řádku odspodu, charakteristické číslo $\mathcal{W}(\lambda_0,\,2)$ tečkami v druhém řádku odspodu atd. Uvědomme si, že exponent elementárního dělitele je roven řádu Jordanovy buňky, proto k značí počet teček v jednotlivých sloupcích diagramu a $\mathcal{S}(\lambda_0,\,k)$ značí počet sloupců, které mají právě k teček. Symbol $\sum_k \mathcal{W}(\lambda_0,\,k)$ vyjadřuje celkový počet teček Ferrersova diagramu, který je součtem počtu teček v m obdélnících,[211] jejichž „výška“ je po řadě 1, 2, …, m teček a „šířka“ po řadě $\mathcal{S}(\lambda_0,\,1)$, $\mathcal{S}(\lambda_0,\,2)$, …, $\mathcal{S}(\lambda_0,\,m)$ teček. Celkový počet teček diagramu je přitom roven násobnosti $u(\lambda_0)$ vlastního čísla λ_0.

Je-li tedy například Weyrovou charakteristikou operátoru T příslušnou vlastnímu číslu λ_0 posloupnost (9, 6, 5, 2, 2), vypadá Ferrersův diagram takto:



Příslušná Segreova charakteristika je (5, 5, 3, 3, 3, 2, 1, 1, 1) a

$$\mathcal{S}(\lambda_0,\,1) = 3,\ \ \mathcal{S}(\lambda_0,\,2) = 1,\ \ \mathcal{S}(\lambda_0,\,3) = 3,\ \ \mathcal{S}(\lambda_0,\,4) = 0 \ \text{ a } \ \mathcal{S}(\lambda_0,\,5) = 2.$$

Proto celkový počet teček (neboli násobnost vlastního čísla λ_0), který se rovná součtu teček umístěných v jednotlivých řádcích diagramu, můžeme počítat jako součet $1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 2 = 24$.

Alvin N. Feldzamen vykládá význam symbolů, které se vyskytují v uvedených vztazích, pomocí následujících pojmů:

These functions also have simple spatial interpretations: $\mathcal{W}(\lambda_0,\,k)$ is the maximum number of linearly independent vectors annihilated by $(T-\lambda_0 I)^k$ but not by $(T-\lambda_0 I)^{k-1}$, and $\mathcal{S}(\lambda_0,\,k)$ is the maximum number of independent k-dimensional subspaces completely reducing T on which $T-\lambda_0 I$ has index k. ([Fz2], str. 278)

Celkově lze říci, že v textu je – co se četnosti týče – dávána přednost charakteristice Weyrově. Zároveň je upozorněno na výhodnost charakteristiky Segreovy:

---

[211] Přesněji řečeno, obdélníků bude právě m za předpokladu, že existují Jordanovy buňky řádu 1, 2, …, m. Pokud například pro vlastní číslo λ_0 neexistuje Jordanova buňka řádu k, nebude v diagramu k-tý obdélník uveden a člen $\mathcal{S}(\lambda_0,\,k)$, a proto také člen $k\mathcal{S}(\lambda_0,\,k)$, bude roven nule.

> *... the reader, noticing the primacy of the Weyr characteristic in the statements and proofs, may wonder as to the inclusion of the Segre characteristic. It is included because it is readily defined by means of the Weyr characteristic, and because it seems clear that the Weyr characteristic is unsuited to the nonessentially finite case, where the Segre characteristic, defined directly, may succeed.* ([Fz2], str. 281)

V obou Feldzamenových pracích jsou pasáže zdůrazňující, že Weyrova charakteristika zavedená pro spektrální operátory na Hilbertových prostorech je invariantem podobnosti, ale ne úplným souborem invariantů. Proto je podobnost zobecněna na tzv. *polo-podobnost* (*semi-similarity*) spektrálních operátorů konečné násobnosti na Hilbertově prostoru, která je rovněž ekvivalencí. Zobecněná Weyrova charakteristika zavedená pro tyto operátory tvoří úplný soubor invariantů polo-podobnosti.

Na Feldzamenovu práci z roku 1961 úzce navázal Lior Tzafriri (1936–2008), profesor působící na univerzitě v Jeruzalémě, článkem

- *Quasi-similarity for spectral operators on Banach spaces* [Tz1]

z roku 1968. Jeho cílem bylo zavést tzv. *kvazi-podobnost* (*quasi-similarity*) pro spektrální operátory na Banachově prostoru, která by pro případ normálních operátorů splývala s běžnou podobností a pro případ spektrálních operátorů konečné násobnosti na Hilbertově prostoru s Feldzamenovou polo-podobností. Stejně jako pro polo-podobnost je Weyrova charakteristika úplným souborem invariantů kvazi-podobnosti.

Výskyt Weyrovy charakteristiky je v Tzafririho článku opět značný, také tato publikace v seznamu literatury uvádí konkrétní Weyrův text. Jedná se o práci *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* z roku 1885, která je v textu citována, stejně jako ve Feldzamenově publikaci, v místě, kde je vysvětlen výskyt příjmení Weyr v termínu Weyrova charakteristika.

Na Feldzamenovy a Tzafririho výsledky týkající se invariantnosti Weyrovy charakteristiky poukázal ve svém článku

- *Quasi-similarity of operators* [Ho1]

z roku 1972 Thomas Benton Hoover.

Reakci na články *Sur la théorie des matrices* a *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* lze dále nalézt v souboru článků, které v letech 1962 a 1963 postupně publikoval R. W. Feldman Jr. v časopisu The Mathematics Teacher.[212]

Pojem Weyrova charakteristika zmínil rovněž Shmuel Kantorovitz (nar. 1935) v úvodu článku

- *The semi-simplicity manifold of arbitrary operators* [Kz1]

z roku 1966, Weyrovu charakteristiku však v práci více nestudoval. Tento pojem nalezneme také v poznámce Christophera Williama Davise

- *Elementary divisors of the Stein transformation* $X \to X - CXC^*$ [Da1]

[212] Jedná se o články [Fe1], [Fe2], [Fe3], [Fe4], [Fe5] a [Fe6].

z roku 1974. Jméno Eduarda Weyra se vyskytuje rovněž v krátkém článku

- *Integral invariant functions on the nilpotent elements of a semisimple Lie algebra* [Gg1],

který publikoval Michael A. Gauger v roce 1978.[213]

Italský matematik Mario Tognetti v čtyřstránkové poznámce

- *Sulla caratteristica di un polinomio di matrice* [To1]

z roku 1972 studoval hodnost matice $f(A)$, kde f je polynom a A je čtvercová matice. Ačkoliv využil Weyrovu charakteristiku, o českém matematikovi zcela pomlčel. Tím se zařadil za své krajany Cavallucciho a Cherubina (viz výše str. 202).

V roce 1978 publikovali Robert E. Hartwig[214] (nar. 1941) a Frank Jerry Hall[215] článek

- *Pseudo-similarity for matrices over a field* [HH1].

V něm definovali *pseudo-podobnost* (*pseudo-similarity*) takto: Nechť $\mathcal{R}^{m\times n}$ značí množinu všech matic typu $m \times n$ nad okruhem $\mathcal{R}$ s jednotkovým prvkem, $A \in \mathcal{R}^{m\times m}$ a $B \in \mathcal{R}^{n\times n}$. Řekneme, že *matice A je pseudo-podobná matici B*, jestliže existuje matice $X \in \mathcal{R}^{m\times n}$ a dvě matice X^-, $X^= \in \mathcal{R}^{n\times m}$ takové, že platí

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad X^-AX = B,\\
&(2) \qquad XBX^= = A,\\
&(3) \qquad XX^-X = X,\\
&(4) \qquad XX^=X = X.
\end{aligned}
$$

---

[213] Michael A. Gauger však necitoval žádnou Weyrovu práci, odkázal pouze na 73. stranu MacDuffeeho monografie *The Theory of Matrices* [Mc1], kde je Weyr zmíněn. Autor se na Eduarda Weyra takto zprostředkovaně odvolal u tohoto tvrzení (použil nezvyklého značení matic, které jsou zapsány malými písmeny):

THEOREM 2 (WEYR [3, p. 73]). Let x, y be nilpotent $n \times n$ matrices over any field. Then x and y are similar if and only if $\operatorname{rank}(x^k) = \operatorname{rank}(y^k)$ *for all* $k \le n$. ([Gg1], str. 162)

[214] Podotkněme již na tomto místě, že Robert E. Hartwig publikoval více textů obsahujících Weyrovy výsledky (viz následující odstavce). V roce 1972 navíc zaslal do časopisu SIAM Journal on Applied Mathematics článek nazvaný *A note on the Weyr characteristics*; dokonce jej zmiňuje (včetně poznámky o předložení textu k publikaci) v seznamu literatury své práce *A note on Jacobson chains* [Hr1], v níž se odkazuje na konkrétní definici z připravovaného článku, který však nakonec nikdy nevyšel. Totéž platí pro Hartwigův text *From Schur to Jordan* datovaný rokem 1977, v němž je vedle Weyrovy charakteristiky uvažován i tzv. *Weyrův-Jordanův tvar* matice, což je, v dnešní terminologii, Weyrův kanonický tvar nilpotentní matice (tedy Weyrův blok příslušný vlastnímu číslu 0). Kdyby byla práce publikována, byla by z hlediska výskytu Weyrova kanonického tvaru v literatuře nejen sedmdesátých let zcela ojedinělá.

[215] Frank Jerry Hall se narodil v Texasu, otec jeho matky žil před svým odchodem do zámoří ve Velkém Újezdě, moravské obci poblíž Olomouce. Vztah k našim zemím je umocněn i tím, že F. J. Hall, R. E. Hartwig, Irving J. Katz a Morris Newman publikovali roku 1983 práci *Pseudo-similarity and partial unit regularity* [HHKN1], která navázala na zmíněný článek Halla a Hartwiga, v časopisu Czechoslovak Mathematical Journal. Frank Hall se dobře zná a spolupracuje s českým matematikem Miroslavem Fiedlerem, jehož odborné zaměření zahrnuje především teorii matic, a Českou republiku poměrně často navštěvuje. V emailové korespondenci s autorkou monografie (říjen 2012) napsal: *We have had many large family re-unions. I can say that I am proud of my Moravian heritage.*

Matice M, které jsou řešeními rovnice $XMX = X$ pro danou matici X (viz vztahy (3) a (4)), se nazývají *vnitřní inverze* (*inner inverses*) k matici X a obvykle se značí X^-, $X^=$ atd.

Je-li matice A pseudo-podobná matici B pomocí matice X, platí mimo jiné vztahy

$$X^-A^kX = B^k, \quad XB^kX^= = A^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Důkaz tvrzení není složitý, neobsahuje žádné složité operace, nevyžaduje ani žádnou vyšší znalost lineární algebry. Dosazením rovnosti (1) do rovnosti (2) získáme vztah

$$A = XX^-AXX^=.$$

Vynásobíme jej zleva maticí XX^- a dostaneme

$$XX^-A = XX^-XX^-AXX^=,$$

neboli

$$XX^-A = (XX^-X)X^-AXX^=,$$

a odtud s využitím rovnosti (3) platí

$$XX^-A = XX^-AXX^=.$$

Z rovnosti pravých stran posledně a prvně jmenovaného vztahu vyplývá rovnost jejich levých stran, tj. $A = XX^-A$. Dále

$$B^2 = (X^-AX)(X^-AX) = X^-A(XX^-A)X,$$

a proto

$$B^2 = X^-AAX, \quad \text{tj.} \quad B^2 = X^-A^2X.$$

Dokázali jsme, že vztah $X^-A^kX = B^k$ platí pro $k = 2$ (platnost pro $k = 1$ je obsažena již v definici pseudo-podobnosti). Dále postupujeme indukcí. Předpokládáme, že platí $X^-A^qX = B^q$, a dokážeme platnost vztahu $X^-A^{q+1}X = B^{q+1}$. Jelikož

$$B^{q+1} = B^qB = X^-A^qXB = X^-A^qXX^-AX = X^-A^q(XX^-A)X = X^-A^qAX,$$

platí skutečně $B^{q+1} = X^-A^{q+1}X$.

Platnost vztahu $XB^kX^= = A^k$ lze ověřit obdobně. Dosadíme však rovnost (2) do rovnosti (1) a vzniklý vztah násobíme zprava maticí $X^=X$. Dokážeme tak rovnost $B = BX^=$, kterou užijeme při následném důkazu indukcí.

V obecném případě z pseudo-podobnosti matice A matici B nevyplývá podobnost matic A a B (matice A, B jsou obecně různých řádů). Pokud je však okruh $\mathcal{R}$ polem a matice A, B (a tedy i matice X) mají stejný řád, je matice A pseudo-podobná matici B, právě když jsou podobné.

Pseudo-podobnost je tedy zobecněním podobnosti, v uvedeném případě mají matice A a B shodnou Weyrovu charakteristiku příslušnou vlastnímu číslu 0.

Vnitřní inverze jsou studovány rovněž v další Hartwigově práci z roku 1978, která nese název

- *Spectral inverses and the row-space equations* [Hr2]

a v níž jsou zmíněny tzv. *Weyrovy prostory.* Tato terminologie je zavedena a odůvodněna v následující pasáži, v níž $N[X]$ značí množinu všech vektorů, které jsou řešeními homogenní soustavy lineárních rovnic s maticí X:

Suppose that $AC^{-1} = C^{-1}A$ and $BC^{-1} = C^{-1}B$, and let

$$W_C^{(p)}(A) = N[(A - C)^p] \setminus N[(A - C)^{p-1}].$$

These spaces are sometimes referred to as Weyr spaces, since in the case of a field with $C = \lambda_i I$, $\lambda_i \neq 0$, the maximum number of independent vectors in $W_C^{(p)}(A)$ exactly equals the Weyr characteristic $\omega_C^{(p)}(A)$. ([Hr2], str. 62)

Robert E. Hartwig a Raphael Loewy[216] využili Weyrových výsledků také o čtrnáct let později, tj. roku 1992, v článku

- *Maximal elements under the three partial orders* [HL1].

Studovali tři částečná uspořádání (*star order* $\leq_*$, *minus order* $\leq$ a *Loewner* neboli *positive-semidefinite order* $\leq_L$) definovaná na množině čtvercových komplexních matic a hledali maximální matice vzhledem k těmto uspořádáním v různých třídách matic (mezi hermitovskými maticemi apod.). Dospěli například k tvrzení, že pro třídu nilpotentních matic je matice s Weyrovými charakteristikami (1, 1, . . . , 1) maximální vzhledem k uspořádání $\leq_*$.

6.3 Charakteristiky teorie grafů

Během sedmdesátých let začal publikovat své práce obsahující termín Weyrova charakteristika také Hans Schneider[217] (1927–2014). Zasloužil se velkou měrou o šíření povědomí o Weyrově charakteristice v USA, vznikla kolem něj komunita

[216] Raphael Loewy byl doktorandem Olgy Taussky-Todd na California Institute of Technology (tzv. Caltech).

[217] Hans Schneider se narodil ve Vídni, doktorská studia absolvoval v Edinburghu, dlouhou dobu působil v USA, kde žil až do své smrti v roce 2014. Jeho kořeny sahají na naše území, jeho otec Hugo se narodil v Karviné, z níž se poté odstěhoval kvůli studiu zubního lékařství do Vídně (zubařkou byla rovněž Hansova matka Isabella). Ač byla rodina bez vyznání, dle německých rasových zákonů byl její původ židovský, a proto po anšlusu Rakouska Německem v březnu 1938 odešla do ilegality do Karviné, kde pobývala u rodiny jednoho z bratrů Huga Schneidera. Po Mnichovské dohodě však byla Karviná postoupena Polsku a rodina se tak ocitla v dalším státě. (Bližší osudy rodiny v letech 1938 až 1940 viz vzpomínky Hanse Schneidera *March 1938–August 1940: A short personal history of my family during 30 turbulent months* [Sc5].)

Hans Schneider patřil až do smrti mezi nejvýraznější osobnosti současné lineární algebry. V období 1987 až 1996 byl prvním prezidentem nově založené The International Linear Algebra Society (ILAS; v prvních dvou letech působící pod názvem The International Matrix Group), čtyřicet let (až do roku 2012) byl vedoucím redaktorem časopisu Linear Algebra and its Applications a ještě v roce 2014 zastával funkci poradního editora Electronic Journal of Linear Algebra. Zajímavými způsoby byl propojen s několika matematiky, kteří se narodili v českých zemích a kteří pracovali nebo pracují v teorii matic. Svou odbornou prací je spjat s Eduardem Weyrem, byl blízkým známým celosvětově uznávané algebraičky matematiků, kteří publikovali značné množství článků (nebo disertačních prací) o vztahu Weyrovy charakteristiky a několika charakteristik teorie grafů. V této partii uvedeme jejich přehled, představíme některé vazby mezi členy zmíněné komunity a popíšeme jejich přístup k dané problematice. V části následující se budeme zabývat odbornou náplní prací.

Hans Schneider byl na University of Edinburgh doktorandem Alexandera Craiga Aitkena, spoluautora jedné z prvních monografií teorie matic z roku 1932 nazvané *An Introduction to the Theory of Canonical Matrices*, která, jak již bylo uvedeno, obsahuje problematiku Weyrovy charakteristiky a na kterou ostatní matematikové často odkazovali. Hans Schneider měl na tuto knihu milou osobní vzpomínku přetrvávající více než šedesát let:

As a student I learned about the Weyr characteristic from the book by Turnbull-Aitken ... (It was in fact the very first math book I bought; probably in 1950, cost GBP 1.) I expect I also heard about the Weyr characteristic in Prof. Aitken's lectures, but this is so long ago that I have no specific recollection of this.[218]

Připojme ještě jeho vzpomínky na počátky odborné práce vztahující se k Weyrovu kanonickému tvaru matice a na seznamování se s tímto tématem:

... It could have been when I was working with Richman on his thesis (ca. 1975) which resulted in our joint 1978 paper. I know I read some of Weyr's

---

Olgy Taussky-Todd narozené v Olomouci (viz 4. kapitola) a sepsal některé články s českým matematikem Miroslavem Fiedlerem. V roce 1968 patřili Olga Taussky-Todd a Hans Schneider mezi zakládající editory časopisu Linear Algebra and its Applications, dnes je mezi členy redakční rady Miroslav Fiedler.

Přibližně jednou za tři roky je udělováno ocenění *Hans Schneider Prize* za vynikající úspěchy v lineární algebře nebo celoživotní přínos tomuto oboru. V roce 1993 ji získal právě Miroslav Fiedler.

[218] Tato i následující citace pochází z emailové korespondence Hanse Schneidera s autorkou této monografie (srpen 2011).

Můžeme se jen domnívat, zda by Hans Schneider věnoval významnou část své odborné práce problematice Weyrovy teorie, pokud by nebyl Aitkenovým studentem. Uveďme pro zajímavost, jak málo stačilo, aby se Schneider Aitkenovým doktorandem nestal. Dále citovaná, dnes již humorná historka je Schneiderovou odpovědí na dotaz ohledně jeho cesty ke kariéře matematika pracujícího v lineární algebře. Otázka byla položena jeho doktorandkou Olgou Holtz během rozhovoru *"Know What You Are Good At, Keep At It, and Keep At It"*, který byl publikován na jaře roku 2012 v časopisu IMAGE (IMAGE 48(2012), str. 6–7).

It was purely accidental. In 1950 I was fired from the Royal Observatory, Edinburgh because I had broken an expensive instrument the first time I used it. This ended my intended career as an astronomer. I was married with one child and the second on its way. My father offered to support me for a Ph.D. I applied to Max Born, then the professor of Applied Mathematics in Edinburgh and one of the founders of quantum theory. But he was about to retire and was taking no more students. So I turned to Prof. A. C. Aitken.

Uvážíme-li, že mezi čtyři nejstarší významné monografie teorie matic řadíme vedle zmíněné knihy [TA1] Turnbulla a Aitkena i MacDuffeeho publikaci [Mc1], je překvapivé, že Schneiderova profesní dráha byla ovlivněna i tímto matematikem – přestože s knihou ani jejím autorem do kontaktu příliš nepřišel.

Your letter motivated me to recheck MacDuffee's book. I do not think I knew of this book as a student. ... BTW, I almost surely owe my presence at U. Wisconsin to MacDuffee. I never got to know him well as he died shortly after I arrived here in 1959.

(Z emailové korespondence s autorkou této monografie, srpen 2011; v ukázce je zmíněna University of Wisconsin, kde MacDuffee a Schneider pracovali.)

great paper then. I consulted Prof. Fiedler and he sent me a Czech version of Weyr's paper which has rested untouched in my files ever since!

Za počátek své práce věnující se výsledkům maticového počtu Eduarda Weyra označil Hans Schneider přibližně polovinu sedmdesátých let. Některé jeho práce ze sedmdesátých, ale i pozdějších let se však velmi výrazně opírají o publikace, které sepsal již v letech padesátých: disertační práci

- *Matrices with non-negative elements* [Sc1]

z roku 1952 a článek

- *The elementary divisors associated with* 0*, of a singular M-matrix* [Sc2]

z roku 1956.

Ve výše uvedené citaci byla Hansem Schneiderem zmíněna Richmanova disertace a jistý společný článek. Jmenovanou disertací je míněna práce

- *Calculation of the Weyr characteristic from the singular graph of an M-matrix* [Rm1]

z roku 1976 Daniela Jamese Richmana (nar. 1944), Schneiderova studenta na University of Wisconsin, společnou prací z roku 1978 potom často citovaný článek

- *On the singular graph and the Weyr characteristic of an M-matrix* [RS1].

V roce 1978 vyšla obdobně zaměřená Richmanova práce nazvaná

- *The singular graph of lower triangular, nilpotent matrices* [Rm2],

přidruženou tematikou se zabývá i článek

- *Algebraic eigenspaces of non-negative matrices* [Ro1]

z roku 1975, který byl publikován izraelským[219] matematikem Urielem Georgem Rothblumem (1947–2012).

Vztahy mezi Weyrovou charakteristikou a grafem tzv. *M-matice* nebo matice s nezápornými prvky (tzv. nezápornými maticemi)[220] byly součástí dalších Schneiderových pojednání: článku

- *The influence of the marked reduced graph of a nonnegative matrix on the Jordan form and related properties: A survey* [Sc4]

z roku 1986 a jeho prací sepsaných s významným izraelským matematikem a politikem Danielem Hershkowitzem[221] (nar. 1953), které jsou nazvány

[219] Uveďme pro zajímavost, že Rothblumovy kořeny sahají do Vídně, z níž jeho rodiče odešli ve třicátých letech 20. století; uprchli před nastupujícím fašismem.

[220] Nezáporným maticím a jejich aplikacím bylo věnováno několik monografií. Pro zájemce zmiňme knihu *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences* [BP1], kterou roku 1994 publikovali Abraham Berman (nar. 1943) a Robert J. Plemmons (nar. 1938).

[221] Daniel Hershkowitz je dalším z předních představitelů současné komunity matematiků věnujících se lineární algebře. Mimo jiné je hlavním redaktorem The Electronic Journal of Linear Algebra, v letech 2002 až 2008 byl prezidentem International Linear Algebra Society.

Od března 2009 do března 2013 zastával funkci ministra vědy a technologie v izraelské vládě. Ve dnech 17. a 18. května 2012 navštívil spolu s izraelským premiérem Benjaminem Netanjahuem (nar. 1949) a dalšími šesti izraelskými ministry Českou republiku. Při jednání s tehdejším českým ministrem školství Petrem Fialou (nar. 1964) vytvořili pojetí česko-izraelské spolupráce ve výzkumu a vývoji (především v oblasti programování a neurodegenerativních onemocnění).

- *Height bases, level bases, and the equality of the height and the level characteristic of an M-matrix* [HS3][222] a
- *Combinatorial bases, derived Jordan sets and the equality of the height and level characteristic of an M-matrix* [HS4][223].

První článek je z roku 1989, druhý z roku 1991.

Problematika souvislosti Weyrovy charakteristiky s teorií grafů je součástí i následujících publikací: disertační práce Michaela Ezry Sakse

- *Duality Properties of Finite Set Systems* [Ss1]

z roku 1980, pojednání Emdena R. Gansnera

- *Acyclic digraphs, Young tableaux and nilpotent matrices* [Gs1]

z roku 1981 a článků Richarda A. Brualdiho

- *Combinatorial verification of the elementary divisors of tensor products* [Bu1] a
- *Combinatorially determined elementary divisors* [Bu2]

z let 1985 a 1987.

Americký matematik Shmuel Friedland a Daniel Hershkowitz předložili roku 1988 v práci

- *The rank of powers of matrices in a block triangular form* [FH1]

výsledek stanovující dolní hranice nulit mocnin blokově trojúhelníkové matice. Tento odhad byl formulován pomocí součtu nulit mocnin bloků na diagonále. Výsledek byl později využit k odvození významných tvrzení v uvažované problematice (např. vztah tzv. majorizace jisté posloupnosti Weyrovou charakteristikou příslušnou vlastnímu číslu 0).

Ve stejném roce publikovali Michael Neumann[224] (1946–2011) a španělský matematik Rafael Bru článek

- *Nonnegative Jordan bases* [BN1].

Podotkněme na tomto místě důležitou skutečnost, že termín *výšková charakteristika* (*height characteristic*) vyskytující se v titulech některých dosud uvedených článků je název pro část Weyrovy charakteristiky matice A, a sice pro posloupnost charakteristických čísel příslušných vlastnímu číslu 0. V tehdejších pracích věnovaných uvažované problematice byla pozornost často soustředěna pouze na toto vlastní číslo. Charakteristická čísla matice A jsou nejčastěji značena η_i a jsou tedy dána vztahy

$$\eta_k = \operatorname{nul} A^k - \operatorname{nul} A^{k-1}, \quad \text{kde} \ \operatorname{nul} A^0 = \operatorname{nul} E = 0.$$

[222] Tato práce navazuje na sérii článků [HS1], [HS2], [HRS1] a [HRS2]. V nich ještě přímo Weyrova charakteristika studována nebyla, byly v nich však zavedeny některé důležité pojmy a dokázána tvrzení, na kterých stavěly další texty.

[223] Pojednání navazuje na [HS3], a je tak další součástí série uvedené v předchozí poznámce.

[224] Michael Neumann se narodil v Jeruzalémě, studoval v Tel Avivu a v Londýně. Od roku 1985 působil na University of Connecticut.

Výškovou charakteristikou se rozumí posloupnost $\eta(A) = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t)$, kde index t je největší přirozené číslo, pro které platí $\operatorname{nul} A^t > \operatorname{nul} A^{t-1}$.[225] Souvislost Weyrovy a výškové charakteristiky je často zmíněna na prvních stranách textů, poté se v nich již užívá termín výšková charakteristika.[226]

Pokud autor pracoval s nenulovým vlastním číslem λ, tj. s nulitami matic $(A - \lambda E)^k$, potom Weyrovu charakteristiku příslušnou tomuto vlastnímu číslu zavedl jako Weyrovu charakteristiku matice $(A - \lambda E)$; v jedné z nejnovějších publikací (z roku 2008) je nazvána λ-*height characteristic*.

K volbě termínu *height characteristic* Hans Schneider napsal:[227]

There are two characteristics used in the papers Hershkowitz and I wrote: height and level and we gave them names that suggested and contrasted their functions. Weyr characteristic is a perfectly appropriate name but doesn't hint at its nature. At that time, not too many people might have known what we were talking about.

V několika článcích se po zavedení výškové charakteristiky vyskytuje v malých obměnách následující věta:

We remark that in many references the height characteristic of a matrix A is called the Weyr characteristic of A, e.g. […]. ([HS4], str. 23)

Uvědomme si, že tato formulace je poněkud matoucí. Weyrovou charakteristikou matice A rozumíme soubor charakteristických čísel příslušných ke všem vlastním číslům, zatímco výšková charakteristika je v uvažovaných textech zavedena pouze pro vlastní číslo 0. Někteří autoři obdobně psali např. o Jordanově bázi čtvercové matice řádu n, ale místo n vektorů brali v úvahu pouze ty, které „přísluší“ vlastnímu číslu 0. V jednom z článků lze např. nalézt souvětí, v němž je pojem Jordanovy báze současně přiřazen jak matici řádu n, tak vektorovému

[225] Krátká rekapitulace některých pojmů Weyrovy teorie příslušných pouze vlastnímu číslu 0 viz dále.

[226] Konkrétněji se v pracích, které již byly nebo na následujících stranách budou představeny, termín Weyrova charakteristika vyskytuje v [Rm1], [Rm2], [RS1], [Sc4], [BN1], [HS3], [He1], [HS4], [HS5], [BRS1], [Hg1], [BCT1], [He5], [CC1], [He6], [NM1], [Md1], [ZM1], [NM2], [Tm2], [Tm3], [MM1], z nichž texty [Rm1], [Rm2], [RS1], [Sc4], [BN1], [Hg1] pracují pouze s tímto termínem, a naopak pojednání [HS3], [He1], [HS4], [HS5], [BCT1], [He5], [CC1], [He6], [ZM1], [Tm2], [Tm3], [MM1] zmiňují Weyrovu charakteristiku pouze jako alternativní termín k výškové charakteristice (nejčastěji v úvodu práce či při definici pojmu), poté preferují termín výšková charakteristika. Články [NM1], [MM1] uvádějí v definicích pojmu oba názvy, v samotném textu potom používají (až na jediné uvedení termínu výšková charakteristika) jen symbolický zápis.

Termín Weyrova charakteristika není naopak vůbec zmíněn v pracích [AH1], [He2], [AHK1], [He3], [HS6], [He4], [NS1], [ZT1], [NM2], [FN1], v nichž jejich autoři používali jen termín výšková charakteristika.

Disertační práce [Sc1] a články [Sc2], [Ro1], [Bu1], [FH1] pracují se zcela jinou terminologií, žádná z charakteristik zde není uvedena.

Ve třech článcích jsou v seznamu literatury uvedeny konkrétní práce Eduarda Weyra. V [RS1] jsou to [We6] a [We13]. V referencích jsou uvedeny i další práce našich autorů: rusky psaný článek Karla Čulíka [Ci1] a společná práce Miroslava Fiedlera a Vlastimila Ptáka (1925–1999) [FP1]. V [Rm2] je odkazováno na Weyrův text [We13]. Dalšími z celkem šesti položek v referencích jsou práce Karla Čulíka [Ci1] a Antonína Vrby [Vr1]. V [HS3] je zmíněna Weyrova práce [We13].

[227] Z emailové korespondence s autorkou této monografie (leden 2013).

prostoru GKer A (anglicky tzv. *generalized nullspace*), jehož dimenze nemusí být rovna n:

Note that in our terminology, a Jordan basis for A is a basis for the generalized nullspace of A. ([HS3], str. 151)

Tento nesoulad si však autoři evidentně uvědomili. Je zajímavé sledovat, jak v pracích, které publikovali titíž matematikové, postupně docházelo právě u pojmu Jordanovy báze ke korekci této nesrovnalosti. Od termínu *Jordanova báze matice A* přešli během dvou let Hans Schneider a Daniel Hershkowitz při označení téhož pojmu k názvu *Jordanova báze $E(A)$*, kde zápis $E(A)$ značí již zmíněný podprostor GKer A aritmetického vektorového prostoru dimenze n.[228]

Zajímavý je návrat matematiků na sklonku 20. století k pojmu i termínu nulita, přičemž je často zmíněn i jeho význam v řeči vektorových prostorů, tj. dimenze jádra lineárního zobrazení (endomorfismu) příslušného k matici A, pro případ nenulového vlastního čísla λ příslušného k matici $A - \lambda E$.

Z názvů řady článků je zřejmé, že se matematikové v sedmdesátých a osmdesátých letech soustředili především na tzv. M-matice.[229] Po zveřejnění Perronovy-Frobeniovy spektrální teorie (viz Perronova práce *Zur Theorie der Matrices* [Pr1] z roku 1907 a Frobeniův článek *Über Matrizen aus nicht negativen Elementen* [Fr16] z roku 1912) pro nezáporné matice se pozornost obrátila na studium souvislostí mezi vlastnostmi grafů a obecnými spektrálními vlastnostmi nezáporných matic. Jak ukážeme v následujícím textu, od těchto matic je již blízko k singulárním M-maticím. Teprve zhruba patnáct let před koncem 20. století se začaly studovat zmíněné vztahy pro případ obecných matic nad libovolným polem. Pozdější práce se již většinou věnují maticím obecnějším než jsou M-matice.

Jedná se například o několik Hershkowitzových článků:

- *A majorization relation between the height and the level characteristics* [He1] (1989),
- *Peak characteristic and nonnegative signature* [He2] (1991),
- *The height characteristic of block triangular matrices* [He3] (1992) a
- *The relation between the Jordan structure of a matrix and its graph* [He4] (1993).

Nejinak je tomu u Schneiderovy a Hershkowitzovy společné práce

- *On the existence of matrices with prescribed height and level characteristics* [HS5]

z roku 1991, která se věnuje hledání všech posloupností η a λ, pro něž existuje buď M-matice nebo striktně trojúhelníková matice, jejíž výšková charakteristika je η a úrovňová λ.[230]

---

[228] Postačí porovnat např. práce [HS3] a [HS4], konkrétně Definition 2.7, str. 151, a Definition 2.9, str. 24.

[229] Termín M-matice poprvé použil Aleksandr Markovič Ostrovskij (1893–1986) v roce 1937 v práci *Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale* [Os1]. Vysvětlení pojmu viz dále.

[230] Vysvětlení pojmů viz dále.

Na první pohled by se mohlo zdát, že nadvládu výsledků publikovaných komunitou soustředěnou kolem Hanse Schneidera či Daniela Hershkowitze narušil roku 1991 Wenchao Huang svým článkem

- *On the singular graph and Jordan diagram of strictly lower triangular matrices and M-matrices* [Hg1].

Opak je však pravdou, neboť i on byl Schneiderovým doktorandem.[231] Zmíněná publikace navázala především na výsledky výše uvedené práce *On the singular graph and the Weyr characteristic of an M-matrix* publikované Schneiderem a Richmanem.

Tak jako Hans Schneider, i Daniel Hershkowitz šířil povědomí o výškové (Weyrově) charakteristice mezi svými studenty. Jedním z nich byl Nader Agha, s nímž v roce 1990 publikoval článek

- *The relation between the height and level characteristics for a matrix with simple singular vertices* [AH1],

který navázal na zmíněnou práci *On the existence of matrices with prescribed height and level characteristics* a odpověděl na otázku v ní vznesenou.

Je proto zajímavé, že text *The relation between the height and level characteristics for a matrix with simple singular vertices* je datován dřívějším rokem než práce *On the existence of matrices with prescribed height and level characteristics*. Obě publikace tak musely být psány přibližně ve stejné době během intenzivního studia této problematiky skupinou často komunikujících matematiků.

V roce 1992 byly výsledky těchto dvou prací zobecněny v textu

- *A solution to an inverse height and level characteristics problem* [AHK1],

přičemž tentokrát byl autorský kolektiv Agha, Hershkowitz rozšířen o dalšího člena z řad Hershkowitzových studentů, o Nataly Kogan.

Další z neuvěřitelné řady příspěvků publikovaných Hansem Schneiderem nebo Danielem Hershkowitzem na přelomu osmdesátých a devadesátých let 20. století je jejich společná, velmi přínosná práce

- *Path coverings of graphs and height characteristics of matrices* [HS6]

z roku 1993, která představila podstatné výsledky studia vztahů mezi Weyrovou charakteristikou příslušnou vlastnímu číslu 0 a pokrýváním grafu vrcholově disjunktními cestami. Obdobnou tematikou se zabývá rozsáhlý článek

- *Paths in directed graphs and spectral properties of matrices* [He5]

Daniela Hershkowitze, který vyšel následujícího roku.

Termín Weyrova charakteristika se vyskytuje i v práci

- *Predecessor property, full combinatorial column rank, and the height characteristic of an M-matrix* [BCT1],

[231] Schneiderův vliv na tuto práci je však diskutabilní, neboť Wenchao Huang obhájil svou disertační práci až v roce 1997. Není tedy jisté, že již byl v roce 1991 Schneiderovým studentem.

kterou roku 1993 publikovala trojice autorů Rafael Bru, Rafael Cantó a Bit-Shun Tam. Na ni navázalo v roce 1996 pojednání

- *Singular graph and extension of Jordan chains of an M-matrix* [CC1],

jehož tvůrci jsou Rafael Cantó a Joan-Josep Climent. Mezitím byl v roce 1994 uveřejněn článek Michaela Neumanna a Hanse Schneidera

- *Algorithms for computing bases for the Perron eigenspace with prescribed nonnegativity and combinatorial properties* [NS1].

Souvislostmi mezi spektrálními vlastnostmi matice a teoretickými charakteristikami zavedenými řečí teorie grafů se zabývá také článek

- *The combinatorial structure of generalized eigenspaces – from nonnegative matrices to general matrices* [He6]

z roku 1999, pod nímž je autorsky podepsán pouze Hershkowitz. Kromě jeho závěru obsahujícího nové výsledky se jedná o práci přehledovou, snažící se uvést a sumarizovat hlavní myšlenky dosud publikovaných textů obdobné náplně. Začíná u vztahů platících pro M-matice a postupně se dostává k maticím obecným.[232]

Velmi krátká poznámka o výškové charakteristice je i ve více než třicetistránkovém článku

- *On matrices with cyclic structure* [Tm1],

který publikoval v roce 1999 Bit-Shun Tam, profesor působící na taiwanské univerzitě.[233]

V roce 1999 bylo rovněž publikováno takřka třicetistránkové pojednání

- *On the Jordan form of an irreducible matrix with eventually nonnegative powers* [ZT1],

jehož autory jsou Boris G. Zaslavsky a Bit-Shun Tam. Práce se však od předchozích značně liší, přístupem patří spíše k textům nového milenia.

Problematika vztahů mezi charakteristikami grafů a matic je studována i ve třetím tisíciletí, nicméně se většinou vyskytuje v textech, jejichž hlavní náplň je jiná. Stále však pracují s nulitami mocnin matice, některé užívají termín Weyrova charakteristika, většinou však pracují s termínem charakteristika výšková.

---

[232] Práce je věnována Hansi Schneiderovi (s mírným zpožděním) k jeho významnému životnímu jubileu:

Dedicated to Hans Schneider on the occasion of his 70th birthday with gratitude for fifteen years of fruitful co-operation and friendship. ([He6], str. 173)

[233] Bit-Shun Tam publikoval několik článků, které se přímo Weyrovou charakteristikou nezabývají, a proto je nebudeme zmiňovat. Jedná se však o tematicky velmi příbuzné práce, na něž je odkazováno v mnoha zmíněných Schneiderových a Hershkowitzových článcích. V některých je uvedeno poděkování Bit-Shun Tamovi za pomoc a komentáře. Hans Schneider a Bit-Shun Tam jsou spoluautory několika článků, existuje tzv. *Tamova-Schneiderova věta* o periferním spektru matice (viz [TS1]). Periferním spektrem matice rozumíme soubor všech jejích vlastních čísel, jejichž absolutní hodnota je rovna jejímu spektrálnímu poloměru.

Weyrovu charakteristiku zmiňují jako alternativní termín k výškové charakteristice například sedmdesátistránkové pojednání

- *A cone-theoretic approach to the spectral theory of positive linear operators: the finite-dimensional case* [Tm2]

z roku 2001 či více než padesátistránková práce

- *The Perron generalized eigenspace and the spectral cone of a cone-preserving map* [Tm3]

z roku 2004, jejichž autorem je opět Bit-Shun Tam.

Naopak text

- *On spectra of expansion graphs and matrix polynomials, II* [FN1],

v jehož závěru se Karl-Heinz Förster a Béla Nagy (nar. 1942) věnují výškové a úrovňové charakteristice pro tzv. *expansion graph*, Weyrovo jméno neobsahuje.

V letech 2002 až 2004 byla spoluautorkou tří článků pracujících s Weyrovou charakteristikou Judith Joanne McDonald, doktorandka Hanse Schneidera na University of Wisconsin. Nejstarší a nejmladší z těchto textů publikovala spolu se Sarah Carnochan Naqvi, ve zbývajícím byl spoluautorem Boris G. Zaslavsky. V chronologickém pořadí se jedná o články

- *The combinatorial structure of eventually nonnegative matrices* [NM1]

z roku 2002,

- *A characterization of Jordan canonical forms which are similar to eventually nonnegative matrices with the properties of nonnegative matrices* [ZM1]

z roku 2003 a

- *Eventually nonnegative matrices are similar to seminonnegative matrices* [NM2]

z roku 2004. Všechny zmiňují Weyrovu charakteristiku. Ta se vyskytuje i v samostatné práci Judith Joanne McDonald

- *The peripheral spectrum of a nonnegative matrix* [Md1]

z roku 2003.

Judith Joanne McDonald je rovněž spoluautorkou článku

- *Level characteristics corresponding to peripheral eigenvalues of a nonnegative matrix* [MM1].

Publikovala jej roku 2008 spolu s DeAnne M. Morris, která Weyrovu charakteristiku studovala i ve své disertační práci

- *Combinatorial properties of nonnegative and eventually nonnegative matrices* [Mo1] z téhož roku. Sepsala ji na Washington State University pod vedení Judith Joanne McDonald. Je tak vytvořen sled matematiků a jejich doktorandů A. C. Aitken – H. Schneider – J. J. McDonald – D. M. Morris, kteří s Weyrovou charakteristikou pracovali, používali ve svých pracích přímo tento termín a inspirovali své studenty. Pomyslná štafeta se přitom úspěšně předává již přibližně osmdesát let (práce [TA1] z roku 1932 – článek [MM1] z roku 2008).[234]

Sama Judith J. McDonald potvrdila, že to byl právě Hans Schneider, kdo ji s touto problematikou seznámil:[235]

I learned about the Weyr characteristic from Hans Schneider. The student of mine who worked with it also was Diane Morris. She finished a PhD here at Washington State ...

6.4 Charakteristiky teorie grafů – odborná část

Věnujme se nyní odborné náplni výše uvedených prací. Uvedeme základní výsledky o vztazích mezi grafy matice a Weyrovou (výškovou) charakteristikou příslušnou vlastnímu číslu 0, abychom si udělali bližší představu, jakého typu uvažované myšlenky jsou.

Obecně lze říci, že značná pozornost je v publikacích věnována souvislosti mezi charakteristikami pocházejícími z různých matematických oborů – z teorie grafů a z teorie matic. Jedná se především o vztah mezi úrovňovou charakteristikou (*level characteristic*), jež je zavedena pomocí terminologie grafů pro graf matice, a již zmíněnou výškovou charakteristikou (*height characteristic*), neboli Weyrovou charakteristikou příslušnou vlastnímu číslu 0, která zcela záleží na spektrálních vlastnostech matice. V pozdějších pracích byly s postupným zobecňováním výsledků nacházeny nové a nové posloupnosti související s grafy a nahrazující v dokázaných vztazích úrovňovou charakteristiku.

Jelikož tato problematika nebyla dosud v češtině publikována, je zde na několika místech zavedena nová terminologie. Názvy, jejichž překlad nebyl jednoznačný, jsou uvedeny i v jejich originální anglické podobě, aby si čtenář mohl případně zvolit i svoji verzi českého termínu.

Protože v této části bude většinou studována Weyrova charakteristika příslušná pouze vlastnímu číslu 0, uveďme nyní pro lepší orientaci krátkou rekapitulaci některých dále potřebných pojmů Weyrovy teorie charakteristických čísel přizpůsobených pouze k tomuto vlastnímu číslu. Některé pojmy budeme v této problematice uvažovat v mírně modifikované nebo obecnější podobě (viz dále např. Jordanova báze). Naším cílem je přiblížení se symbolice a terminologii, která byla použita v původních, výše uvedených pracích a která nám usnadní vyjadřování.

Budeme se zabývat pouze čtvercovými maticemi (nad $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$). Spektrum matice A budeme značit $\sigma(A)$, spektrální poloměr matice A symbolem $\varrho(A)$,

[234] Již jsme viděli, že tato řada pokračovatelů není jediná. Z dosud uvedených je však nejdelší. Později se seznámíme ještě s Helene Shapiro, která se rovněž dozvěděla o Weyrově charakteristice od Hanse Schneidera a která na přelomu tisíciletí podnítila zájem světové algebraické komunity o Weyrovu charakteristiku.

[235] Z emailové korespondence s autorkou této monografie (únor 2013).

tj. $\varrho(A) = \max\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(A)\}$. Charakteristický polynom uvažujeme ve tvaru $\det(\lambda E - A)$ (pokud bychom jej definovali jako $\det(A - \lambda E)$, lišil by se pro matice lichého řádu jen znaménkem). Budeme uvažovat pouze blokové matice, jejichž bloky na diagonále jsou čtvercové.

Jádrem $\operatorname{Ker} A$ *čtvercové matice* A řádu n nazýváme množinu vektorů v, pro něž $Av^T = o^T$. Proto $\operatorname{nul} A = \dim \operatorname{Ker} A$.

Je-li matice A singulární, tj. má-li vlastní číslo 0, uvažujeme posloupnost

$$0 \neq \operatorname{Ker} A \subsetneqq \operatorname{Ker} A^2 \subsetneqq \operatorname{Ker} A^3 \subsetneqq \ldots \subsetneqq \operatorname{Ker} A^t = \operatorname{Ker} A^{t+1} = \ldots,$$

kde t je nejmenší přirozené číslo, pro které je $\operatorname{Ker} A^t = \operatorname{Ker} A^{t+1}$.

Zobecněné jádro $\operatorname{GKer} A$ *matice* A řádu n potom definujeme vztahem

$$\operatorname{GKer} A = \operatorname{Ker} A^t.$$

Je zřejmé, že $\operatorname{GKer} A = \operatorname{Ker} A^n$.

Charakteristická čísla příslušná vlastnímu číslu 0 matice A tedy jsou

$$\begin{aligned}
&\eta_1 = \operatorname{nul} A = \dim \operatorname{Ker} A,\\
&\eta_2 = \operatorname{nul} A^2 - \operatorname{nul} A = \dim \operatorname{Ker} A^2 - \dim \operatorname{Ker} A,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\eta_t = \operatorname{nul} A^t - \operatorname{nul} A^{t-1} = \dim \operatorname{Ker} A^t - \dim \operatorname{Ker} A^{t-1}.
\end{aligned}$$

Weyrova charakteristika příslušná vlastnímu číslu 0 matice A (tj. výšková charakteristika matice A) je $\eta(A) = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t)$ a $\sum_{i=1}^{t} \eta_i = \dim \operatorname{GKer} A$ je násobnost vlastního čísla 0. Termínem výšková charakteristika matice A budeme označovat Weyrovu charakteristiku matice A příslušnou vlastnímu číslu 0.

Jordanův řetízek matice A příslušný vlastnímu číslu 0 je uspořádaná množina nenulových vektorů $\{v^T, Av^T, \ldots, A^{k-1}v^T\}$, kde $A^k v^T = o^T$. Odtud plyne, že $A^{k-1}v^T \in \operatorname{Ker} A$, $A^{k-2}v^T \in \operatorname{Ker} A^2$ atd.

Jordanovou bází podprostoru $\operatorname{GKer} A$ rozumíme bázi složenou z disjunktních Jordanových řetízků matice A. Přitom je zachováno uspořádání každého řetízku. Na pořadí, v němž jsou řetízky složeny do báze, nezáleží. V případě komplexní matice A Jordanova báze podprostoru $\operatorname{GKer} A$ vždy existuje.[236]

Nechť v je nenulový vektor patřící $\operatorname{GKer} A$ čtvercové matice A. *Výše vektoru* v (*height of* v) je nejmenší přirozené číslo k, pro které $A^k v^T = o^T$.[237] Výše nulového vektoru je nula. Výši vektoru v budeme značit $\textit{výše}(v)$.[238]

[236] Jordanovu bázi $\operatorname{GKer} A$ lze zavést i jiným způsobem. Z Jordanovy báze čtvercové matice A, tj. z množiny sloupců matice G, pro kterou $G^{-1}AG$ je Jordanův kanonický tvar matice A, vybereme právě ty vektory, které jsou ve stejném sloupci jako nuly na diagonále v Jordanově kanonickém tvaru (zachováme přitom pořadí vektorů v rámci téže Jordanovy buňky).

[237] Připomeňme, že O. Borůvka nazval v učebnici *Základy teorie matic* [Bo8] z roku 1971 tento pojem *řád vektoru.*

[238] Vektor $v \in \operatorname{GKer} A$, $v \neq o$, má tedy výši $k > 0$ právě tehdy, když $v \in \operatorname{Ker} A^k \setminus \operatorname{Ker} A^{k-1}$. Vlastní vektory matice příslušné vlastnímu číslu 0 jsou právě vektory výše 1.

Po této úmluvě pokračujme definicemi stěžejních pojmů a formulacemi nejdůležitějších poznatků uvažovaných článků:[239]

1 Definice. *Reducibilní* (*rozložitelnou*) maticí rozumíme čtvercovou matici, kterou lze pomocí simultánních permutací řádků a sloupců, tj. pomocí transformace $P^{-1}AP(= P^TAP)$, kde P je permutační matice, převést na tvar

$$\begin{pmatrix} K & O \\ L & M \end{pmatrix},$$

v němž K a M jsou čtvercové matice (řádu alespoň jedna) a O je nulová matice. V opačném případě nazýváme matici *ireducibilní* (*nerozložitelnou*).

Matice řádu 1 (včetně nulové) považujeme za ireducibilní, matice nulové řádu alespoň dva za reducibilní.

2 Definice. Reálná matice se nazývá *nezáporná*, jsou-li všechny její prvky nezáporná čísla.

3 Definice. Matici A nazveme *Z-maticí*, jestliže existuje nezáporná matice B taková, že $A = kE - B$.

Jedná se tedy o matici A, jejíž prvky neležící na diagonále jsou nekladné, o prvcích na diagonále nepředpokládáme nic.

4 Definice. *M-maticí* rozumíme Z-matici $A = kE - B$, pro kterou $k \geq \varrho(B)$.

Jelikož bylo dokázáno,[240] že pro čtvercové matice $B = (b_{ij})$ s nezápornými prvky platí $\varrho(B) \geq b_{ii}$ pro všechna i, má M-matice na diagonále nezáporné prvky a na ostatních místech prvky nekladné.[241]

Připomeňme nyní nejdůležitější poznatky Perronovy-Frobeniovy spektrální teorie pro nezáporné matice a jejich modifikaci pro M-matice. Mnohé z vlastností použijeme v dalším textu, speciálně pak tvrzení platné pro ireducibilní matice.

5 Věta. *Nechť A je čtvercová nezáporná matice. Potom spektrální poloměr $\varrho(A)$ je vlastní číslo a tomuto číslu odpovídá nezáporný vlastní vektor. Je-li navíc*

[239] Na následujících stranách bude zavedeno značné množství nových pojmů, zejména různé speciální posloupnosti přirozených čísel. Pro lepší orientaci je přehled pojmů – včetně odkazů na stránky s jejich definicemi – uveden na straně 361.

[240] Viz článek Olgy Taussky-Todd *Bounds for the characteristic roots of matrices II.* [Ta1].

[241] Často se M-maticemi rozumí pouze třída Z-matic s kladnými diagonálními prvky, výskyt nul na diagonále se nepřipouští. Tedy ve vztahu $A = kE - B$ je $k > \varrho(B)$. Námi definované M-matice jsou poté nazývány *matice třídy* K_0. V méně obecném případě, kdy matice třídy K_0 splňuje vztah $k > \varrho(B)$, je matice nazývána nejen M-maticí, ale i *maticí třídy* K (pojmenované na počet matematika D. M. Koteljanskiho). Jistě $K \subset K_0$. Je-li $k = \varrho(B)$, je k vlastním číslem matice B (viz dále Věta 5) a M-matice A je singulární. Je-li naopak $k > \varrho(B)$, není k vlastním číslem matice B, a tedy M-matice A je regulární. „Naše“ regulární M-matice proto odpovídají třídě K, singulární pak třídě matic z K_0, které nejsou maticemi třídy K. Viz například [Fi1], str. 107–113, případně anglická verze téže monografie ([Fi1], 2. vyd., str. 129–139).

matice A ireducibilní, je $\varrho(A)$ jednoduchým vlastním číslem a složky příslušného vlastního vektoru jsou kladné.[242]

6 Věta. *Pro singulární M-matici A existuje nezáporný vektor x splňující rovnici $Ax^T = o^T$. Je-li navíc matice A ireducibilní, potom 0 je jednoduchým vlastním číslem matice A a odpovídající vlastní vektor má kladné složky.*

Naskýtá se otázka, proč používáme při zavedení pojmu M-matice na první pohled nepříliš průhledný vztah $A = kE - B$ místo jednoduchého stanovení „znamének prvků“ na diagonále matice a mimo ni. Důvod je následující: uvědomme si, že M-matice A bude singulární, právě když $k = \varrho(B)$. Je známo, že je-li λ s-násobným vlastním číslem matice B, je 0 s-násobným vlastním číslem matice $\lambda E - B$. Autoři proto formulovali uvedenou definici využívající vztah nápadně připomínající tvar charakteristické matice, aby mohli místo studia vlastního čísla $\varrho(B)$ nezáporné matice B ekvivalentně studovat vlastní číslo 0 singulární M-matice $A = \varrho(B)E - B$.

V různých textech se proto často objevují formulace následujícího typu:

It is often convenient to state results on a nonnegative matrix P in terms of the associated singular M-matrix $A = \varrho(P)I - P$. ([Sc4], str. 165)

Formally our results are stated in terms of the eigenvalue 0 *of a singular matrix, but this is a technicality, since a scalar matrix may always be added to the original matrix.* ([HRS2], str. 10)

Jen na vlastní číslo 0 se v uvažovaných textech matematikové často omezili také u Segreovy charakteristiky $\xi(A)$ matice A. Definovali ji jako nerostoucí posloupnost řádů Jordanových buněk příslušných vlastnímu číslu 0. Nezřídka upozorňovali na dualitu mezi výškovou charakteristikou a Segreovou charakteristikou příslušnou vlastnímu číslu 0.[243]

7 Definice. *Grafem matice $A = (a_{ij})$* řádu n rozumíme orientovaný graf s n vrcholy $1, 2, \ldots, n$, v němž existuje orientovaná hrana z vrcholu i do vrcholu j právě tehdy, když $a_{ij} \neq 0$. Graf matice A značíme $G(A)$.

Obdobně definujeme *redukovaný graf $R(A)$ blokové matice.*

8 Definice. *Redukovaným grafem $R(A)$ blokové matice A* tvaru

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \ldots & A_{pp} \end{pmatrix}$$

[242] Pokud budeme uvažovat ireducibilní matici řádu alespoň dva, je $\varrho(A)$ navíc kladným vlastním číslem.
[243] Vztahu duality je věnována pozornost ve 3. kapitole.

rozumíme orientovaný graf s p vrcholy $1, 2, \ldots, p$, v němž existuje hrana z i-tého vrcholu do j-tého, právě když $A_{ij} \neq O$.

9 Definice. Nechť A je matice rozdělená na bloky, z nichž diagonální jsou čtvercové. *Vrchol i* redukovaného grafu $R(A)$ se nazývá *singulární*, jestliže A_{ii} je singulární matice.[244] Je-li navíc 0 jednoduchým vlastním číslem matice A_{ii}, potom se vrchol i nazývá *jednoduchý singulární*.

10 Definice. *Cestou P* budeme rozumět posloupnost $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ různých vrcholů grafu, ve které jsou každé dva po sobě jdoucí vrcholy spojeny orientovanou hranou, tj. hrany jdou z i_1 do i_2, z i_2 do i_3 atd. až z i_{k-1} do i_k. Cestou rovněž nazýváme posloupnost obsahující jediný vrchol. *Délkou cesty $|P|$* nazveme počet vrcholů této cesty.[245]

Čtvercová matice řádu n je ireducibilní, právě když je její graf silně souvislý, tj. pro každé dva vrcholy $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ existuje cesta z i do j, nebo když má graf jediný vrchol.

11 Definice. Uvažujme singulární vrchol i redukovaného grafu $R(A)$ a všechny cesty v $R(A)$ v něm končící. Z těchto cest vyberme takovou cestu, která obsahuje největší počet singulárních vrcholů. *Úrovní* (*level*) *singulárního vrcholu i* redukovaného grafu $R(A)$ potom rozumíme počet singulárních vrcholů na této cestě.

12 Poznámka. Úroveň vrcholu lze definovat pozměněným způsobem. *Singulárním grafem matice A* rozumíme graf obsahující pouze singulární vrcholy redukovaného grafu $R(A)$, v němž existuje hrana z vrcholu i do vrcholu j právě tehdy, když v $R(A)$ existuje cesta z vrcholu i do vrcholu j. „V řeči singulárního grafu“ lze úroveň singulárního vrcholu redukovaného grafu definovat jako maximální délku cesty singulárního grafu, která končí v tomto vrcholu.

13 Definice. Nechť m je největší z úrovní všech singulárních vrcholů v redukovaném grafu $R(A)$ matice A. *Úrovňovou charakteristikou* $\lambda(A)$ matice A nazýváme posloupnost $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$, kde λ_k je počet singulárních vrcholů grafu $R(A)$ mající úroveň k.

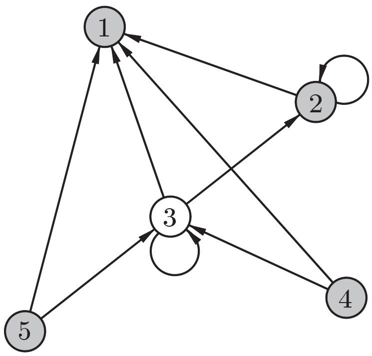
Demonstrujme nové pojmy na konkrétním příkladu. Uvažujme matici

$$A = \left(\begin{array}{c|cc|c|c|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -4 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ \hline
1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ \hline
3 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

[244] Poznamenejme, že v případě matice „rozdělené“ na bloky řádu 1 jsou singulárními vrcholy $R(A)$ právě vrcholy bez smyčky a samozřejmě $R(A) = G(A)$.

[245] Raději zdůrazněme, že cesta (*path*) má různé vrcholy. Obecnější pojem, v němž nemusí být vrcholy nutně různé, se nazývá sled (*walk*).

rozdělenou na bloky. Singulárními vrcholy redukovaného grafu $R(A)$, které budeme zvýrazňovat podbarvením, jsou vrcholy číslo 1, 2, 4 a 5. Redukovaný graf $R(A)$ matice A vypadá takto:



Graf 1

Z cest, které končí ve vrcholu 1, obsahují nejvíce singulárních vrcholů cesty (5, 3, 2, 1) a (4, 3, 2, 1), a to tři. Úroveň vrcholu 1 je tedy tři. Do vrcholu 2 směřují dvě cesty (4, 3, 2) a (5, 3, 2), obě obsahují dva singulární vrcholy, úroveň vrcholu 2 je proto dva. Ve zbývajících singulárních vrcholech 4 a 5 končí pouze cesty jednovrcholové, jejich úroveň je proto jedna. Úrovňová charakteristika $\lambda(A)$ matice A je tedy posloupnost $(2, 1, 1)$.

Speciálním případem blokové matice je tzv. Frobeniův normální tvar.[246]

14 Definice. *Frobeniův normální tvar* je bloková matice

$$\begin{pmatrix} A_{11} & O & \cdots & O \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{q1} & A_{q2} & \dots & A_{qq} \end{pmatrix},$$

v níž jsou matice A_{ii} na zobecněné diagonále čtvercové a ireducibilní.

Je známo, že každou čtvercovou matici lze pomocí simultánních permutací řádků a sloupců převést na Frobeniův normální tvar. Tento tvar existuje – až na nepodstatné změny v uspořádání prvků, které nebudou mít na naše studium vliv – pro danou matici jediný. Konkrétněji, diagonální bloky jsou určeny jednoznačně až na permutaci prvků uvnitř těchto bloků (důsledkem jsou permutace prvků v odpovídajících nediagonálních blocích), Frobeniův normální

[246] Upozorněme, že zcela totožný termín se v lineární algebře používá i pro odlišný pojem.

tvar je poté jednoznačně určen až na uspořádání diagonálních bloků.[247]

Uvědomme si pro další odvozování důležitou skutečnost, že po provedení takovéto transformace se diagonální prvky pouze přemístí v rámci diagonály, nediagonální prvky zůstanou nediagonálními, a proto Frobeniův normální tvar M-matice (a také každý jeho diagonální blok) zůstává M-maticí.

Dle Perronovy-Frobeniovy teorie je 0 jednoduchým vlastním číslem singulární ireducibilní M-matice A, a tedy i každého singulárního bloku, který leží na diagonále Frobeniova normálního tvaru matice A.

Existuje mnoho způsobů, kterými lze dané matici přiřadit blokovou matici tak, aby bloky na diagonále byly čtvercové. V následujících odstavcích věnovaných vztahům mezi charakteristikami budeme vždy předpokládat, že matice A je ve Frobeniově normálním tvaru. A právě tomuto tvaru přiřadíme úrovňovou charakteristiku.

Vedle dvou dosud známých charakteristik, výškové $\eta(A)$ a Segreovy $\xi(A)$, jsme zavedli úrovňovou charakteristiku $\lambda(A)$. Naskýtá se tedy přirozená otázka, zda se úrovňová charakteristika rovná některé ze zbývajících dvou a pokud ne, zda lze mezi těmito charakteristikami nalézt nějaký jiný vztah.

Vyslovme nejprve věty týkající se dvou speciálních případů:

15 Věta. *Nechť A je M-matice. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(i) $\eta(A) = (t)$,
(ii) $\lambda(A) = (t)$.

Z Ferrersova diagramu je zřejmé, že lze vyslovit větu analogickou, v níž budou navzájem ekvivalentní tyto podmínky:

(i') $\xi(A) = (1, 1, ..., 1)$,
(ii) $\lambda(A) = (t)$,

kde počet prvků (jedniček) Segreovy charakteristiky je t.

V tomto speciálním případě, v němž každá cesta redukovaného grafu $R(A)$ obsahuje maximálně jeden singulární vrchol,[248] platí vztah

$$\eta(A) = \lambda(A) = \xi(A)^*,$$

kde $\xi(A)^*$ značí posloupnost duální k posloupnosti $\xi(A)$. Celkový počet singulárních vrcholů v $R(A)$ je t, což je současně počet buněk (řádu 1) v Jordanově kanonickém tvaru matice A příslušných vlastnímu číslu 0, resp. násobnost vlastního čísla 0.

[247] Více informací k jednoznačnosti uspořádání diagonálních matic ve Frobeniově normálním tvaru viz monografie Miroslava Fiedlera *Speciální matice a jejich použití v numerické matematice* [Fi1], str. 70–71.

[248] Z rovnosti $\lambda(A) = (t)$ totiž plyne, že v $R(A)$ neexistuje cesta z jednoho singulárního vrcholu do jiného.

Je zajímavé, že předchozí věta je jedním z výsledků, které byly dokázány již ve Schneiderově disertační práci *Matrices with non-negative elements* z roku 1952 a rovněž v jeho článku *The elementary divisors associated with* 0*, of a singular M-matrix* z roku 1956. Tehdy však byla vyslovena zcela jinou terminologií, o žádné charakteristice v ní není ani zmínka.[249] ([Sc2], str. 109)

Pro porovnání vývoje terminologie uveďme i o třicet let mladší formulaci této věty týmž autorem:

(6.1) THEOREM [...]. Let A be a M-matrix. Then the following are equivalent:
(a) There Jordan blocks (for the eigenvalue 0*) are all of size* 1*, i.e., the Segré characteristic is* $(1, \ldots, 1)$.
(b) No singular vertex in R(A) has access to any other singular vertex, i.e., the singular graph S(A) is trivially ordered. ([Sc4], str. 174)

Připomeňme, že ani Hans Schneider si tyto myšlenky automaticky s Weyrovou charakteristikou nespojil, neboť v roce 2011 v korespondenci vzpomínal, že s touto problematikou začal pracovat až kolem roku 1975.

Ilustrujme tvrzení na příkladu. Nechť

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde a, b, c, d, e, f jsou libovolná kladná čísla. Matice A je M-matice, je ve Frobeniově normálním tvaru, bloky na diagonále jsou řádu 1. Matici A přísluší následující graf $R(A) = G(A)$.

[249] Pro zájemce uveďme doslovnou citaci věty z uvedené práce [Sc2]. Jedná se o formulaci odpovídající ekvivalenci podmínek (i') a (ii):

THEOREM 3. Let $A = [A_{ij}]$, $i, j = 1, \ldots, k$, *be a singular M-matrix in standard form. Let S be the set of indices of singular* A_{ii}. *The elementary divisors associated with the characteristic root* 0 *are all linear if and only if* $R_{\beta\alpha} = 0$ *whenever* $\alpha, \beta \in S$ *and* $\alpha \neq \beta$. ([Sc2], str. 114)

Připojme ještě vysvětlení symbolu $R_{\beta\alpha}$:

Let A be a square matrix and let P be the diagonally symmetric partition $[A_{ij}]$, $i, j = 1, ..., k$. *For* $i, j = 1, ..., k$ *we set*

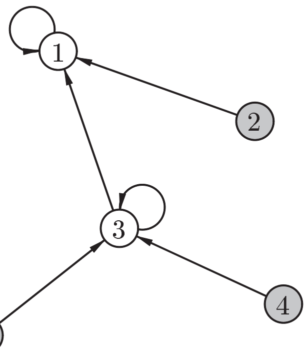
$$r_{ij}(A, P) = 0 \quad if \quad i \neq j \quad and \quad A_{ij} = 0,$$

$$and \quad r_{ij}(A, P) = 1 \quad if \quad i = j, \quad or \quad A_{ij} \neq 0.$$

Where no confusion can arise we shall write r_{ij} *for* $r_{ij}(A, P)$. *Next we set*

$$R_{ij}(A, P) = \ max\ r_{ih} r_{hl} \ldots r_{nj},$$

the maximum being taken over all sequences $(i, h, \ldots, n, j)$. *Again we shall generally write* R_{ij} for $R_{ij}(A, P)$.



Graf 2

Všechny singulární vrcholy 2, 4, 5 mají úroveň jedna, proto $\lambda(A) = (3)$. Dle uvedené věty ihned víme, že i $\eta(A) = (3)$. Ověřme tuto skutečnost pomocí rozdílů nulit. Protože $\operatorname{nul}(A) = \operatorname{nul}(A^2) = 3$, je skutečně $\eta(A) = (3)$. Celkový počet singulárních vrcholů v $R(A)$ je roven třem. Charakteristický polynom matice A je $\lambda^3(\lambda - a)(\lambda - d)$, tedy 0 je trojnásobným vlastním číslem. Odpovídají mu tři lineárně nezávislé vlastní vektory

$$(0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1),$$

vlastnímu číslu a přísluší vlastní vektor

$$\left(\frac{a(a-d)}{cf}, \frac{-b(a-d)}{cf}, \frac{-a}{f}, \frac{e}{f}, 1\right)$$

a vlastnímu číslu d vlastní vektor

$$\left(0, 0, \frac{-d}{f}, \frac{e}{f}, 1\right).$$

Nalezli jsme pět lineárně nezávislých vlastních vektorů, Jordanův kanonický tvar J má tedy pět Jordanových buněk prvního řádu, z nichž tři odpovídají vlastnímu číslu 0. Tedy

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

a Segreova charakteristika matice A příslušná vlastnímu číslu 0 je posloupnost $\xi(A) = (1, 1, 1)$, z čehož plyne $\xi(A)^* = (3)$. Je tedy $\eta(A) = \lambda(A) = \xi(A)^*$.

Zabývejme se nyní druhým extrémním případem:

16 Věta. *Nechť A je M-matice. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(i) $\eta(A) = (1, 1, \ldots, 1)$,
(ii) $\lambda(A) = (1, 1, \ldots, 1)$,

neboli analogicky jsou ekvivalentní podmínky:

(i') $\xi(A) = (t)$,
(ii) $\lambda(A) = (1, 1, \ldots, 1)$,

kde počet prvků (jedniček) charakteristik $\eta(A)$ a $\lambda(A)$ v obou verzích tvrzení je t.[250]

I v tomto speciálním případě, v němž existuje cesta v $R(A)$ obsahující všechny singulární vrcholy grafu, tedy platí

$$\eta(A) = \lambda(A) = \xi(A)^*.$$

K vlastnímu číslu 0 přísluší jediná buňka, jejíž řád je t, a tedy i násobnost tohoto vlastního čísla je t.

Rovněž tato věta je součástí Schneiderovy disertační práce *Matrices with non-negative elements* a jeho článku *The elementary divisors associated with* 0*, of a singular M-matrix*, které byly publikovány již v padesátých letech.[251]

Ukažme opět výše uvedené souvislosti na konkrétní M-matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ -b & -c & 0 & 0 \\ -d & 0 & -e & 0 \end{pmatrix},$$

kde a, b, c, d, e jsou libovolná kladná čísla. Matice A je ve Frobeniově normálním tvaru, bloky na diagonále mají řád 1.

[250] Podotkněme, že Weyrova charakteristika $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t)$ příslušná určitému vlastnímu číslu, pro jejíž prvky platí $\eta_1 = \eta_2 = \ldots = \eta_t$, se někdy nazývá *homogenní* Weyrova charakteristika tohoto vlastního čísla. Viz např. [OCV1], str. 52.

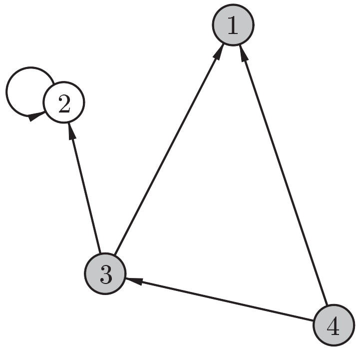
[251] Citujme opět Schneiderovu formulaci (vyjádření ekvivalence podmínek (i') a (ii)): *THEOREM 5. Let $A = [A_{ij}]$, $i, j = 1, \ldots, k$, be a singular M-matrix in standard form. Let S be the set of indices of singular A_{ii}. There is only one elementary divisor associated with the characteristic root* 0 *of A if and only if $R_{\beta\alpha} = 1$, whenever $\alpha, \beta \in S$ and $\beta > \alpha$.* ([Sc2], str. 118)

Značný posun v terminologii dokládá formulace stejné věty z Schneiderovy práce publikované o tři desítky let později:

(6.3) THEOREM [...]. Let A be an M-matrix. Then the following are equivalent:
(a) There is at most one Jordan block for the eigenvalue 0*, i.e., the Weyr characteristic is* $(1, \ldots, 1)$.
(b) The singular graph $S(A)$ is linearly ordered. ([Sc4], str. 175)

Formulace věty pomocí symbolů R_{ij} viz též [Cs1], Theorem 3, str. 1031.

Redukovaný graf $R(A) = G(A)$ matice A vypadá takto:



Graf 3

Všechny singulární vrcholy 1, 3, 4 leží na jediné cestě a mají po řadě úrovně tři, dva a jedna, proto $\lambda(A) = (1, 1, 1)$. Jelikož je $\mathrm{nul}(A) = 1$, $\mathrm{nul}(A^2) = 2$, $\mathrm{nul}(A^3) = \mathrm{nul}(A^4) = 3$, je $\eta(A) = (1, 1, 1)$. Počet jedniček v obou charakteristikách je tři. Charakteristický polynom matice A je $\lambda^3(\lambda - a)$, násobnost vlastního čísla 0 je tři. Odpovídá mu však jediný vlastní vektor

$$(0, 0, 0, 1),$$

vlastnímu číslu a potom vlastní vektor

$$\left(0, \frac{a^2}{ce}, \frac{-a}{e}, 1\right).$$

Vlastnímu číslu 0 tedy odpovídá Jordanova buňka řádu tři, Jordanův kanonický tvar matice A vypadá takto:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Odtud dostáváme $\xi(A) = (3)$ a dále $\xi(A)^* = (1, 1, 1)$ a celkově skutečně

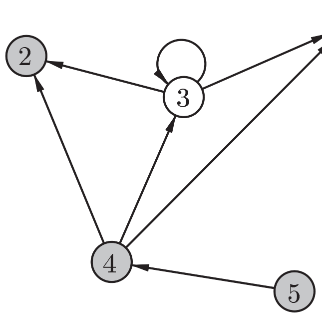
$$\eta(A) = \lambda(A) = \xi(A)^*.$$

Obecně však vztah $\eta(A) = \lambda(A) = \xi(A)^*$ neplatí, jako protipříklad stačí uvést matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a & -b & c & 0 & 0 \\ -d & -e & -f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g & 0 \end{pmatrix},$$

kde a, b, c, d, e, f, g jsou libovolná kladná čísla. Matice A je M-maticí ve Frobeniově normálním tvaru, bloky na diagonále jsou řádu 1.

Matici A odpovídá následující redukovaný graf $R(A) = G(A)$:



Graf 4

Singulárními vrcholy jsou vrcholy 1, 2, 4 a 5, jejich úrovně jsou po řadě tři, tři, dva a jedna, a tedy $\lambda(A) = (1, 1, 2)$.

Vypočítáme matice A^2, A^3, A^4 a dále zjistíme jejich nulity: $\operatorname{nul}(A) = 2$, $\operatorname{nul}(A^2) = 3$, $\operatorname{nul}(A^3) = \operatorname{nul}(A^4) = 4$. Odtud $\eta(A) = (2, 1, 1)$ a charakteristiky $\lambda(A)$ a $\eta(A)$ se nerovnají.

V mysli tak zcela přirozeně vyvstává otázka, za jakých podmínek obě charakteristiky splývají, resp. jaký je mezi nimi vztah. Tyto dotazy si položil již Hans Schneider ve své disertaci z roku 1952.[252] Odpovědi byly nalezeny Schneiderem a Hershkowitzem zhruba po třiceti sedmi letech, publikovány byly především v článcích *Height bases, level bases, and the equality of the height and the level characteristics of an M-matrix*, *A majorization relation between the height and the level characteristics* a *Combinatorial bases, derived Jordan sets and the equality of the height and level characteristic of an M-matrix.*

Před vyslovením věty charakterizující situace, v nichž platí $\lambda(A) = \eta(A)$, je nutné definovat ještě několik pojmů.

[252] Viz též Schneiderův článek [Sc4] z roku 1986, Question 6.8 a Question 6.7, str. 176.

17 Definice. Nechť $\eta(A) = (\eta_1, \ldots, \eta_t)$ je výšková charakteristika čtvercové matice A. Dimenze $\operatorname{GKer} A$ se tedy rovná součtu $\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_t$. Bázi prostoru $\operatorname{GKer} A$ nazveme *výškovou bází* $\operatorname{GKer} A$, jestliže počet jejích prvků výše j je η_j, $j = 1, 2, \ldots, t$.[253]

Pro každou komplexní matici A výšková báze $\operatorname{GKer} A$ existuje, neboť Jordanova báze $\operatorname{GKer} A$ je bází výškovou. Obrácená věta neplatí.[254]

Výškovou bází je i část Weyrovy normální soustavy zavedené Eduardem Weyrem v 19. století – uvažujeme pouze vektory příslušné vlastnímu číslu 0.

18 Definice. Nechť A je čtvercová matice řádu n ve Frobeniově normálním tvaru a nechť v je vektor v $\operatorname{GKer} A$, který je rozdělen na p částí $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ po stejně velkém počtu složek jako jsou řády bloků $A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{pp}$ na diagonále ve Frobeniově normálním tvaru. *Úrovní vektoru* v, kterou budeme značit *úroveň*(v), nazýváme maximum z úrovní všech singulárních vrcholů příslušného grafu $R(A)$, které odpovídají nenulovým vektorům v_i, $i = 1, 2, \ldots, p$.[255] Úroveň nulového vektoru je 0.

19 Definice. Nechť $\lambda(A) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ je úrovňová charakteristika čtvercové matice A. Bázi prostoru $\operatorname{GKer} A$ nazveme *úrovňovou bází* $\operatorname{GKer} A$, jestliže počet prvků báze s úrovní j je λ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Dimenze $\operatorname{GKer} A$ se tedy rovná i $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m$.[256] Aby úrovňová báze existovala, musí se tato dimenze rovnat počtu singulárních vrcholů grafu $R(A)$, což nastane v případě, že 0 je jednoduchým vlastním číslem každé diagonální matice Frobeniova normálního tvaru. Dle Perronovy-Frobeniovy teorie je pro M-matice tento požadavek splněn. Z tzv. *Nonnegative Basis Theorem*[257] a *Preferred Basis Theorem*[258] plyne, že pro M-matice existuje úrovňová báze $\operatorname{GKer} A$, jejíž vektory mají nezáporné složky.[259]

20 Definice. Báze, která je současně výškovou i úrovňovou, se nazývá *výškově-úrovňová* (*height-level basis*).

---

[253] Pojem výšková báze, resp. dále uvedený pojem úrovňová báze byl Schneiderem a Hershkowitzem zaveden roku 1989 v [HS3], Definition 3.1, str. 154, resp. Definition 4.23, str. 158.

[254] Postup konstrukce výškové báze prostoru $\operatorname{GKer} A$ z jakékoliv jeho jiné báze je popsán v [HS3], Corollary 5.2, str. 161. Metoda získání Jordanovy báze z báze výškové je uvedena také v [HS3], Algorithm 6.8, str. 163.

Pro nezápornou čtvercovou matici A bylo navíc dokázáno, že v případě existence nezáporné výškové báze $\operatorname{GKer} A$ existuje i nezáporná Jordanova báze $\operatorname{GKer} A$. Viz [HS3], Proposition 6.9, str. 163.

[255] Pro vektor $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ se množina $\{i \in \{1, 2, \ldots, n\}\,;\ v_i \neq 0\}$ někdy nazývá *nosič* v (*support of* v). Viz např. [HS7], str. 6, a [Tm3], str. 382.

[256] Tedy $\dim \operatorname{GKer} A = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_t = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m$. Rovnost $\sum_{i=1}^{t} \eta_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$ však triviálně plyne i z Ferrersova diagramu, v němž $\dim \operatorname{GKer} A$ odpovídá počtu teček.

[257] Viz [Ro1], Theorem 3.1, str. 284–285, část (1).

[258] Viz [RS1], Theorem 6.2, str. 229.

[259] Pro obecné matice platí toto tvrzení o existenci úrovňové báze:

Nechť A je blokově diagonální matice se čtvercovými bloky na diagonále a nechť nula je jednoduchým vlastním číslem singulárních bloků na diagonále. Potom existuje úrovňová báze $\operatorname{GKer} A$.

Je dokázáno, že pro M-matici A výškově-úrovňová báze $\operatorname{GKer} A$ vždy existuje.[260]

21 Definice. Vektor $v \in \operatorname{GKer} A$, pro který *výše*$(v) =$ *úroveň*(v), se nazývá *vrcholový vektor* (*peak vector*), báze vektorového prostoru $\operatorname{GKer} A$ tvořená vrcholovými vektory se nazývá *vrcholová báze* (*peak basis*).

22 Definice. Nechť A je čtvercová matice řádu n, násobnost vlastního čísla 0 této matice je m a $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ je báze $\operatorname{GKer} A$. *Bázovou maticí příslušnou matici* A budeme rozumět matici B typu $n \times m$, jejíž sloupce jsou vektory $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Existuje jediná matice C řádu m, která splňuje rovnici $AB = BC$. Tuto matici budeme nazývat *indukovanou k matici A pro danou bázi $\mathcal{B}$* a v případě nutnosti ji budeme přesněji značit $C(A, \mathcal{B})$.

V textu *Height bases, level bases, and the equality of the height and the level characteristics of an M-matrix* je indukovaným maticím věnován celý paragraf popisující jejich vlastnosti především pro různé speciální typy bází $\mathcal{B}$. Je-li např. $\mathcal{B}$ Jordanova báze $\operatorname{GKer} A$ a $m = n$, je matice $C(A, \mathcal{B})$ Jordanův kanonický tvar matice A. Z dalších vlastností uvedeme alespoň dvě, a to takové, které mají blízký vztah k Weyrově charakteristice příslušné vlastnímu číslu 0, resp. k obecnějším spektrálním vlastnostem matice A: nulity matic A^j a C^j, $j = 1, 2, \ldots, t$, kde t je počet prvků výškové charakteristiky, se sobě rovnají, a platí tedy rovněž $\eta(A) = \eta(C)$. Jsou-li $\mathcal{B}$ a $\mathcal{W}$ dvě různé báze prostoru $\operatorname{GKer} A$, potom jsou matice $C(A,\mathcal{B})$ a $C(A,\mathcal{W})$ podobné.[261]

Sestrojme dělení indukované matice C, které bude použito v následující větě. Nechť $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ je úrovňová charakteristika M-matice A a nechť $\mathcal{B}$ je úrovňová báze $\operatorname{GKer} A$. Matici C rozdělme na blokovou matici o $p \times p$ blocích, kde i-tý diagonální blok je čtvercová matice řádu λ_{p+1-i}. Frobeniův normální tvar výsledné matice (s poněkud neobvyklým indexováním)[262] vypadá takto:

$$C = \begin{pmatrix} O & O & \cdots & \cdots & O \\ C_{p-1,\,p} & O & \cdots & \cdots & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & O & \vdots \\ C_{1\,p} & \cdots & \cdots & C_{1\,2} & O \end{pmatrix}$$

23 Definice. O matici A typu $k \times l$, kde $l \le k$, říkáme, že má *plnou sloupcovou hodnost* (*full column rank*), jestliže je její hodnost rovna l.

[260] Viz [HS3], Corollary 5.6, str. 161.
[261] Ostatní vlastnosti viz [HS3], paragraf *7. Induced matrices*, str. 165–167. Indukovaná matice je v [RS1] nazývána *S-maticí*.
[262] Podržíme indexování z článku [RS1], str. 215, [HS3], Observation 7.6, str. 166, nebo také [BCT1], str. 5.

Uveďme nyní podmínky, při nichž má M-matice stejnou výškovou a úrovňovou charakteristiku.[263] Nebudou to však zdaleka všechny ekvivalentní podmínky. Článek *Height bases, level bases, and the equality of the height and the level characteristics of an M-matrix* uvádí celkem třináct navzájem ekvivalentních podmínek, práce *Combinatorial bases, derived Jordan sets and the equality of the height and level characteristic of an M-matrix* přidává dalších dvacet tři podmínek, a tak se v ní dokazuje ekvivalence celkem třiceti šesti podmínek. Pokud bychom je zde chtěli všechny vypsat, bylo by nutné definovat další pojmy (např. *combinatorial basis*, *T-combinatorial subset*, *fundament of a vector*, *anchored chain*, *preferred basis*, *Jordan basis derived from a given set of vectors* atd.).

24 Věta. *Nechť A je M-matice. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) $\eta(A) = \lambda(A)$,

(ii) *pro všechny vektory $x \in \operatorname{GKer} A$ platí výše(v) = úroveň(v),*[264]

(iii) *každá výšková báze $\operatorname{GKer} A$ je bází úrovňovou,*

(iv) *každá úrovňová báze $\operatorname{GKer} A$ je bází výškovou,*

(v) *každá báze $\operatorname{GKer} A$ je bází vrcholovou,*

(vi) *některá výšková báze $\operatorname{GKer} A$ je bází vrcholovou,*

(vii) *existuje nezáporná výšková báze $\operatorname{GKer} A$,*

(viii) *existuje nezáporná výškově-úrovňová báze $\operatorname{GKer} A$,*

(ix) *existuje nezáporná Jordanova báze $\operatorname{GKer}(-A)$,*

(x) *existuje úrovňová báze $\mathcal{B}$ prostoru $\operatorname{GKer} A$ a příslušná indukovaná matice $C = C(A, \mathcal{B})$ taková, že blokové matice $C_{k,\,k+1}$, $k = 1, 2, \ldots, p-1$, mají plnou sloupcovou hodnost,*

(xi) *pro každou úrovňovou bázi $\mathcal{B}$ prostoru $\operatorname{GKer} A$ a příslušnou indukovanou matici $C = C(A, \mathcal{B})$ mají blokové matice $C_{k,\,k+1}$, $k = 1, 2, \ldots, p-1$, plnou sloupcovou hodnost.*

Ukažme nyní platnost uvedených jedenácti podmínek na jedné z matic, u které jsme již ověřili rovnost $\eta(A) = \lambda(A)$. Vraťme se k M-matici

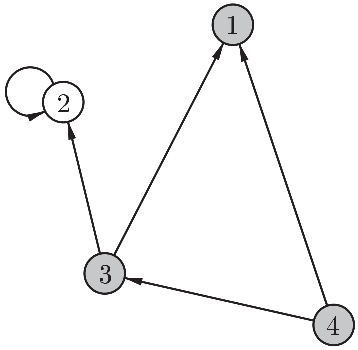
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ -b & -c & 0 & 0 \\ -d & 0 & -e & 0 \end{pmatrix},$$

kde a, b, c, d, e jsou libovolná kladná čísla. Připomeňme, že 0 je trojnásobným vlastním číslem, kterému přísluší jediná Jordanova buňka a jediný (až na nenulový násobek) vlastní vektor $u = (0, 0, 0, 1)$.

[263] Viz [RS1], Theorem 6.5, str. 231, [HS3], Theorem 8.1, str. 167–168, [HS4], Theorem 6.6, str. 36–37.

[264] Tj. každý vektor v $\operatorname{GKer} A$ je vrcholový.

Redukovaným grafem $R(A)$ matice A je Graf 3:



Také jsme již ověřili, že $\eta(A) = \lambda(A) = (1, 1, 1)$ a že dimenze $\mathrm{GKer}\, A$ je tři.

Pro přirozené číslo $p \geq 3$ se nulity matic A^p a A^{p+1} rovnají a matice A^p má tvar

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^p & 0 & 0 \\ 0 & -a^{p-1}c & 0 & 0 \\ 0 & a^{p-2}ce & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

proto bázi $\mathrm{GKer}\, A$ tvoří například vektory $u = (0, 0, 0, 1)$, $v = (0, 0, 1, 0)$, $w = (1, 0, 0, 0)$. Protože $Au^T = o^T$, je výše vektoru u rovna 1. Výpočtem zjistíme, že $Av^T \neq o^T$, $A^2v^T = o^T$, proto je výše vektoru v rovna 2. Výše zbývajícího vektoru w je 3, neboť $Aw^T \neq o^T$, $A^2w^T \neq o^T$ a $A^3w^T = o^T$. Počet prvků báze, které mají výši 1, 2, resp. 3, je vždy roven jedné, proto je báze $\{u, v, w\}$ bází výškovou, která je současně nezáporná. Zjistili jsme, že je splněna podmínka (vii).

Úroveň vektoru u je rovna úrovni vrcholu 4, proto je rovna 1. Úroveň vektoru v se shoduje s úrovní vrcholu 3, která je 2, a konečně úroveň vektoru w je rovna úrovni vrcholu 1, která je 3. Počet prvků báze, které mají úroveň 1, 2, resp. 3, je vždy jedna, proto je tato báze bází úrovňovou, a tedy i nezápornou výškově-úrovňovou a je splněna podmínka (viii).

Protože výše všech tří vektorů u, v, w výškové báze je rovna jejich úrovni, jedná se současně i o bázi vrcholovou a je splněna i podmínka (vi).

Každý vektor x patřící $\mathrm{GKer}\, A$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci prvků báze, proto má tvar $x = (k, 0, l, m)$. Abychom určili jeho výšku, zjistíme součiny mocnin matice A a transponovaného vektoru x^T k vektoru x:

$$\begin{aligned} Ax^T &= (0, 0, -kb, -kd - el)^T, \\ A^2x^T &= (0, 0, 0, kbe)^T, \\ A^3x^T &= (0, 0, 0, 0)^T. \end{aligned}$$

Výše vektoru proto závisí na nulovosti či nenulovosti souřadnic k, l, m vektoru x. Je-li

$k = l = m = 0$,		je výše vektoru 0,
$k = l = 0$, $m \neq 0$	(případ zahrnující vektor u),	je výše vektoru 1,
$k = 0$, $l \neq 0$	(případ zahrnující vektor v),	je výše vektoru 2,
$k \neq 0$	(případ zahrnující vektor w),	je výše vektoru 3.

Určeme dále úroveň vektoru x. Je-li

$k = l = m = 0$,		je úroveň vektoru 0,
$k = l = 0$, $m \neq 0$	(případ zahrnující vektor u),	je úroveň vektoru 1,
$k = 0$, $l \neq 0$	(případ zahrnující vektor v),	je úroveň vektoru 2,
$k \neq 0$	(případ zahrnující vektor w),	je úroveň vektoru 3.

Tím jsme dokázali platnost podmínky (ii). Jelikož prvky báze GKer A leží v GKer A, platí triviálně i podmínka (v). Z podmínky (i) vyplývá rovněž platnost podmínek (iii) a (iv).

Nalezneme nezápornou Jordanovu bázi GKer $(-A)$, kde

$$-A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ d & 0 & e & 0 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom matice $-A$ je $\lambda^3(\lambda + a)$, tedy 0 je jejím trojnásobným vlastním číslem. Přísluší mu (až na nenulový násobek) jediný vlastní vektor $u = (0, 0, 0, 1)$, proto také jediná Jordanova buňka a „jediný“ Jordanův řetízek. K nezápornému vektoru u budeme hledat nezáporné vektory $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4)$ a $\bar{\bar{u}} = (\bar{\bar{u}}_1, \bar{\bar{u}}_2, \bar{\bar{u}}_3, \bar{\bar{u}}_4)$ pomocí vztahů

$$-A\bar{u}^T = u, \qquad -A\bar{\bar{u}}^T = \bar{u}^T.$$

Rovnost $-A\bar{u}^T = u^T$ splňuje vektor, pro jehož souřadnice platí:

$$\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 0, \qquad \bar{u}_3 = \frac{1}{e}$$

a $\bar{u}_4$ je libovolné. Pokud by bylo $\bar{u}_4 = 0$, potom při dalším výpočtu zjistíme, že neexistuje žádný nezáporný vektor $\bar{\bar{u}}$, který by splňoval rovnost $-A\bar{\bar{u}}^T = \bar{u}^T$, proto je $\bar{u}_4$ libovolné kladné číslo.[265] Ze vztahu $-A\bar{\bar{u}}^T = \bar{u}^T$ vypočteme, že

$$\bar{\bar{u}}_1 = \frac{1}{be}, \qquad \bar{\bar{u}}_2 = 0, \qquad \bar{\bar{u}}_3 = \frac{be\bar{u}_4 - d}{be^2},$$

[265] Pokud bychom volili $\bar{u} = \left(0, 0, \frac{1}{e}, 0\right)$, bude řešením soustavy rovnic $-A\bar{\bar{u}}^T = \bar{u}^T$ vektor $\bar{\bar{u}} = \left(\frac{1}{be}, 0, -\frac{d}{be^2}, \bar{\bar{u}}_4\right)$, který nemůže být nezáporným.

$\bar{\bar{u}}_4$ je libovolné – kvůli nezápornosti báze však nezáporné. Zvolíme-li $\bar{u}_4 = \frac{2d}{be}$, je $\bar{\bar{u}}_3 = \frac{d}{be^2}$. Zbývá zvolit $\bar{\bar{u}}_4$, nechť například $\bar{\bar{u}}_4 = 0$. Vektory

$$\bar{\bar{u}} = \left(\frac{1}{be}, 0, \frac{d}{be^2}, 0\right), \qquad \bar{u} = \left(0, 0, \frac{1}{e}, \frac{2d}{be}\right), \qquad u = (0, 0, 0, 1)$$

Jordanova řetízku tvoří nezápornou Jordanovu bázi $\mathrm{GKer}\,(-A)$. Platí tedy i podmínka (ix).

Nalezená báze $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$ prostoru $\mathrm{GKer}\,A$ je bází úrovňovou. Zjistíme, zda splňuje požadavky podmínky (x). Z rovnice $AB = BC$, kde sloupce matice B jsou tvořeny vektory báze $\mathcal{B}$, nalezneme čtvercovou matici C řádu tři: ze vztahu

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ -b & -c & 0 & 0 \\ -d & 0 & -e & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \\ c_7 & c_8 & c_9 \end{pmatrix},$$

resp. z jeho upraveného tvaru

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b \\ 0 & -e & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_7 & c_8 & c_9 \\ 0 & 0 & 0 \\ c_4 & c_5 & c_6 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

zjistíme, že $c_1 = c_4 = c_5 = c_7 = c_8 = c_9 = 0$, $c_2 = -e$, $c_3 = -d$, $c_6 = -b$, a proto

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -e & -d \\ 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pomocí simultánních permutací řádků a sloupců získáme Frobeniův normální tvar

$$\begin{pmatrix} O & O & O \\ C_{23} & O & O \\ C_{13} & C_{12} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 \\ -d & -e & 0 \end{pmatrix},$$

v němž matice $C_{k,\,k+1}$, $k = 1, 2$, tj. matice pod bloky na diagonále, mají plnou sloupcovou hodnost. M-matice A proto splňuje podmínku (x).

Pro ověření platnosti podmínky (xi) sestavme co nejobecnější tvar úrovňové báze. Potřebujeme tři vektory, z nichž jeden má úroveň 1 (která se proto musí rovnat úrovni vrcholu 4), druhý má úroveň 2 (která se musí rovnat úrovni vrcholu 3) a třetí má úroveň 3 (která se musí rovnat úrovni vrcholu 1). Takovéto podmínky splňuje trojice vektorů

$$(0, p, 0, q), \quad (0, r, s, t), \quad (u, v, w, z),$$

kde $q \neq 0$, $s \neq 0, u \neq 0$ a p, r, t, v, w, z jsou prozatím libovolná čísla. Jelikož však všechny tři vektory patří $\mathrm{GKer}\,A$, musí být lineární kombinací vektorů báze $\{(0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0)\}$. Proto nutně $p = r = v = 0$, a tím získáme přesnější podobu vektorů úrovňové báze:

$$(0,\, 0,\, 0,\, q), \quad (0,\, 0,\, s,\, t), \quad (u,\, 0,\, w,\, z).$$

Tyto tři vektory jsou při dodržení podmínek kladených na jejich souřadnice jistě lineárně nezávislé, a proto tvoří (úrovňovou) bázi GKer A. Vektory umístíme do sloupců matice B a ze vztahu $AB = BC$ vypočítáme matici C:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ -b & -c & 0 & 0 \\ -d & 0 & -e & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & w \\ q & t & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & w \\ q & t & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \\ c_7 & c_8 & c_9 \end{pmatrix}.$$

Z rovnosti matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -bu \\ 0 & -es & -du - ew \end{pmatrix}$$

na levé straně rovnosti a matice

$$\begin{pmatrix} uc_7 & uc_8 & uc_9 \\ 0 & 0 & 0 \\ sc_4 + wc_7 & sc_5 + wc_8 & sc_6 + wc_9 \\ qc_1 + tc_4 + zc_7 & qc_2 + tc_5 + zc_8 & qc_3 + tc_6 + zc_9 \end{pmatrix}.$$

na pravé straně rovnosti vypočítáme neznámé

$$c_1 = c_4 = c_5 = c_7 = c_8 = c_9 = 0,$$
$$c_6 = -\frac{bu}{s},\ c_2 = -\frac{se}{q},\ c_3 = \frac{tbu - s(du + we)}{qs}.$$

Proto matice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{se}{q} & \frac{tbu-s(du+we)}{qs} \\ 0 & 0 & -\frac{bu}{s} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a její Frobeniův normální tvar je

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{bu}{s} & 0 & 0 \\ \frac{tbu-s(du+we)}{qs} & -\frac{se}{q} & 0 \end{pmatrix},$$

v němž matice pod bloky na diagonále mají plnou sloupcovou hodnost, neboť b, e, q, s, u jsou nenulová čísla. Matice A proto splňuje i podmínku poslední, podmínku (xi).

I v případě, že jsou výšková a úrovňová charakteristika odlišné, lze mezi nimi nalézt určitý vztah. Definujme nejprve nový pojem:

25 Definice. Nechť $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t)$ jsou dvě posloupnosti nezáporných celých čísel, které mají stejný počet prvků. Říkáme, že *posloupnost β majorizuje posloupnost α*, jestliže

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_k \leq \beta_1 + \ldots + \beta_k$$

pro všechna $k = 1, \ldots, t-1$ a

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_t = \beta_1 + \ldots + \beta_t.$$

Tuto skutečnost značíme $\alpha \preceq \beta$. Jestliže však platí

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k \leq \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_k$$

pro všechna $k = 1, 2, \ldots, t$, potom říkáme, že *posloupnost β silně majorizuje posloupnost α*, a píšeme $\alpha \ll \beta$.

Je-li počet členů posloupnosti β menší než počet členů posloupnosti α a doplníme-li na konec posloupnosti β potřebný počet nul tak, aby byly počty prvků obou posloupností stejné, budeme výslednou posloupnost značit $(\beta, 0)$.[266]

Nechť α je posloupnost kladných prvků. Symbolem $\hat{\alpha}$ budeme značit posloupnost vzniklou z posloupnosti α přemístěním jejích prvků do nerostoucí posloupnosti.

Nyní můžeme popsat obecný vztah mezi výškovou a úrovňovou charakteristikou M-matice. Důkaz tvrzení je založen na skutečnosti, že pro M-matici A existuje, jak již bylo řečeno, nezáporná úrovňová báze GKer A a pro nezáporný vektor v náležící GKer A platí *výše*(v) = *úroveň*(v).[267]

26 Věta. *Pro každou M-matici A platí $\lambda(A) \preceq \eta(A)$.*[268]

Ve výše uvedeném příkladu (před Definicí 17), v němž $\lambda(A) = (1, 1, 2)$ a $\eta(A) = (2, 1, 1)$, prvky posloupností splňují vztahy

$$1 \leq 2, \quad 1+1 \leq 2+1, \quad 1+1+2 = 2+1+1,$$

tj. $\lambda(A) \preceq \eta(A)$.

---

[266] V některých textech se při definici (silné) majorizace jedné posloupnosti druhou uvažují i posloupnosti s různým počtem prvků, z nichž jedna je uvedeným způsobem rozšířena nulami. Viz např. články [He3], Definition 2.3, str. 5, [NM1], str. 256, [AHK1], Notation 2.16, str. 141.

V knize Ingrama Olkina (nar. 1924) a Alberta W. Marshalla *Inequalities: Theory of Majorization and its Applications* [MO1], str. 7, je definice majorizace také mírně odlišná, na obě posloupnosti α, β je kladen požadavek, aby byly nerostoucí. V článku [AHK1], Notation 2.16, str. 141, je tento požadavek kladen pouze na majorizující řadu.

[267] Viz [HS3], Corollary 4.11, str. 157.

Pro případ *výše*(v) = *úroveň*$(v) = 1$ byla věta dokázána již v článku *A note on M-matrix equations* [Cs1], který roku 1963 publikoval David Hilding Carlson, další z doktorandů Hanse Schneidera.

Obecněji pro každý vektor $v \in$ GKer A je *výše*$(v) \leq$ *úroveň*(v). Viz [HS3], Corollary 4.17, str. 158.

[268] Viz [RS1], Corollary 4.5, str. 222, nebo [HS3], Corollary 4.21, str. 158.

Dle teorie majorizace pro každé dvě nerostoucí posloupnosti nezáporných celých čísel α, β platí, že $\alpha \preceq \beta$ implikuje $\beta^* \preceq \alpha^*$.[269] Triviálním důsledkem posledního tvrzení je tak relace $\eta(A)^* = \xi(A) \preceq \hat{\lambda}(A)^*$. Z prvních členů těchto duálních posloupností dále vyplývá, že největší řád Jordanovy buňky příslušné k vlastnímu číslu 0 matice A je menší nebo roven počtu úrovní v redukovaném grafu $R(A)$.

Tzv. *Index Theorem* vyslovený pro *M-matice* však dokonce tvrdí, že největší řád Jordanovy buňky příslušné k vlastnímu číslu 0 matice A a počet úrovní v $R(A)$ se rovnají. Odtud elegantně vyplývají dvě výše uvedená tvrzení o speciálních případech M-matic, v nichž $\eta(A) = \lambda(A)$, dokázaná Schneiderem již v padesátých letech.

Jméno věty odkazuje na skutečnost, že největší řád Jordanovy buňky příslušné k vlastnímu číslu 0 matice A je roven počtu prvků výškové charakteristiky $\eta(A)$ matice A, tj. indexu matice A. Tvrzení je též nazýváno *Rothblum's Index Theorem*, neboť bylo pro M-matice poprvé dokázáno Urielem Georgem Rothblumem v článku *Algebraic eigenspaces of non-negative matrices* z roku 1975, který je v uvažovaných pracích Schneidera, Hershkowitze a dalších matematiků často citován.[270]

Vraťme se k relaci majorizace mezi úrovňovou a výškovou charakteristikou. Uvedený vztah lze zpřesnit, neboť platí i v případě, že libovolně permutujeme pořadí prvků posloupnosti $\lambda(A)$. Navíc relace zůstane zachována, rozšíříme-li třídu uvažovaných matic na obecnější případ. Následující větu publikoval Hershkowitz roku 1989 v článku *A majorization relation between the height and the level characteristics*, jehož název říká o náplni mnohé.[271]

27 Věta. *Nechť A je blokově trojúhelníková matice se čtvercovými bloky na diagonále, z nichž ty singulární mají* 0 *jako jednoduché vlastní číslo. Potom*

$$\hat{\lambda}(A) \preceq \eta(A).$$

---

[269] Viz [MO1], 1979, str. 174.

[270] Viz [Ro1], Theorem 3.1, část (2), str. 284–285. Viz též [Sc4], Corollary 7.5, str. 177.

Upozorněme, že název *Index Theorem* se používá i pro větu vyslovenou pro jiný typ matic než jsou M-matice, kde platí pouze již zmíněná neostrá nerovnost, a dokonce i pro vyjádření vztahu mezi indexem matice a zcela jiným pojmem než je počet úrovní. Viz např. Theorem 5.9 (The Index Theorem) v [HS4], str. 18.

[271] Viz [He1], Theorem 3.5, str. 100.

Důkaz tvrzení je založen na větě, která popisuje vztah mezi nulitami mocnin matice A a nulitami mocnin jejích diagonálních bloků, tj. vztah mezi výškovou charakteristikou matice A a výškovými charakteristikami jejích diagonálních bloků, a která byla formulována Shmuelem Friedlandem a Danielem Hershkowitzem v článku *The rank of powers of matrices in a block triangular form* (str. 18):

Nechť A je blokově trojúhelníková matice, která má p čtvercových diagonálních bloků $A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{pp}$, a nechť t je přirozené číslo. Vrcholům $1, 2, \ldots, p$ redukovaného grafu $R(A)$ přiřadíme nezáporná celá čísla $k_1, k_2, \ldots, k_p$ tak, aby součet „káček" podél jednotlivých cest v grafu $R(A)$ nepřevyšoval číslo t. Potom platí

$$n(A^t) \geq \sum_{i=1}^{q} n(A_{ii}^{k_i}).$$

Dokázaný vztah majorizace mezi oběma charakteristikami dal v algebraické komunitě zabývající se touto problematikou nové podněty pro studium: Je-li dána výšková charakteristika, jak vypadají všechny možné úrovňové charakteristiky, které s ní mohou být (přes nějakou M-matici) spjaty? Tj. dané výškové charakteritice odpovídá třída navzájem podobných matic, které však nemusí mít stejné úrovňové charakteristiky. A naopak, jaké jsou všechny možné výškové charakteristiky M-matice dané úrovňové charakteristiky?[272] Tyto otázky byly zodpovězeny na počátku devadesátých let v článku Schneidera a Hershkowitze *On the existence of matrices with prescribed height and level characteristics* (1991), na který, jak již bylo řečeno, navázaly dva články zobecňující tuto problematiku, které sepsal Hershkowitz a jeho studenti Nader Agha a Nataly Kogan. Než odpovíme na obě otázky, je nutné definovat nové pojmy z teorie grafů:

28 Definice. *Acyklickým grafem* rozumíme graf bez cyklů, tj. bez posloupností vrcholů $(u_1, u_2, \ldots, u_m, u_1)$, ve kterých první a poslední vrchol splývají, ostatní vrcholy jsou navzájem různé a v grafu existují hrany (u_1, u_2), (u_2, u_3), …, (u_m, u_1). Smyčky acyklický graf obsahovat může.

Uvědomme si, že redukovaný graf $R(A)$ matice ve Frobeniově normálním tvaru (obecněji každé blokově trojúhelníkové matice) je acyklický.

29 Definice. *Tranzitivním grafem* nazýváme graf, který s každou dvojicí hran určenými vrcholy u_i, u_j a u_j, u_k obsahuje i hranu určenou vrcholy u_i, u_k.[273]

Nyní nám nic nebrání zformulovat slíbená tvrzení, a to nejprve pro striktně trojúhelníkové matice[274] a poté pro matice, jejichž všechny singulární vrcholy jsou jednoduché, tj. pro třídu matic, která zahrnuje jak striktně trojúhelníkové matice, tak M-matice.[275]

30 Věta. *Nechť $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$ a $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p)$ jsou dvě posloupnosti přirozených čísel (se stejným počtem prvků) a nechť η je posloupností nerostoucí. Jestliže $\hat{\lambda} \preceq \eta$, potom existuje takový acyklický graf G bez smyček, že pro každou matici A nad libovolným komutativním tělesem (tj. polem), pro kterou $G(A) = G$, je $\lambda(A) = \lambda$ a $\eta(A) = \eta$. Graf G může být navíc vybrán tak, aby byl tranzitivní.*

31 Věta. *Nechť $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)$ a $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p)$ jsou dvě posloupnosti přirozených čísel a nechť η je posloupností nerostoucí. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:*

[272] Otázky vyslovil pro M-matice (bez znalosti pojmu majorizace) Hans Schneider již v roce 1986. Viz [Sc4], Question 8.8 a Question 8.9, str. 184.
[273] První vrchol je vždy vrcholem, z něhož hrana vychází, a druhý vrchol je vrcholem, do něhož hrana směřuje.
[274] Trojúhelníkovou matici nazveme striktně trojúhelníkovou, má-li na hlavní diagonále nuly.
[275] Viz [HS5], Theorem 3.3, str. 110, a [HS5], Theorem 4.1, str. 113.

(i) *$p = q$ a zároveň $\hat{\lambda} \preceq \eta$,*

(ii) *$p = q$ a zároveň existuje takový tranzitivní acyklický graf G bez smyček, že pro každou matici A nad libovolným polem, pro kterou $G(A) = G$, platí $\lambda(A) = \lambda$ a $\eta(A) = \eta$,*

(iii) *$p = q$ a zároveň existuje takový acyklický graf G bez smyček, že pro každou matici A nad libovolným polem, pro kterou $G(A) = G$, platí $\lambda(A) = \lambda$ a $\eta(A) = \eta$,*

(iv) *$p = q$ a zároveň existuje striktně (dolní) trojúhelníková matice A, pro kterou platí $\lambda(A) = \lambda$ a $\eta(A) = \eta$,*

(v) *existuje striktně (dolní) nezáporná trojúhelníková matice A, pro kterou platí $\lambda(A) = \lambda$ a $\eta(A) = \eta$,*

(vi) *existuje M-matice A, pro kterou platí $\lambda(A) = \lambda$ a $\eta(A) = \eta$,*

(vii) *$p = q$ a zároveň existuje matice A, jejíž redukovaný graf má všechny singulární vrcholy jednoduché a pro kterou platí $\lambda(A) = \lambda$ a $\eta(A) = \eta$.*

Důkaz věty je snadný. Implikace (i) $\Rightarrow$ (ii) plyne z předchozího tvrzení, sled implikací (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (vii) je triviální, stejně jako implikace (iii) $\Rightarrow$ (v). Podmínka (vi) vyplývá z podmínky (v), ve které postačí vzít matici opačnou k matici A. Jelikož M-matice má všechny singulární vrcholy jednoduché, je podmínka (vii) důsledkem podmínky (vi). Konečně implikace (vii) $\Rightarrow$ (i) plyne z Věty 27.

Dosud jsme se zabývali případem, kdy posloupnosti λ a η měly stejný počet členů. V závěru článku *On the existence of matrices with prescribed height and level characteristics* se autoři krátce zabývali případem, v němž může být počet prvků posloupnosti η menší než posloupnosti λ a zformulovali následující tvrzení:[276]

32 Věta. *Pro matici, jejíž redukovaný graf má všechny singulární vrcholy jednoduché, platí nerovnost*

$$\hat{\lambda}(A) \preceq (\eta(A), 0).$$

Motivováni tímto výsledkem vznesli novou otázku,[277] zda pro posloupnosti $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)$ a $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p)$ přirozených čísel, kde η je nerostoucí, $p \leq q$ a $\hat{\lambda} \preceq (\eta, 0)$, existuje matice A, pro kterou

$$\lambda(A) = \lambda \quad \text{a} \quad \eta(A) = \eta.$$

Odpověď je kladná, tvrzení je dokázáno ve zmíněném pojednání Aghy a Hershkowitze *The relation between the height and level characteristics for a matrix with simple singular vertices*:[278]

---

[276] Viz [HS5], Theorem 4.10, str. 116.
[277] Viz [HS5], Question 4.11, str. 116.
[278] Viz [AH1], Corollary 3.5, str. 118.

33 Věta. *Nechť* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)$ *a* $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p)$ *jsou dvě posloupnosti přirozených čísel, kde* η *je nerostoucí a* $p \leq q$*. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) *existuje matice* A*, jejíž redukovaný graf má všechny singulární vrcholy jednoduché a která splňuje vztahy* $\lambda(A) = \lambda$ *a* $\eta(A) = \eta$*,*

(ii) $\hat{\lambda} \preceq (\eta, 0)$ *(nebo* $\hat{\lambda} \preceq \eta$*, jestliže* $p = q$*).*

Autorský kolektiv Agha, Hershkowitz a Kogan výsledek zobecnil pro případ, kdy nemusí být všechny singulární vrcholy redukovaného grafu matice A jednoduché, v práci *A solution to an inverse height and level characteristics problem* z roku 1992:[279]

34 Věta. *Nechť* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)$ *a* $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p)$ *jsou dvě posloupnosti přirozených čísel, kde* η *je nerostoucí a* $p \leq q$*. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) *existuje matice* A*, která splňuje vztahy* $\lambda(A) = \lambda$ *a* $\eta(A) = \eta$*,*

(ii) $\hat{\lambda} \ll (\eta, 0)$ *(nebo* $\hat{\lambda} \ll \eta$*, jestliže* $p = q$*).*

Matice, jejichž graf je acyklický, lze simultánními permutacemi řádků a sloupců převést na dolní (nebo horní) trojúhelníkové matice (v případě acyklického grafu bez smyček na striktně dolní (nebo striktně horní) trojúhelníkové matice). Takovéto matice se nazývají *téměř trojúhelníkové* (*essentially triangular*). Naše další pozornost bude věnována vztahům mezi výškovou charakteristikou a posloupnostmi definovanými řečí teorie grafů právě pro tyto matice. Partii, která byla z velké části věnována M-maticím, uzavřeme ještě odpovědí na otázku, zda pro daný graf každá posloupnost, která majorizuje příslušnou úrovňovou charakteristiku, může být výškovou charakteristikou nějaké M-matice A, pro kterou by $G(A) = G$ nebo $R(A) = G$. Odpověď je v obou případech negativní.

Vztah mezi výškovou charakteristikou a vlastnostmi příslušného grafu pro trojúhelníkové matice, podtřídu téměř trojúhelníkových matic, byl pro nilpotentní případ studován Michaelem Ezrou Saksem v disertační práci *Duality Properties of Finite Set Systems* z roku 1980 a o rok později Emdenem R. Gansnerem v článku *Acyclic digraphs, Young tableaux and nilpotent matrices.* Částečné výsledky pro případ ne nutně nilpotentních trojúhelníkových matic publikoval Richard A. Brualdi v pracích *Combinatorial verification of the elementary divisors of tensor products* (1985) a *Combinatorially determined elementary divisors* (1987), kompletní řešení pro trojúhelníkové matice pak bylo představeno opět autorskou dvojicí Hans Schneider a Daniel Hershkowitz v textu *Path coverings of graphs and height characteristics of matrices* z roku 1993. Řada výsledků posledně jmenovaného článku byla odvozena pomocí tzv. pokrytí grafu cestami.

[279] Viz [AHK1], Theorem 3.9, str. 143.

35 Definice. *Pokrytím $\mathcal{P}$ grafu G cestami* (*path covering of G*) budeme rozumět takovou množinu cest grafu G, které jsou *disjunktní*, tj. žádné dvě z nich nemají společný vrchol, a každý vrchol grafu G náleží právě jedné z těchto cest.

Pokrývání grafu cestami se stalo v devadesátých letech vyhledávanou oblastí studia, je náplní například takřka třicetistránkové práce *Paths in directed graphs and spectral properties of matrices* publikované Hershkowitzem v roce 1994. V jejím abstraktu na úvodní stránce je napsáno:

Several papers have been devoted to the relationship between the structure of the Jordan blocks associated with the eigenvalue 0 *of a matrix and the digraph of the matrix. This problem appears to be strongly linked to a graph theoretic study of paths in digraphs.* ([He5], str. 309)

Některé výsledky studia Weyrovy charakteristiky příslušné vlastnímu číslu 0 využívající pokrytí grafu byly vysloveny již před polovinou devadesátých let pro trojúhelníkové matice. Platí však i pro téměř trojúhelníkové matice, proto zde budou vysloveny právě pro tuto obecnější třídu matic.

Pro acyklický graf G, který může obsahovat smyčky, budeme definovat novou posloupnost přirozených čísel.

36 Definice. Symbol $p_k(G)$, $k = 1, 2, \ldots$, nechť značí maximální počet vrcholů bez smyček, které mohou být obsaženy v k (či méně) vrcholově disjunktních cestách grafu G. Tato množina vrcholů se nazývá *k-cesta* (*k-path*). Položme ještě $p_0(G) = 0$.[280] Dále nechť t je nejmenší počet vrcholově disjunktních cest grafu G, které jsou nutné k pokrytí všech vrcholů grafu G, které nemají smyčky. Evidentně je $p_{k-1}(G) < p_k(G)$, pro $1 < k \le t$, a $p_{k-1}(G) = p_k(G)$ pro $k > t$. Pro $k = 1, 2 \ldots, t$ tedy lze definovat přirozená čísla

$$\pi_k(G) = p_k(G) - p_{k-1}(G).$$

Symbolem $\pi(G)$ budeme značit posloupnost[281]

$$(\pi_1(G), \pi_2(G), \ldots, \pi_t(G)).$$

Mezi duální posloupností k právě zavedené posloupnosti $\pi(G)$ a výškovou charakteristikou η existuje pro třídu téměř trojúhelníkových matic vztah majorizace:[282]

[280] V práci [He5] je termín *k-path* definován (navíc pouze pro tranzitivní acyklický graf) jako sjednocení zmíněných disjunktních cest. Viz Definition 4.13, str. 318.

[281] V článku [He5] je tato posloupnost pojmenována *path characteristic*, což je však zcela výjimečné.

[282] Viz [HS6], Theorem 4.8, str. 180.

Tvrzení pro trojúhelníkové matice bez smyček bylo dokázáno již roku 1981 v článku *Acyclic digraphs, Young tableaux and nilpotent matrices* E. R. Gansnera, částečné výsledky pro obecné trojúhelníkové matice byly představeny v pracích *Combinatorial verification of the elementary divisors of tensor products* a *Combinatorially determined elementary divisors*, které roku 1985 a 1987 publikoval R. A. Brualdi.

37 Věta. *Pro téměř trojúhelníkovou matici A platí vztah*

$$\pi(G(A))^* \preceq \eta(A).$$

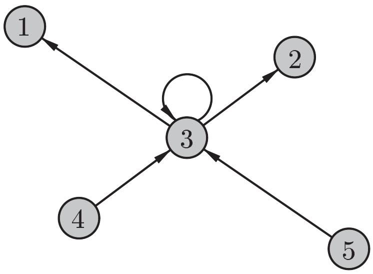
Věta byla publikována roku 1993 v pojednání *Path coverings of graphs and height characteristics of matrices* aniž by byl uveden termín výšková charakteristika, neboť byla formulována pro příslušné duální posloupnosti (matice A byla navíc pouze trojúhelníková). Pro téměř trojúhelníkové matice tedy platí relace $\xi(A) \preceq \pi(G(A))$, jejímž triviálním důsledkem je skutečnost, že řád největší Jordanovy buňky příslušné vlastnímu číslu 0 je menší nebo roven maximálnímu počtu vrcholů bez smyček, které mohou být pokryty jednou cestou v grafu G.

Upozorněme výslovně, že majorizace $\pi(G(A))^* \preceq \eta(A)$ obecně neplatí pro blokově trojúhelníkové matice, které nejsou trojúhelníkové a jejichž diagonální blokové matice jsou čtvercové – graf $G(A)$ bychom nahradili redukovaným grafem $R(A)$. A to dokonce i v případě, ve kterém by všechny singulární vrcholy byly jednoduché.

Demonstrujme tuto skutečnost opět na konkrétním příkladu. Uvažujme například matici

$$A = \left(\begin{array}{r|r|rr|r|r}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
-1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0
\end{array}\right),$$

jejíž redukovaný graf $R(A)$ vypadá takto:



Graf 5

Jednou cestou pokryjeme maximálně dva vrcholy bez smyček, tj. $p_1(R(A)) = 2$, dvěma vrcholově disjunktními cestami tři vrcholy bez smyček, tj. $p_2(R(A)) = 3$, a konečně třemi vrcholově disjunktními cestami všechny čtyři vrcholy bez smyček, tj. $p_3(R(A)) = 4$. Odtud dostáváme $\pi(R(A)) = (2, 1, 1)$ a z Ferrersova diagramu určíme, že $\pi(R(A))^* = (3, 1)$. Výpočtem zjistíme, že výšková charakteristika matice A je $\eta(A) = (2, 2, 1)$, a ta evidentně posloupnost $\pi(R(A))^*$ nemajorizuje.

Dosud jsme nalezli dvě posloupnosti, které majorizuje výšková charakteristika $\eta(A)$. Jednak charakteristiku $\hat{\lambda}(A)$, je-li A blokově trojúhelníková matice se čtvercovými bloky na diagonále, jejíž graf má jednoduché singulární vrcholy (viz Věta 27), jednak posloupnost $\pi(G(A))^*$, je-li matice A téměř trojúhelníková (viz Věta 37).

Uvědomíme-li si, že Frobeniův normální tvar téměř trojúhelníkové matice je matice trojúhelníková, která je speciálním případem blokově trojúhelníkové matice se čtvercovými bloky (řádu 1) na diagonále a s odpovídajícím grafem, jehož singulární vrcholy jsou jednoduché, napadne nás přirozeně otázka, zda lze (alespoň) pro tuto třídu matic nalézt vztah majorizace mezi posloupnostmi $\hat{\lambda}(A)$ a $\pi(G(A))^*$. Prozraďme již nyní, že vztah majorizace mezi nimi skutečně platí. Dokonce mezi ně můžeme vsunout posloupnost další, která jednu z nich majorizuje a zároveň je majorizována posloupností druhou. Definujme nyní tuto novou posloupnost.

38 Definice. Nechť G je acyklický graf (který může mít smyčky). Množina Ω_k vrcholů grafu G, které nemají smyčky, se nazývá *k-systém* (*k-family*), jestliže žádná její $(k+1)$-prvková podmnožina neleží na stejné cestě. Symbol $d_k(G)$ nechť značí maximum z počtů prvků všech k-systémů a nechť $d_0(G) = 0$.[283] Nechť t značí největší počet vrcholů bez smyček grafu G ležících na téže cestě. Zřejmě $d_{k-1}(G) < d_k(G)$, pro $1 < k \leq t$, a $d_{k-1}(G) = d_k(G)$ pro $k > t$. Pro $k = 1, 2 \ldots, t$ označme

$$\delta_k(G) = d_k(G) - d_{k-1}(G).$$

Symbolem $\delta(G)$ budeme značit posloupnost přirozených čísel

$$(\delta_1(G), \delta_2(G), \ldots, \delta_t(G)).$$

Vztah této posloupnosti k posloupnosti $\pi(G)^*$ vyjadřuje následující věta, která byla dokázaná opět v článku *Path coverings of graphs and height characteristics of matrices.*[284]

[283] Jelikož pro budovanou teorii mají význam pouze k-systémy s maximálním počtem prvků, budou symbolem Ω_k značeny vždy k-systémy splňující tuto extrémní vlastnost.

Pro $k = 1$, tj. pro 1-*family*, používali autoři rovněž termín *antichain*. Prvky takovéto množiny, tj. množinu vrcholů grafu G, z nichž žádné dva neleží na téže cestě, nazývali *independent elements*. Viz např. [He5], Definition 3.2, str. 314.

Uvědomme si, že každou částečně uspořádanou množinu lze reprezentovat acyklickým tranzitivním grafem. Největší ze všech k-systémů daného grafu byl v pracích psaných právě řečí uspořádaných množin rovněž označován *spernerovský k-systém* (*Sperner k-family*). Viz např. práce [GK1] a [Ge1]. Příjmení obsažené v termínu odkazuje na výsledky matematika Emanuela Spernera (1905–1980) publikované v roce 1928 v práci *Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge* [Sr1].

[284] Viz [HS6], Proposition 3.8, str. 177.

Pro případ tranzitivního acyklického grafu platí $\delta(G) = \pi(G)^*$. Viz výsledky publikované

39 Věta. *Pro každý acyklický graf G, který může obsahovat smyčky, platí relace*

$$\delta(G) \preceq \pi(G)^*.$$

Pozici majoranty posloupnost δ naopak zaujímá v následující větě, jejíž tvrzení je snadno představitelné. Stačí uvážit, že žádné dva vrcholy bez smyček mající stejnou úroveň neleží na téže cestě grafu $G(A)$.

40 Věta. *Každá téměř trojúhelníková matice A splňuje relaci*

$$\hat{\lambda}(A) \preceq \delta(G(A)).$$

Triviálním důsledkem dvou právě vyslovených tvrzení je hledaný vztah mezi posloupnostmi $\hat{\lambda}(A)$ a $\pi(G(A))^*$.

41 Věta. *Pro každou téměř trojúhelníkovou matici A je*

$$\hat{\lambda}(A) \preceq \pi(G(A))^*.$$

K tomu, abychom mohli tvrdit, že posloupnost $\pi(G(A))^*$ se „více blíží“ výškové charakteristice $\eta(A)$ matice A než posloupnost $\hat{\lambda}(A)$, stačí dokázat, že obecně buď $\hat{\lambda}(A) \neq \delta(G(A))$ nebo $\delta(G(A)) \neq \pi(G(A))^*$. Existenci takové matice A doložíme konkrétním příkladem, pro který dokonce platí nerovnosti obě. Než tak učiníme, shrňme výsledky týkající se majorizace posloupností příslušných k téměř trojúhelníkovým maticím do přehledné řady pěti navzájem se majorizujících posloupností, na jejímž konci stojí přibližně sto třicet let známá Weyrova charakteristika příslušná vlastnímu číslu nula, zatímco všichni její předchůdci v této řadě jsou historicky jejími následovníky, a to přibližně o sto let mladšími.

42 Věta. *Každá téměř trojúhelníková matice A splňuje vztahy*

$$\lambda(A) \preceq \hat{\lambda}(A) \preceq \delta(G(A)) \preceq \pi(G(A))^* \preceq \eta(A).$$

Vzpomeňme ještě na třídu M-matic, konkrétně na dva speciální případy, v nichž $\lambda(A) = \eta(A)$. Právě uvedená řada majorizací, v nichž pouze graf $G(A)$ nahradíme redukovaným grafem $R(A)$, zůstává v platnosti, tj. platí

$$\lambda(A) = \hat{\lambda}(A) = \delta(R(A)) = \pi(R(A))^* = \eta(A).$$

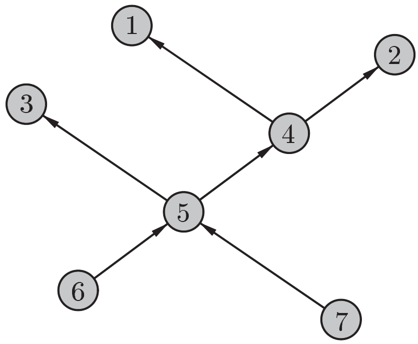
---

roku 1976 C. Greenem v práci *Some partitions associated with a partially ordered set* [Ge1]. Případ netranzitivního acyklického grafu, který neobsahuje smyčky, byl studován v disertační práci M. E. Sakse *Duality properties of finite set systems* z roku 1980 a také v o rok mladší publikaci *Acyclic digraphs, Young tableaux and nilpotent matrices* [Gs1] E. R. Gansnera.

Vraťme se ke slíbenému příkladu, v němž pro téměř trojúhelníkovou maticí A platí $\hat{\lambda}(A) \neq \delta(G(A))$ a $\delta(G(A)) \neq \pi(G(A))^*$. Nechť[285]

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde a, b, c, d, e, f jsou nenulová čísla. Graf $G(A)$ matice A je na následujícím obrázku:



Graf 6

Hledejme postupně posloupnosti příslušné matici A, resp. grafu $G(A)$. Úrovňová charakteristika $\lambda(A) = (2, 1, 2, 2)$, tudíž $\hat{\lambda}(A) = (2, 2, 2, 1)$.

Vrcholy $\{1, 2, 3\}$ bez smyček tvoří 1-systém Ω_1, který neobsahuje dva vrcholy bez smyček ležící na téže cestě a má z množin této vlastnosti největší počet prvků. Ten se rovná třem, tj. $d_1(G) = 3$. Množinou splňující podmínky, že žádná trojice jejích vrcholů bez smyček neleží na téže cestě a je co největší, je množina $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 6, 7\}$, proto $d_2(G) = 5$. Postupně získáme maximální 3-systém $\Omega_3 = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$ (nebo také $\Omega_3 = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$) a maximální 4-systém $\Omega_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Odtud $d_3(G) = 6$ a $d_4(G) = 7$. Dostáváme posloupnost $\delta(G(A)) = (3, 2, 1, 1)$.[286]

Pouhým pohledem na graf $G(A)$ zjistíme, že $p_1(G(A)) = 4$, $p_2(G(A)) = 5$, $p_3(G(A)) = 6$ a $p_4(G(A)) = 7$. Dostáváme nejprve $\pi(G(A)) = (4, 1, 1, 1)$ a z Ferrersova diagramu dále $\pi(G(A))^* = (4, 1, 1, 1)$.

Vidíme, že nulita matice A je 4. Snadno vypočteme, že s každou vyšší mocninou matice A se její nulita zvýší o jednu, přičemž se tento postup zastaví

[285] Zadání příkladu je převzato z [He6], Example 5.8, str. 185.

[286] Upozorněme raději, že koeficienty $\delta_k(G)$ se nemusí rovnat počtu vrcholů přidaných do maximálního $(k-1)$-systému, aby vznikl maximální k-systém. Například pro graf

u matice A^4. Proto má $\eta(A)$ čtyři prvky a $\eta(A) = (4, 1, 1, 1)$. Pro úplnost poznamenejme, že $\xi(A) = \eta(A)^* = (4, 1, 1, 1)$.

V našem konkrétním příkladu má tedy ona řada pěti posloupností tvar

$$(2, 1, 2, 2) \preceq (2, 2, 2, 1) \preceq (3, 2, 1, 1) \preceq (4, 1, 1, 1) \preceq (4, 1, 1, 1),$$

přičemž s výjimkou posledního vztahu se jedná o relace, které nejsou rovnostmi. Vzhledem ke skutečnosti, že v tomto příkladu je počet singulárních vrcholů grafu $G(A)$ roven dimenzi $\mathrm{GKer}\, A$, mají krajní charakteristiky $\lambda(A)$ a $\eta(A)$, tudíž i posloupnosti mezi ně vložené, stejný součet prvků, a to 7.

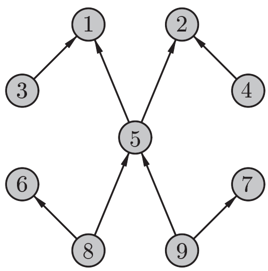
Podotkněme pro zajímavost, že v našem příkladu je tento součet navíc roven řádu matice, která je tudíž nilpotentní. Poznamenejme, že matice A je nilpotentní, právě když součet prvků její výškové charakteristiky $\eta(A)$ (tj. také počet teček příslušného Ferrersova diagramu) je roven jejímu řádu.

43 Definice. Nechť $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_u\}$ je pokrytí acyklického grafu G cestami, dále nechť $|P_i|$ značí délku cesty P_i a k je přirozené číslo. Symbolem $|\mathcal{P}|_k$ budeme značit číslo $\sum_{i=1}^{u} \min\{|P_i|, k\}$, které nazveme *$k$-normou pokrytí $\mathcal{P}$* (*k-norm for a path covering $\mathcal{P}$*).

Tak jako lze dualitu dvou posloupností vhodně vizualizovat pomocí Ferrersova diagramu, lze i k-normu ilustrovat schématem, které nám usnadní představu v našich dalších postupech. Uvažujme například pokrytí $\mathcal{P}$ grafu G, které je utvořeno pomocí šesti cest, jejichž délky (co se počtu pokrytých vrcholů týče) jsou 4, 3, 3, 2, 1, 1. Nakresleme diagram o šesti sloupcích, z nichž každý obsahuje tolik hvězdiček, kolik je délka příslušné cesty. Dokresleme nad každý řádek hvězdiček linku:

*					
*	*	*			
*	*	*	*		
*	*	*	*	*	*

Potom k-norma $|P|_k$ pokrytí $\mathcal{P}$ je rovna počtu hvězdiček pod k-tou linkou,



je maximální 1-systém $\Omega_1 = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ a maximální 2-systém $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$. Maximální 2-systém tedy nevznikl přidáváním vrcholů do maximálního 1-systému.

počítáme-li linky odspodu. V našem případě tedy $|\mathcal{P}|_1 = 6$, $|\mathcal{P}|_2 = 10$, $|\mathcal{P}|_3 = 13$ a $|\mathcal{P}|_4 = 14$.

Minimální z k-norem pokrytí grafu G přes všechna pokrytí $\mathcal{P}$ označme $f_k(G)$. Bez uvedeného schématu bychom museli při určování $f_k(G)$ uvažovat všechna možná pokrytí grafu G, pro každé z nich hledat k-normu a ze všech k-norem hledat tu nejmenší. Uvážíme-li výše uvedený diagram, stačí si uvědomit, že hvězdiček pod první, druhou, třetí atd. linkou odspodu bude tím méně, čím méně bude jednak sloupců diagramu (tj. cest tvořících pokrytí) a také čím delší cesty se nám postupně podaří sestrojit z vrcholů dosud nepokrytých předchozími cestami. Čtrnáct hvězdiček v námi uvedeném diagramu reprezentujících čtrnáct vrcholů grafu G je tedy vhodnější při hledání čísel $f_k(G)$ seskupit, umožňuje-li to konkrétní graf, do méně než šesti sloupců odpovídající šesti cestám. Předpokládejme, že pokrytí $\mathcal{P}$ grafu G je tvořeno pouhými dvěma cestami P_1, P_2, které pokrývají po řadě osm a šest vrcholů. Předpokládejme dále, že existuje jiné pokrytí $\mathcal{P}'$ tohoto grafu dvěma cestami P_1', P_2', pro něž $|P_1'| = 10$, $|P_2'| = 4$, přičemž 10 je délka nejdelší možné cesty grafu G. Po srovnání obou, resp. všech tří diagramů je zřejmé, že koeficienty $f_k(G)$ budeme určovat pomocí diagramu příslušného pokrytí $\mathcal{P}'$ obsahujícího sloupec odpovídající cestě, která pokrývá deset vrcholů.

```
                                                   ------
                                   ------            *
                                     *             ------
                                   ------            *
                                     *             ------
-------------------                ------            *
 *                                   *  *          ------
-------------------                ------            *
 *  *  *                             *  *          ------
-------------------                ------            *
 *  *  *  *                          *  *          ------
-------------------                ------            *
 *  *  *  *  *  *                    *  *          ------
                                   ------            *  *
                                     *  *          ------
                                   ------            *  *
                                     *  *          ------
                                                     *  *
                                                   ------
                                                     *  *
```

Z posledního diagramu si též uvědomíme, že k-normu pokrytí grafu je smysluplné hledat pouze pro $k \leq u$, kde u je maximální počet vrcholů grafu G pokrytých jedinou cestou (maximální délka cesty grafu G).

Studujme nyní grafové posloupnosti a jejich souvislosti s výškovou charakteristikou pro tranzitivní acyklický graf. Připomeňme raději, že acyklickému grafu přísluší téměř trojúhelníková matice, a platí pro něj tedy všechny věty představené v předchozí části.

Pro tranzitivní acyklický graf G je 1-norma pokrytí $\mathcal{P}$ rovna počtu cest v $\mathcal{P}$. Proto $f_1(G)$ je rovno minimálnímu počtu disjunktních cest potřebných k pokrytí všech vrcholů grafu G.

O tomto nejmenším počtu cest v tranzitivním acyklickém grafu „mluví“ teorém, který dokázal již roku 1950 v práci *A decomposition theorem for partially ordered sets* [Di1] americký matematik Robert Palmer Dilworth (1914–1993). Dnes jej nazýváme *Dilworthovou větou.*[287]

[287] Viz [Di1], Theorem 1.1, str. 161.

44 Věta. *Minimální počet cest potřebných k pokrytí všech vrcholů tranzitivního acyklického grafu G je roven maximálnímu počtu prvků 1-systému grafu G.*

Triviálním důsledkem Dilworthovy věty je následující tvrzení.

45 Věta. *Pro tranzitivní acyklický graf G platí $f_1(G) = d_1(G)$.*

Publikace Curtise Greeneho, Dilworthova doktoranda, a Daniela J. Kleitmana (nar. 1934), Saksova školitele, *The structure of Sperner k-families* [GK1] z roku 1976 však obsahuje mnohem obecnější výsledek.[288]

46 Věta. *Pro tranzitivní acyklický graf G platí pro každé $k \geq 1$ rovnost $f_k(G) = d_k(G)$.*

Pro graf G definujme

$$\varphi_k(G) = f_k(G) - f_{k-1}(G), \quad k = 1, 2, \ldots, u,$$

kde u je délka nejdelší cesty grafu G a $f_0(G) = 0$. Dále definujme posloupnost přirozených čísel

$$\varphi(G) = (\varphi_1(G), \varphi_2(G), \ldots).$$

Představíme-li si příslušný diagram s hvězdičkami a linkami, snadno nahlédneme, že posloupnost $\varphi(G)$ je nerostoucí[289] a koeficienty $\varphi_k(G)$ jsou rovny počtu hvězdiček v k-tém řádku (počítáno odspodu).

Poslední tvrzení lze tedy jednoduše formulovat pomocí dvou posloupností, a to takto:

47 Věta. *Pro tranzitivní acyklický graf G platí $\varphi(G) = \delta(G)$.*

Jeden z autorů výsledku týkajícího se rovnosti posloupností $\varphi(G)$ a $\delta(G)$, konkrétně Curtis Greene, předložil roku 1976 v článku *Some partitions associated with a partially ordered set* [Ge1] podrobnější větu:[290]

48 Věta. *Pro tranzitivní acyklický graf G platí $\varphi(G) = \delta(G) = \pi(G)^*$.*

Uvědomme si tedy, že v mnoha dříve uvedených vztazích, v nichž výšková charakteristika majorizovala posloupnost $\delta(G)$ či $\pi(G)^*$, jsme pro případ matice, jejíž graf G je acyklický a tranzitivní, mohli tyto posloupnosti nahradit posloupností $\varphi(G)$.

Práce je psána řečí částečně uspořádaných množin. Dilworth pracoval s částečně uspořádanou množinou P a minimálním počtem uspořádaných množin, jejichž sjednocení je množina P.

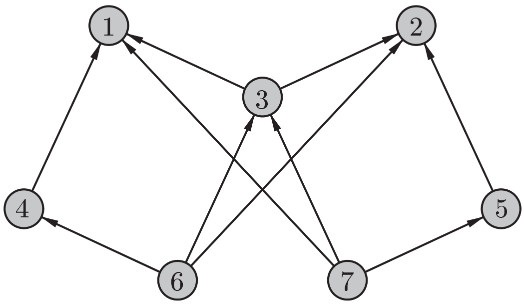
[288] Viz [GK1], Theorem 3.11, str. 60.

Pokrytí tranzitivního acyklického grafu, pro které platí rovnosti $f_k(G) = d_k(G)$, $k \geq 1$, je např. v článcích [GK1] a [Ge1] nazýváno *k-nasycené* (*k-saturated*).

[289] Exaktní důkaz viz [HS6], Proposition 3.4, str. 177.

[290] Jedná se o práci, která vyšla nejen ve stejném roce jako článek [GK1], ale dokonce v témže čísle časopisu Journal of Combinatorial Theory.

Podotkněme, že článek *Paths in directed graphs and spectral properties of matrices*, v němž čtenář nalezne mnohem podrobnější informace k problematice pokrývání tranzitivního acyklického grafu cestami, několikrát zmiňuje i určenost výškové charakteristiky matice jí příslušnou *nulovou vzorovou maticí.* Této otázce se budeme krátce věnovat později. Nyní ukažme právě vyslovené výsledky pro konkrétní tranzitivní acyklický graf G, který má tento tvar:



Graf 7

Protože počet prvků 1-systému grafu G s největším počtem prvků je tři ($\Omega_1 = \{3,\ 4,\ 5\}$), je $d_1(G) = 3$ a graf lze pokrýt třemi cestami. Možností, jak pokrytí sestrojit, existuje více. Najdeme takové, které bude určovat čísla $f_k(G)$. Sestrojme cestu P_1 o co možná největší délce. Tato délka je tři a $P_1 = (6,\ 4,\ 1)$ (lze uvažovat i jiné cesty délky tři, např. $(7,\ 3,\ 2)$ atd.). Vrcholy nenáležející cestě P_1 pokryjme opět co nejdelší cestou – i tentokrát bude počet pokrytých vrcholů tři. Z více možností nechť například $P_2 = (7,\ 3,\ 2)$ a konečně $P_3 = (5)$. Dostáváme tedy $|P_1| = 3$, $|P_2| = 3$, $|P_3| = 1$ a pomocí diagramu

$$\begin{array}{lll}
\hline
* & * & \\
\hline
* & * & \\
\hline
* & * & *
\end{array}$$

určíme, že $\varphi(G) = (3,\ 2,\ 2)$.

Najděme posloupnost $\delta(G)$. Jednotlivé k-systémy grafu G, které mají nejvíce prvků, jsou $\Omega_1 = \{3,\ 4,\ 5\}$, $\Omega_2 = \{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ (nebo $\Omega_2 = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$) a $\Omega_3 = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$, odtud

$$d_1(G) = 3, \quad d_2(G) = 5, \quad d_3(G) = 7$$

a $\delta(G) = (3,\ 2,\ 2)$.

Určíme posloupnost $\pi(G)^*$. Pro koeficienty $p_k(G)$ příslušné k-cestám platí

$$p_1(G) = |P_1|\,, \quad p_2(G) = |P_1| + |P_2| \quad \text{a} \quad p_3(G) = |P_1| + |P_2| + |P_3|\,.$$

Není je však nezbytné určovat, neboť hledané rozdíly $\pi_k(G) = p_k(G) - p_{k-1}(G)$ jsou rovny přímo počtům prvků $|P_k|$, proto $\pi(G) = (3, 3, 1)$. Pomocí Ferrersova diagramu dostáváme $\pi(G)^* = (3, 2, 2)$. Skutečně tedy platí

$$\varphi(G) = \delta(G) = \pi(G)^*.$$

Ke grafu G sestrojme matici A, pro kterou $G = G(A)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & f & g & 0 & 0 & 0 \\ h & 0 & j & 0 & k & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde a, b, c, d, e, f, g, h, j, k jsou libovolná nenulová čísla. Matice A je téměř trojúhelníková, musí tedy splňovat vztahy (Věta 42)

$$\lambda(A) \preceq \hat{\lambda}(A) \preceq \delta(G(A)) \preceq \pi(G(A))^* \preceq \eta(A).$$

Nalezneme ještě úrovňovou charakteristiku $\lambda(A)$ (a poté $\hat{\lambda}(A)$) a výškovou charakteristiku $\eta(A)$. Stupně vrcholů 1 a 2 jsou rovny třem, stupně vrcholů 3, 4 a 5 jsou rovny dvěma a stupně vrcholů 6 a 7 jsou jedna, proto $\lambda(A) = (2, 3, 2)$ a odtud $\hat{\lambda}(A) = (3, 2, 2)$.

Pro nulity matic A, A^2, A^3 po řadě platí $\operatorname{nul} A = 3$, $\operatorname{nul} A^2 = 5$, $\operatorname{nul} A^3 = 7$, proto $\eta(A) = (3, 2, 2)$. V našem příkladu tedy dostáváme několik posloupností, které se rovnají Weyrově charakteristice příslušné vlastnímu číslu 0, konkrétněji

$$\lambda(A) \preceq \hat{\lambda}(A) = \delta(G(A)) = \pi(G(A))^* = \eta(A).$$

Ohlédneme-li se zpět, vyslovili jsme dosud vztahy majorizace mezi nějakou posloupností a výškovou charakteristikou pro M-matice (vztah $\lambda(A) \preceq \eta(A)$, Věta 26), blokově trojúhelníkové matice se čtvercovými bloky na diagonále, jejichž singulární vrcholy grafu $R(A)$ jsou jednoduché (vztah $\hat{\lambda}(A) \preceq \eta(A)$, Věta 27), a téměř trojúhelníkové matice (vztah $\pi(G(A))^* \preceq \eta(A)$, Věta 37). Všechny jmenované třídy obsahují matice, pro které je 0 jednoduchým vlastním číslem jejich singulárních bloků na diagonále. Vždy se tedy jednalo o matice, které splňovaly podmínku rovnosti součtu prvků úrovňové a výškové charakteristiky. Naopak pro blokově trojúhelníkové matice se čtvercovými bloky na diagonále, z nichž alespoň jeden je singulární maticí s vícenásobným vlastním číslem 0, je počet singulárních vrcholů grafu $R(A)$ menší než je násobnost vlastního čísla 0 matice A (a tedy i dimenze $\operatorname{GKer} A$). V těchto případech je součet prvků úrovňové charakteristiky $\lambda(A)$ menší než součet prvků výškové charakteristiky $\eta(A)$ a vztah „obyčejné“ majorizace mezi těmito posloupnostmi není definován.

Z tohoto důvodu nejprve nalezneme pro obecnou blokově trojúhelníkovou matici se čtvercovými – ne nutně ireducibilními – bloky na diagonále jinou posloupnost, která úrovňovou charakteristiku $\lambda(A)$, resp. $\hat{\lambda}(A)$ ve dvou ze tří jmenovaných vztazích nahradí. Bude se jednat o posloupnost nám již známou, bude však příslušná zcela nově definovaným grafům matice A, které poprvé představil Hershkowitz v roce 1992 v článku *The height characteristic of block triangular matrices.*[291]

Budeme se rovněž zabývat zobecněním v jiném směru, konkrétně zobecněním vztahu $\pi(G(A))^* \preceq \eta(A)$ platného pro graf téměř trojúhelníkové matice na graf obecné matice. V tomto případě nebude nutné zavádět nový graf, neboť graf $G(A)$ matice A je nám dobře známý, ale naopak budeme muset mírně pozměnit definici posloupnosti $\pi(G(A))$ a rovněž vztah majorizace nahradit silnou majorizací.

Zabývejme se nejprve prvním případem. Pro čtvercovou matici A definujme nové grafy.

49 Definice. *Jordanovým grafem* $J(A)$ matice A budeme nazývat graf Jordanova kanonického tvaru matice A.

Nechť $\xi(A) = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q)$ je Segreova charakteristika příslušná vlastnímu číslu 0 matice A. *Singulárním Jordanovým grafem* $SJ(A)$ matice A budeme rozumět graf obsahující právě q disjunktních cest délky $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q$, jejichž vrcholy neobsahují smyčky, a dále izolované vrcholy, které naopak smyčky obsahují, a jejich počet je roven rozdílu řádu matice A a násobnosti vlastního čísla 0 (neboli rozdílu řádu matice A a $\dim \mathrm{GKer}\, A$).

Jméno grafu odkazuje na skutečnost, že čísla ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, q$, jsou rovna řádům Jordanových buněk příslušných vlastnímu číslu 0 matice A.

Pomocí takto definovaných grafů sestrojme nové grafy pro blokově trojúhelníkovou matici.

Nechť A je blokově trojúhelníková matice A, jejíž všechny diagonální matice $A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{pp}$ jsou čtvercové. Sestrojme nejprve p disjunktních grafů $J(A_{11}), J(A_{22}), \ldots, J(A_{pp})$ a dále přidejme do grafu hrany vedoucí ze všech vrcholů grafu $J(A_{ii})$ do všech vrcholů grafu $J(A_{jj})$, kdykoliv $A_{ij} \neq O$, $i \neq j$. Výsledný graf budeme značit $GJ(A)$.

Sestrojme dále p disjunktních grafů $SJ(A_{11}), SJ(A_{22}), \ldots, SJ(A_{pp})$ a přidejme do grafu hrany vedoucí ze všech vrcholů grafu $SJ(A_{ii})$ do všech vrcholů grafu $SJ(A_{jj})$, kdykoliv $A_{ij} \neq O$, $i \neq j$. Takovýto graf budeme symbolicky zapisovat $GSJ(A)$.

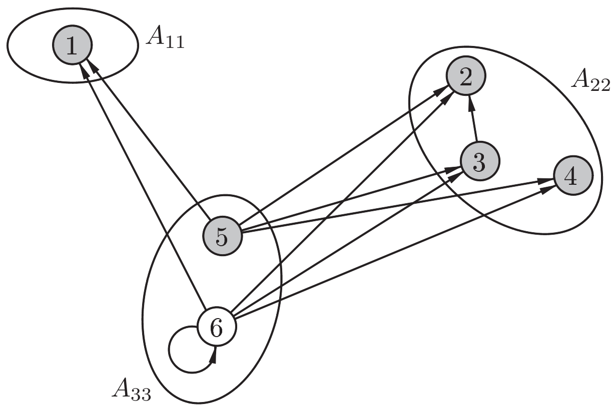
Pro správné pochopení nejsložitějšího grafu $GSJ(A)$ představíme jeho konstrukci na příkladu. Uvažujme matici

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

[291] Viz [He3], Definition 3.1 a Definition 3.2, str. 8.

Spektrální vlastnosti matice A_{11} jsou evidentní. Matice A_{22} má trojnásobné vlastní číslo 0, k němuž nalezneme dva vlastní vektory, proto řády Jordanových buněk příslušných tomuto vlastnímu číslu jsou dva a jedna. Vlastními čísly matice A_{33} jsou čísla 0 a 3, řád jediné buňky příslušné vlastnímu číslu 0 je nutně roven jedné.

Graf $GSJ(A)$ matice A je zobrazen na dalším obrázku, na němž jsou ohraničeny jednotlivé grafy $SJ(A_{ii})$ uzavřenými křivkami.



Graf 8

Následující dvě věty dokázal Daniel Hershkowitz v práci *The height characteristic of block triangular matrices* z roku 1992.[292]

50 Věta. *Pro každou blokově trojúhelníkovou matici A se čtvercovými bloky na diagonále je*

$$\pi(GJ(A)) \preceq \eta(A).$$

51 Věta. *Pro každou blokově trojúhelníkovou matici A se čtvercovými bloky na diagonále je*

$$\pi(GSJ(A))^* \preceq \eta(A).$$

O sedm let později bylo v článku *The combinatorial structure of generalized eigenspaces – from nonnegative matrices to general matrices* týmž autorem představeno tvrzení obdobného charakteru.[293]

[292] První věta viz [He3], Theorem 3.5 a Theorem 3.6, str. 9. Druhé tvrzení zobecňuje výsledek publikovaný přibližně ve stejné době v práci [HS6] pro trojúhelníkové matice. Viz [HS6], Theorem 5.11, str. 185.
[293] Viz [He6], Theorem 6.9, str. 188.

52 Věta. *Pro každou blokově trojúhelníkovou matici A se čtvercovými bloky na diagonále je*

$$\delta(GSJ(A)) \preceq \eta(A).$$

Uvědomme si, že graf $GSJ(A)$ je definován pro blokově trojúhelníkové matice, a proto neobsahuje kromě smyček jiné cykly. Můžeme tak využít již uvedený vztah $\delta(G) \preceq \pi(G)^*$ platný pro acyklické grafy s povolenou existencí smyček. Pro blokově trojúhelníkovou matici A se čtvercovými bloky na diagonále tedy platí rovněž

$$\delta(GSJ(A)) \preceq \pi(GSJ(A))^*.$$

Jelikož obecně $\delta(GSJ(A)) \neq \pi(GSJ(A))^*$, je starší výsledek ze dvou uvedených tvrzení tím silnějším, posloupnost $\pi(GSJ(A))^*$ je lepším „přiblížením se“ výškové charakteristice matice A. Celkově dostáváme:

53 Věta. *Pro každou blokově trojúhelníkovou matici A se čtvercovými bloky na diagonále je*

$$\delta(GSJ(A)) \preceq \pi(GSJ(A))^* \preceq \eta(A).$$

V našem konkrétním příkladu grafu $GSJ(A)$ je $d_1 = 3$ ($\Omega_1 = \{1, 2, 4\}$). Poté v každém kroku konstrukce posloupnosti δ přidáváme do množiny Ω_1 jeden vrchol bez smyčky až do vyčerpání všech pěti. Proto $\delta(GSJ(A)) = (3, 1, 1)$.

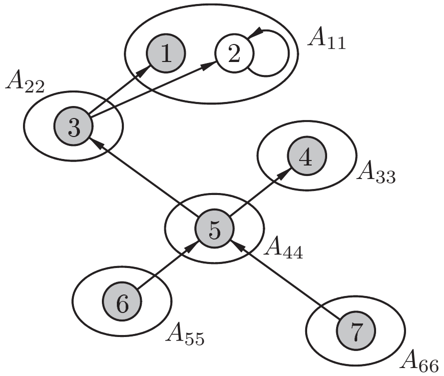
Jedinou cestou pokryjeme maximálně tři vrcholy bez smyček, s každou další vrcholově disjunktní cestou pokryjeme jeden další vrchol bez smyčky, přičemž potřebujeme takovéto cesty tři. Tedy $\pi(GSJ(A)) = (3, 1, 1)$, z čehož vyplývá $\pi(GSJ(A))^* = (3, 1, 1)$.

Nulity matic A, A^2, A^3, A^4 jsou po řadě $3, 4, 5, 5$, proto $\eta(A) = (3, 1, 1)$, a vidíme, že všechny tři charakteristiky uvedené v poslední větě mohou být stejné.

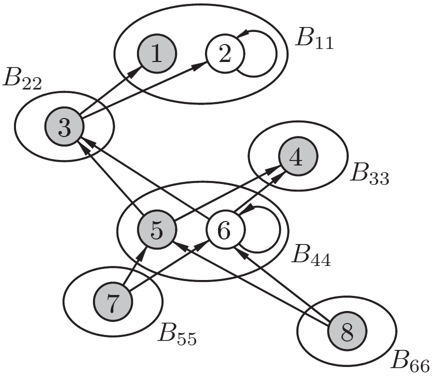
Obecně platné nerovnosti mezi posloupnostmi $\delta(GSJ(A))$ a $\pi(GSJ(A))^*$ a také posloupnostmi $\pi(GSJ(A))^*$ a $\eta(A)$ doložíme opět na příkladech. Uvažujme blokově trojúhelníkové matice

$$A = \left(\begin{array}{cc|c|c|c|c|c}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right) \quad \text{a} \quad B = \left(\begin{array}{cc|c|c|cc|c|c}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right).$$

Jim příslušné grafy $GSJ(A)$ a $GSJ(B)$ jsou si relativně podobné. Změna nastala u singulárního Jordanova grafu $SJ(A_{44})$; grafy vypadají takto:



Graf 9



Graf 10

Z grafů zjistíme, že posloupnost δ je pro obě matice stejná, a to

$$\delta(GSJ(A)) = \delta(GSJ(B)) = (2,\ 2,\ 1,\ 1).$$

V případě matice A je

$$\pi(GSJ(A)) = (4,\ 1,\ 1), \quad \text{tedy} \quad \pi(GSJ(A))^* = (3,\ 1,\ 1,\ 1).$$

Pro matici B platí $\pi(GSJ(B)) = (4,\ 2)$, neboť můžeme využít i cesty přes vrchol 6. Z Ferrersova diagramu dostáváme

$$\pi(GSJ(B))^* = (2,\ 2,\ 1,\ 1).$$

Pro nulity matic platí

$$\operatorname{nul} A = 3, \quad \operatorname{nul} A^2 = 4, \quad \operatorname{nul} A^3 = 5, \quad \operatorname{nul} A^4 = \operatorname{nul} A^5 = 6,$$

$$\operatorname{nul} B = 3, \quad \operatorname{nul} B^2 = 4, \quad \operatorname{nul} B^3 = 5, \quad \operatorname{nul} B^4 = \operatorname{nul} B^5 = 6,$$

proto $\eta(A) = \eta(B) = (3,\ 1,\ 1,\ 1)$.

V případě matice A tedy $\delta(GSJ(A)) \neq \pi(GSJ(A))^*$, matice B je příkladem matice, pro kterou $\pi(GSJ(B))^* \neq \eta(B)$.

Studujme nyní zobecnění dosud známých výsledků druhým směrem. Víme, že pro acyklické grafy, resp. téměř trojúhelníkové matice platí

$$\pi(G(A))^* \preceq \eta(A).$$

Nyní uvidíme, že pro silnou majorizaci a pozměněnou posloupnost π zůstane vztah v platnosti i pro obecné grafy, resp. obecné matice.

54 Definice. Cestu $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ grafu G nazveme *uzaviratelnou*, jestliže (i_m, i_1) je hrana grafu G. V opačném případě se cesta nazývá *neuzaviratelná.* Cesta obsahující jediný vrchol je uzaviratelná, právě když má tento vrchol smyčku.

Nechť G je graf. Symbolem $\widetilde{p}_k(G)$ označme maximální počet vrcholů grafu G, které mohou být pokryty vrcholově disjunktními cestami, přičemž mezi těmito cestami není více neuzaviratelných cest než k.

Dále nechť t je největší přirozené číslo, pro které $\widetilde{p}_t(G) > \widetilde{p}_{t-1}(G)$. Pro $k = 1, 2, \ldots, t$ definujeme

$$\widetilde{\pi}_k = \widetilde{p}_k(G) - \widetilde{p}_{k-1}(G).$$

Uvědomme si, že $\widetilde{p}_0(G)$ je největší počet vrcholů, které mohou být pokryty vrcholově disjunktními uzaviratelnými cestami.

Symbolem $\widetilde{\pi}(G)$ budeme rozumět posloupnost

$$(\widetilde{\pi}_1(G), \widetilde{\pi}_2(G), \ldots, \widetilde{\pi}_t(G)).$$

Jedná se o pouhé zobecnění posloupnosti $\pi(G)$ definované pro acyklický graf (který může obsahovat smyčky) na posloupnost příslušnou obecnému grafu. Je-li graf acyklický, posloupnosti $\pi(G)$ a $\widetilde{\pi}(G)$ splývají.

Následující vztah byl dokázán roku 1993 v práci Daniela Hershkowitze *The relation between the Jordan structure of a matrix and its graph.*[294]

55 Věta. *Každá matice splňuje vztah*

$$\widetilde{\pi}(G(A))^* \ll \eta(A).$$

Odtud mimo jiné vyplývá, že řád největší Jordanovy buňky příslušné vlastnímu číslu 0 je menší nebo roven $\widetilde{\pi}_1(G(A))$. Upozorněme, že symbol $\widetilde{\pi}_1(G(A))$ nemůže být nahrazen symbolem $\widetilde{p}_1(G(A))$, neboť $\widetilde{p}_0(G(A))$ se obecně nerovná nule, jak jsme byli v analogických situacích pro jiné posloupnosti zvyklí.

Očekávaná skutečnost, že vztah $\widetilde{\pi}(G(A))^* \ll \eta(A)$ může přejít v rovnost $\widetilde{\pi}(G(A))^* = \eta(A)$, však platí.

Rok 2000 se stal v této problematice jakýmsi mezníkem. Podstatné vztahy mezi Weyrovou charakteristikou příslušnou vlastnímu číslu 0, obecněji spektrálními vlastnostmi rozličných, avšak v teorii matic často se vyskytujících tříd matic a charakteristikami jim příslušných grafů již byly stanoveny a studium se začalo ubírat trochu jiným směrem. V pracích publikovaných v novém tisíciletí, v nichž se výšková charakteristika vyskytuje (články *The combinatorial structure of eventually nonnegative matrices* (2002), *A characterization of Jordan canonical forms which are similar to eventually nonnegative matrices*

[294] Viz [He4], Theorem 4.22, str. 67.

with the properties of nonnegative matrices (2003), *The peripheral spectrum of a nonnegative matrix* (2003), *Eventually nonnegative matrices are similar to seminonnegative matrices* (2004), *Level characteristics corresponding to peripheral eigenvalues of a nonnegative matrix* (2008) – připomeňme, že spoluautorkou, v jednom případě samostatnou autorkou všech jmenovaných textů je Judith J. McDonald, Schneiderova doktorandka, a pojednání Bit-Shun Tama *The Perron generalized eigenspace and the spectral cone of a cone-preserving map*),[295] již většinou není souvislost s charakteristikami teorie grafů převažující náplní. Ponechme nyní stranou dvě jmenované publikace B.-S. Tama, které se od ostatních odlišují, a věnujme se zbývajícím článkům.

Práce se zabývají obecněji spektrálními vlastnostmi (např. Jordanovým kanonickým tvarem, podobností) specifických tříd matic a v rámci jejich studia předkládají některé další vlastnosti související s grafy. Například dříve hojně studovaný problém majorizace se v publikacích vyskytuje pouze ojediněle. Většina z uvažovaných prací má některé navzájem spojující prvky. Věnují se již převážně obecnému vlastnímu číslu, termínem Weyrova charakteristika matice A bez dalšího zpřesnění je však stále myšlena Weyrova charakteristika příslušná vlastnímu číslu 0. Speciální pozornost často věnují souboru vlastních čísel matic, jejichž absolutní hodnota je rovna spektrálnímu poloměru této matice (tzv. *peripheral eigenvalues*).

Although some generalizations have been made with respect to other eigenvalues and general matrices (...), less can be said in the general case. The peripheral spectrum is slightly better behaved than an arbitrary eigenvalue ... ([Md1], str. 217)

Uvedené publikace zavádějí obdobnou skupinu nových pojmů a termínů a používají relativně podobnou symboliku lišící se od té, která byla používána v době nejintenzivnějšího studia, tj. na přelomu osmdesátých a devadesátých let a v první polovině devadesátých let v naprosté většině výše zmíněných publikací a kterou je psán i tento paragraf.

Demonstrujme změnu přístupu na konkrétní ukázce, v níž A je matice řádu n, symbol $\langle n \rangle$ značí množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$ a pro její uspořádaný rozklad $\kappa = (K_1, K_2, \ldots, K_k)$ je A_κ matice

$$A_\kappa = \begin{pmatrix} A_{K_1} & A_{K_1K_2} & \cdots & A_{K_1K_k} \\ A_{K_2K_1} & A_{K_2} & \cdots & A_{K_2K_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{K_kK_1} & A_{K_kK_2} & \cdots & A_{K_k} \end{pmatrix},$$

[295] Zařazení práce *Eventually nonnegative matrices are similar to seminonnegative matrices* z roku 2004 do tohoto seznamu je značně diskutabilní. Článek se na několika málo místech zmiňuje o spektrálních vlastnostech mocnin matice, výšková charakteristika však přímo zmíněna, a tedy ani studována není. O to více je překvapivé zařazení tohoto termínu mezi klíčová slova článku. Podíváme-li se na pracovní, na internetových stránkách dostupnou verzi publikace bez zpracované 4. části (je uveden pouze její nadpis), zjistíme, že výšková charakteristika je jednak v klíčových slovech a je také v práci definována. V publikované verzi potom již její definice není. Můžeme tedy usuzovat, že původně měla být věnována tomuto pojmu větší pozornost (zřejmě v oné 4. části), ale během psaní práce se záměr autorek změnil.

kde $A_{K_iK_j}$ je submatice matice A, jejíž prvky mají řádkové indexy z množiny K_i a sloupcové z K_j (A_{K_i} je zjednodušený zápis pro případ $i = j$):

Let $\Gamma = (V, E)$ *be a graph. If there is a path from a vertex* j *to a vertex* l *in* Γ*, we say that* j *has access to* l*. ... If* j *has access to* l *and* l *has access to* j*, we say* j *and* l *communicate. The communication relation is an equivalence relation, hence we may partition* V *into equivalence classes, which we will refer to as the (irreducible) classes of* Γ*.*

Given a matrix A*, it is well known that there is an ordered partition* $\kappa = (K_1, K_2, \ldots, K_k)$ *of* $\langle n \rangle$ *so that each* K_i *is a class of* $G(A)$ *and* A_κ *is block lower triangular. We say that* A_κ *is in the Frobenius normal form of* A*. A class* K_j *is said to be singular if* A_{K_j} *is singular, and nonsingular otherwise.* ([ZM1], str. 256)

Definované třídy tedy odpovídají vrcholům redukovaného grafu $R(A)$, existence cesty (přístupu) z jednoho vrcholu do druhého v rámci téže třídy zajistí v této definici Frobeniova normálního tvaru ireducibilitu jeho diagonálních čtvercových blokových matic. Uvědomme si, že matice je ireducibilní, jestliže uvažovaná relace indukuje jedinou třídu. Singulárním a regulárním vrcholům tak odpovídají singulární a regulární třídy. Je zajímavé, že úroveň „vrcholu“ je definována sice stejně, ale i pro regulární „vrchol“, a může se tedy rovnat 0.

Zdálo by se, že s vývojem lineární algebry přešli autoři ve třetím tisíciletí k modernější terminologii, symbolice i přístupu. Tato domněnka je však mylná. Naopak, navrátili se o několik desetiletí zpět, použili prostředky, které můžeme nalézt v několika mnohem starších článcích. Mezi desítkami dosud uvedených prací se totiž některé vymykají právě tím, že používají tuto „staronovou“ terminologii. Jedná se především o článek Uriela Georga Rothbluma *Algebraic eigenspaces of non-negative matrices* z roku 1975, dále například o pojednání Hanse Schneidera *The influence of the marked reduced graph of a nonnegative matrix on the Jordan form and related properties: A survey* z roku 1986 či o práci *On the singular graph and Jordan diagram of strictly lower triangular matrices and M-matrices*, kterou roku 1991 publikoval Wenchao Huang. Schneiderova a Huangova práce však místo termínu (*irreducible*) *class* používají název *strong component*. Pozorný čtenář, který čte i poznámky pod čarou, si možná vzpomene, že Rothblumova publikace je napsána natolik jiným přístupem, že v něm není výšková charakteristika vůbec uvedena.[296] Pro dokumentaci autorova stylu a návratu algebraiků k jím používané terminologii uveďme Rothblumovu verzi tvrzení o rovnosti úrovňové a výškové charakteristiky M-matice v případě, že mají jediný prvek, tj. $\eta(A) = \lambda(A) = (t)$:

COROLLARY 3.4 (...) The index of a square nonnegative matrix is one if and only if no pair of basic classes are comparable (i.e., no basic class has access to any other basic class). ([Ro1], str. 291)

[296] Je však například zaveden pojem úrovně vrcholu (třídy), ale místo termínu *level of a class* autor používal názvu *height of a class*, což bylo zcela výjimečné.

Uvedené práce se věnují především vlastnostem třídy *posléze nezáporných matic* (*eventually nonnegative matrices*)[297] a její podtřídy *polonezáporných matic* (*seminonnegative matrices*).

56 Definice. Čtvercovou matici A nazveme *posléze nezápornou*, jestliže existuje přirozené číslo m takové, že pro všechna přirozená čísla $g \geq m$ je matice A^g nezáporná. Jestliže matice A^m má pouze kladné prvky, nazveme matici A *posléze kladnou.*

Od zmíněného m tedy posléze nezáporná matice „zdědí“ všechny spektrální vlastnosti nezáporné matice, které jsme (s omezením se na spektrální poloměr) studovali pomocí M-matic. Obecně však mají posléze nezáporné matice jiné vlastnosti než ty, které zahrnuje Perronova-Frobeniova teorie platná pro nezáporné matice. Existují například ireducibilní posléze nezáporné matice, pro které je spektrální poloměr násobným vlastním číslem. A dokonce i v případě, že je vlastním číslem jednoduchým, odpovídající vlastní vektor nemusí být kladný. V článku *The combinatorial structure of eventually nonnegative matrices* jsou představeny některé spektrální vlastnosti (včetně výškové charakteristiky) a jejich souvislosti s úrovňovou charakteristikou nezáporné matice, které platí i pro posléze nezápornou matici A. Tvrzení jsou však omezena pouze na posléze nezáporné matice, které nemají vlastní číslo 0 nebo jejichž Jordanovy buňky příslušné vlastnímu číslu 0 mají řád 1. Za této podmínky se pro posléze nezáporné matice zachovává například vztah majorizace úrovňové charakteristiky Weyrovou charakteristikou příslušnou spektrálnímu poloměru.[298]

57 Věta. *Nechť A je posléze nezáporná matice, jejíž index příslušný vlastnímu číslu 0 je nanejvýš roven 1. Nechť $\eta(\varrho E - A)$ značí Weyrovu charakteristiku matice A příslušnou spektrálnímu poloměru $\varrho = \varrho(A)$ této matice a $\hat{\lambda}(\varrho E - A)$ úrovňovou charakteristiku matice A příslušnou $\varrho(A)$ a uspořádanou v nerostoucí posloupnost. Potom*

$$\hat{\lambda}(\varrho E - A) \preceq \eta(\varrho E - A).$$

K definici polonezáporných matic je nutné nejprve zavést pojem *cyklicky h-rozděleného grafu* a *h-cyklické matice.*

58 Definice. Graf nazveme *cyklicky h-rozděleným* (*cyclically h-partite*), existuje-li rozklad množiny jeho vrcholů do h neprázdných množin $V_1, V_2, \ldots, V_h$ takový, že každá hrana grafu vychází pro nějaké i z V_i a směřuje do V_{i+1}, resp. z V_h do V_1.

59 Definice. Matici A nazveme *h-cyklickou* (*h-cyclic*), jestliže $G(A)$ je cyklicky h-rozděleným grafem.

[297] Tato třída matic byla poprvé představena roku 1978 Friedlandem v práci *On an inverse problem for nonnegative and eventually nonnegative matrices* [Fd1].
[298] Viz [NM1], Corollary 4.2, str. 263.

Pro matici řádu n tedy existuje takový rozklad $\kappa = (V_1, V_2, \dots, V_h)$ množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, že

$$A_\kappa = \begin{pmatrix} O & A_{V_1V_2} & O & \cdots & O \\ O & O & A_{V_2V_3} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & A_{V_{h-1}V_h} \\ A_{V_hV_1} & O & O & \cdots & O \end{pmatrix}.$$

Nulové matice ležící na diagonále jsou jistě čtvercové.

60 Definice. Nechť A je posléze nezáporná matice ve Frobeniově normálním tvaru. Matici A nazveme *polonezápornou*, jestliže všechny její blokové matice ležící pod diagonálními blokovými maticemi jsou nezáporné a diagonální bloky jsou nejen čtvercové a ireducibilní, ale splňují rovněž podmínku cykličnosti:[299] každá bloková diagonální matice A_{ii} příslušná vrcholu i je nulová matice řádu 1, nebo existuje přirozené číslo h, že A_{ii} je h-cyklická a matici $(A_{ii})^h$ lze pomocí simultánních permutací řádků a sloupců převést na direktní součet h posléze kladných matic.

Pro polonezáporné matice bylo ukázáno, že splňují mnohé spektrální vlastnosti nezáporných matic. Zachovává se například opět vztah majorizace mezi úrovňovou a Weyrovou charakteristikou příslušnou spektrálnímu poloměru.[300]

61 Věta. *Nechť A je polonezáporná matice a $\varrho = \varrho(A)$ je její spektrální poloměr. Dále nechť $\eta(\varrho E - A)$ je Weyrova charakteristika matice A příslušná $\varrho(A)$ a $\hat\lambda(\varrho E - A)$ úrovňová charakteristika matice A příslušná $\varrho(A)$ a uspořádaná v nerostoucí posloupnost. Potom*

$$\hat\lambda(\varrho E - A) \preceq \eta(\varrho E - A).$$

Často jsou studovány vztahy mezi spektrálními vlastnostmi těchto matic a vlastnostmi diagonálních matic jejich Frobeniova normálního tvaru. Za všechny jmenujme problematiku souvislosti mezi exponentem g matice A^g a koeficientem h diagonálních h-cyklických matic. Uvedeme alespoň jednu větu, která je typickým příkladem „výskytu“ Weyrovy charakteristiky v uvažovaných článcích publikovaných po roce 2000 – Weyrova charakteristika a její souvislost s charakteristikami teorie grafů zde není hlavním problémem, prohlubují se však znalosti vztahů s ní úzce souvisejících.[301]

62 Věta. *Nechť A je polonezáporná matice, pro jejíž spektrální poloměr platí vztah $\varrho = \varrho(A) > 0$. Nechť g je přirozené číslo, pro které $A^g \geq 0$ a které je nesoudělné se všemi h, pro něž existuje diagonální bloková čtvercová h-cyklická matice A_{ii} matice A. Jestliže pro spektrální poloměr $\varrho(A_{ii})$ matice A_{ii} platí*

[299] Podmínka byla představena v [ZT1], Theorem 5.1, str. 314–315.
[300] Viz [ZM1], Corollary 3.6, str. 263.
[301] Viz [ZM1], Corollary 3.5, str. 263.

$\varrho(A_{ii}) = \varrho(A)$, potom vrchol i má v redukovaném grafu $R(\varrho E - A)$ stejnou úroveň jako v redukovaném grafu $R(\varrho^g E - A^g)$.

Tvrzení se omezuje jen na některé vrcholy. Častou náplní článků je rozdělování množiny vrcholů stejné úrovně na dvě ne nutně neprázdné množiny (*upper level set* a *lower level set*) podle kritéria, zda se spektrální poloměr diagonální čtvercové matice příslušné vrcholu rovná či nerovná spektrálnímu poloměru matice A. Rovněž toto dělení vrcholů (tříd) lze nalézt již v Rothblumově práci z roku 1975; v jeho terminologii se jedná o množiny nazvané *hlavní třída* (*basic class*) a *vedlejší třída* (*nonbasic class*), které jsou však zavedeny pouze pro nezáporné matice.[302] Ukazuje se, že některé vztahy, které neplatí pro celou matici, jsou zachovány alespoň pro jednu z množin.

Termíny *basic class* a *nonbasis class* (definované pro nezáporné matice)[303] používá práce Bit-Shun Tama *A cone-theoretic approach to the spectral theory of positive linear operators: the finite-dimensional case* z roku 2001. Na Rothbluma se autor přímo odvolal:

The concept of a class was due to Rothblum [...]. We mainly follow his terminology, but sometimes we also borrow from Schneider [...].[304]
([Tm2], online verze, str. 16)

Tamova obsáhlá publikace je prací přehledovou, přináší řadu údajů o relativně mladé historii několika odvětví lineární algebry. Z hlediska vlastností úrovňové a výškové charakteristiky příliš mnoho nových významných výsledků nepřinesla. Stala se však jakousi předzvěstí (např. používanými termíny, novými definicemi již známých pojmů atd.) Tamovy o tři roky mladší práce *The Perron generalized eigenspace and the spectral cone of a cone-preserving map*, která již důležité a ucelené závěry bádání obsahuje. Tento více než padesátistránkový článek z roku 2004 je opět psán řečí tříd, důležité pojmy (např. úrovňovou a výškovou charakteristiku) studuje pro spektrální poloměr nezáporných matic, přičemž nepoužívá ekvivalentních vyjádření pro M-matice, jak bylo zvykem v minulém století.

Z používané terminologie a přístupu je zřejmé, že se autor kromě Rothbluma značně inspiroval také Schneiderovým pojednáním *The influence of the marked reduced graph of a nonnegative matrix on the Jordan form and related properties: A survey* z roku 1986. Bit-Shun Tam například používal pro Ferrersův diagram označení diagram Jordanův. Takřka totožnou definici Jordanova grafu nalezneme ve zmíněném Schneiderově článku. Odstavce obsahující definici tohoto schématu psané Hansem Schneiderem a partie sepsané téměř o dvacet let později Bit-Shun Tamem mají i dále velmi podobné znění. V obou textech totiž po zmíněném zavedení Jordanova (Ferrersova) diagramu následuje definice Weyrovy charakteristiky matice A, která je zavedena jako posloupnost délek – co se počtu teček týče – řádků tohoto diagramu. V Tamově publikaci je na-

[302] Viz [Ro1], str. 283.
[303] Uvědomme si, že pro nezápornou matici A z jejího Frobeniova normálního tvaru plyne, že počet hlavních tříd je roven algebraické násobnosti spektrálního poloměru jakožto vlastního čísla matice A a také dimenzi $\mathrm{GKer}\,(\varrho(A)E - A)$.
[304] Vedle Rothblumovy práce [Ro1] je myšlen Schneiderův článek [Sc4].

víc na uvažovaném místě zdůrazněno, že Weyrovu charakteristiku lze definovat jako duální posloupnost k Segreově posloupnosti.[305]

Náplní práce je studium vektorového prostoru $\operatorname{GKer}(A - \varrho(A)E)$, který je definován pouze pro $A \in \mathcal{P}(K)$ (vysvětlení viz dále) a který je nazván *Perron generalized eigenspace*,[306] dále (mnohostranným) kuželům v prostoru $\mathbb{R}^n$, spektrálním kuželům či zobrazením (maticím), které kužel zachovávají. Mezi maticí a jí příslušným homomorfismem se v práci příliš nerozlišuje:

We use the terms "matrix" and "linear mapping" interchangeably.
([Tm3], str. 379)

Dva paragrafy (z celkových devíti) jsou věnovány rozšíření studia ekvivalentních podmínek rovnosti úrovňové charakteristiky, která je však zavedena novým způsobem, a Weyrovy charakteristiky nezáporné matice A (příslušné spektrálnímu poloměru $\varrho(A)$) pro tzv. kužel zachovávající zobrazení a také problematice majorizace dvou zmíněných charakteristik pro lineární zobrazení zachovávající mnohostěnný vlastní kužel. Konkrétněji publikaci představují slova z jejího abstraktu (nové pojmy, které jsou v něm obsaženy a které je nutné znát pro další výklad, budou vysvětleny v následujících odstavcích):

A unified treatment is offered to reprove known results on the following four highlights of the combinatorial spectral theory of nonnegative matrices, or to extend (or partly extend) the results to the setting of a linear map preserving a polyhedral proper (or proper) cone: the preferred-basis theorem, equivalent conditions for equality of the (graph-theoretic) level characteristic and the (spectral) height characteristic, the majorization relation between the two characteristics, and the relation between the combinatorial properties of a nonnegative matrix and the positivity of the individual entries in its principal components. This is achieved by employing the new concept of spectral cone of a cone-preserving map ... ([Tm3], str. 375)

63 Definice. *Kuželem* rozumíme neprázdnou podmnožinu K vektorového, konečně dimenzionálního prostoru V nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$, která je uzavřena na násobení vektorů z K kladnými skaláry z $\mathbb{R}$, tj. pro všechny vektory $v \in K$ a kladné skaláry $a \in \mathbb{R}$ je $av \in K$. Kužel se nazývá *ostrý*, jestliže $K \cap (-K) = \{0\}$, *konvexní*, jestliže pro všechny vektory v, $w \in K$ a nezáporné skaláry a, $b \in \mathbb{R}$ náleží tomuto kuželu i vektor $av + bw$, *plný*, jestliže $\operatorname{int} K \neq \emptyset$, kde $\operatorname{int} K$ značí největší otevřenou podmnožinu K, *uzavřený*, je-li uzavřený vzhledem k běžné topologii. Kužel, který je současně ostrý, konvexní, plný a uzavřený, se nazývá *vlastní*.

64 Definice. Nechť K je vlastní kužel v $\mathbb{R}^n$ a nechť symbol $\mathcal{P}(K)$ značí množinu všech reálných čtvercových matic A řádu n, pro které $AK \subseteq K$. Matice z množiny $\mathcal{P}(K)$ se nazývají *kužel-zachovávající zobrazení na K* (*cone-preserving maps on K*).

[305] Stačí porovnat odstavce v [Sc4], str. 172, a [Tm3], str. 381.
[306] Zároveň je upozorněno, že v případě nezáporných matic jiní autoři tento vektorový prostor nazývají též *Perron eigenspace* či *algebraic eigenspace*.

Symbolem K budeme v této části dále značit vlastní kužel v $\mathbb{R}^n$ pro nějaké přirozené číslo n.

65 Definice. Nechť symbol $\geq^K$ značí relaci částečného uspořádání na množině $\mathbb{R}^n$ indukovanou kuželem K, tj. $y \geq^K x$, právě když $y - x \in K$. Nechť relační vztah $x >^K o$ značí současně $x \geq^K o$ a $x \neq o$. Vektor x, pro který platí vztah $x >^K o$, se nazývá *K-polokladný* (*K-semipositive*) a podmnožina (báze) $\mathbb{R}^n$ obsahující pouze K-polokladné vektory se nazývá *K-polokladná*.

66 Definice. Neprázdná podmnožina F vlastního kužele K se nazývá *stěna kužele K* (*face of a cone K*),[307] jestliže F je podkuželem kužele K a navíc splňuje následující podmínku:

$$(y \geq^K x \geq^K o \quad \wedge \quad y \in F) \quad \Rightarrow \quad x \in F.$$

Uvažujme podmnožinu S kužele K a množinu všech stěn kužele K obsahující množinu S. Průnik všech těchto stěn je opět stěna kužele K, kterou budeme značit $\Phi(S)$. Pro $x \in K$ budeme zjednodušeně psát $\Phi(x)$ místo $\Phi(\{x\})$.

67 Definice. Nechť K je vlastní kužel a $x \in K$. Jestliže je vektor x nenulový a $\Phi(x) = \{ax;\ a \geq 0\}$ ($\dim \Phi(x) = 1$), potom stěnu $\Phi(x)$ nazýváme *extrémním paprskem* (*extreme ray*). Vlastní kužel, který má konečně mnoho extrémních paprsků, se nazývá *mnohostěnný* (*polyhedral*).[308]

K vyvození podmínek, za kterých se rovnají úrovňová charakteristika a Weyrova charakteristika příslušná spektrálnímu poloměru pro kužel-zachovávající matici A, nalezl Bit-Shun Tam nejprve odpovídající pojmy definované novým způsobem.

Nechť K je vlastní kužel a t značí index matice $A - \varrho(A)E$. Potom úrovňovou charakteristiku $\lambda(A)$ definoval autor jako t-tici $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t)$, jejíž prvky λ_k jsou dány vztahy

$$\lambda_1 = \dim\,[\mathrm{Ker}\,(A - \varrho(A)E) \cap K]$$

a pro $k = 2, 3, \ldots, t$

$$\lambda_k = \dim\left[\mathrm{Ker}\,(A - \varrho(A)E)^k \cap K\right] - \dim\left[\mathrm{Ker}\,(A - \varrho(A)E)^{k-1} \cap K\right],$$

kde hranaté závorky značí lineární obal množiny vektorů. Je známo, že pro nezáporné matice takto formulovaná definice splývá s obvyklou definicí úrovňové charakteristiky.

---

[307] První definice pojmu *face of a cone* pochází od Hanse Schneidera.

[308] Pro zjednodušenou představu mnohostěnného kužele uveďme, že kužel je mnohostěnný, právě když je průnikem konečného počtu poloprostorů. Tento poznatek je uveden například v článku *Theory of cones* [Br1] (Theorem 1.6, str. 266) Georga Phillipa Barkera, který problematice kuželů zasvětil značnou část své odborné práce. Seznam další literatury věnované mnohostranným kuželům může čtenář nalézt v tomtéž článku na str. 266.

Weyrova charakteristika příslušná spektrálnímu poloměru $\varrho(A)$ je nejprve definována jako duální posloupnost k Segreově charakteristice příslušné spektrálnímu polomětu $\varrho(A)$, ihned poté jsou však členy η_k Weyrovy charakteristiky vysvětleny pomocí obvyklých rozdílů dimenzí:

$$\eta_k = \dim \operatorname{Ker}(A - \varrho(A)E)^k - \dim \operatorname{Ker}(A - \varrho(A)E)^{k-1}.$$

Rovněž je pro ně uveden vztah

$$\eta_k = \dim(A - \varrho(A)E)^{k-1} \operatorname{Ker}(A - \varrho(A)E)^k,$$

který je velmi podobný rovnosti, kterou jsou zavedeny prvky nové posloupnosti:

68 Definice. Nechť K je vlastní kužel v $\mathbb{R}^n$ a $A \in \mathcal{P}(K)$. Potom *vrcholovou charakteristikou* $\zeta(A)$ matice A rozumíme t-tici $\zeta(A) = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_t)$, kde

$$\zeta_k = \dim(A - \varrho(A)E)^{k-1}(\operatorname{Ker}(A - \varrho(A)E)^k \cap K), \quad k = 1, 2, \ldots, t.$$

Evidentně je vždy $\zeta_k \leq \eta_k$, $k = 1, 2, \ldots, t$, lze dokázat, že i $\zeta_k \leq \lambda_k$, pro $k = 1, 2, \ldots, t$.

Výška vektoru je definována způsobem analogickým tomu, který byl použit v publikacích v předcházejícím století. Byl však zaveden pouze pro matici $A \in \mathcal{P}(K)$ a pro spektrální poloměr, tj. výška vektoru $v \in \operatorname{Ker}(A - \varrho(A)E)^n$, $A \in \mathcal{P}(K)$, je nejmenší přirozené číslo, pro které $(A - \varrho(A)E)^k v^T = o^T$. Rovněž vrcholový vektor a úroveň vektoru je definována obdobně (k určení úrovně třídy však počítáme maximální počet hlavních tříd a ne počet singulárních vrcholů na všech „cestách“, které končí v této třídě). Oba jmenované pojmy jsou zavedeny pouze pro nezáporné matice. Také pojmy úrovňová, výšková a výškovo-úrovňová báze jsou definovány analogicky. Nejinak je tomu u Jordanova řetízku matice $A \in \mathcal{P}(K)$, který je definován pro spektrální poloměr $\varrho(A)$ jako posloupnost k nenulových vektorů

$$v^T, (A - \varrho(A)E)v^T, \ldots, (A - \varrho(A)E)^{k-1}v^T,$$

kde $(A - \varrho(A)E)^k v^T = o^T$. Jordanova báze prostoru $\operatorname{Ker}(A - \varrho(A)E)^n$ je báze tohoto prostoru složená z Jordanových řetízků.[309]

69 Definice. Nechť K je vlastní kužel, $A \in \mathcal{P}(K)$. *Spektrálním kuželem matice A (pro kužel K a příslušný spektrální poloměr $\varrho(A)$)* nazveme množinu

$$C(A, K) = \left\{ v \in K,\ (A - \varrho(A)E)^j v \in K \text{ pro všechna přirozená čísla } j \right\}.$$

Nyní uvedeme pět podmínek ekvivalentních rovnosti úrovňové a výškové charakteristiky kužel-zachovávající matice A. Jsou analogií třiceti pěti podmínek formulovaných v roce 1991 Hansem Schneiderem a Danielem Hershkowitzem pro M-matice.[310]

[309] Je zajímavé, že báze tohoto prostoru je svým názvem opět přiřazena celé matici, originální termín Bit-Shun Tama zní *Jordan basis for A*. Viz [Tm3], str. 381.

[310] Viz [Tm3], Theorem 5.9, str. 407. Některé z podmínek však byly Bit-Shun Tamovi známy již roku 2001.

70 Věta. *Nechť K je vlastní kužel, $A \in \mathcal{P}(K)$ a nechť t značí řád největší Jordanovy buňky příslušné spektrálnímu poloměru $\varrho(A)$. Uvažujme následující podmínky:*

(i) $\eta(A) = \lambda(A)$,

(ii) $\eta(A) = \zeta(A)$,

(iii) *každý vektor z* $Ker\,(A - \varrho(A)E)^n$ *je vrcholový,*

(iv) $\mathrm{Ker}\,(A - \varrho(A)E)^k$ *obsahuje K-polokladnou bázi pro každé* $k=1,2,\ldots,t$,

(v) *existuje K-polokladná výšková báze* $Ker\,(A - \varrho(A)E)^n$,

(vi) *existuje K-polokladná výškovo-úrovňová báze* $Ker\,((A - \varrho(A)E)^n)$,

(vii) *existuje K-polokladná Jordanova báze* $Ker\,(A - \varrho(A)E)^n$,

(viii) $\mathrm{Ker}\,(A - \varrho(A)E)^k \cap C(A, K)$ je plný kužel v $\mathrm{Ker}\,(A - \varrho(A)E)^k$ pro každé $k = 1, 2, \ldots, t$,

(ix) $\eta_k = \dim\,(A - \varrho(A)E)^{k-1}[\mathrm{Ker}\,(A - \varrho(A)E)^k \cap C(A, K)]$ *pro každé* $k = 1, 2, \ldots, t$.

Podmínky (i)–(vi) *jsou navzájem ekvivalentní. Rovněž podmínky* (vii)–(ix) *jsou navzájem ekvivalentní. Navíc z podmínky* (vii) *plyne podmínka* (i). *Jestliže je navíc kužel K mnohostěnný, jsou všechny uvedené podmínky* (i)–(ix) *navzájem ekvivalentní.*

Zabývejme se nyní otázkou, zda i pro kužel-zachovávající matice existuje vztah majorizace mezi úrovňovou a výškovou charakteristikou.[311] Bit-Shun Tam přitom v definici majorizace připouští možnost přidání nul ke kratší ze dvou posloupností.

71 Věta. *Nechť K je mnohostěnný vlastní kužel a $A \in \mathcal{P}(K)$. Potom*

$$\hat{\lambda}(A) \preceq \eta(A).$$

Zdůrazněme, že požadavek mnohostěnnosti kužele je nutný. Pokud bychom chtěli zachovat platnost vztahu pro kužel, který je pouze vlastní, museli bychom dodat další dvě podmínky.[312]

6.5 Weyrova charakteristika a vzorová matice

Nulová vzorová matice (*zero pattern matrix*, též jen *zero pattern*) je matice, jejíž prvky náležejí množině $\{0, *\}$, *znaménková vzorová matice* (*sign pattern matrix*; též pouze *sign pattern*) je maticí, která obsahuje pouze prvky z množiny $\{0, +, -\}$. Každé matici nad libovolným polem $\mathcal{F}$ můžeme jednoznačně přiřadit nulovou vzorovou matici, nahradíme-li její nenulové prvky hvězdičkami, a každé reálné matici jedinou znaménkovou vzorovou matici, kterou obdržíme záměnou kladných prvků plusy a záporných prvků minusy.

[311] Viz [Tm3], Theorem 7.2, str. 419.
[312] Zájemce o tyto podmínky odkazujeme na Remark 7.5 na str. 420 práce [Tm3].

Uvažujme matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & -d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde a, b, c, d jsou libovolná kladná čísla. Jim příslušné nulové vzorové matice jsou

$$A_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad B_N = \begin{pmatrix} 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a znaménkové vzorové matice

$$A_Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ + & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad B_Z = \begin{pmatrix} 0 & + & 0 & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Weyrova charakteristika příslušná vlastnímu číslu 0 matice A je $\eta(A) = (1, 1, 1)$. Jsme schopni ji určit i bez znalosti konkrétních hodnot parametrů a, b a dokonce pouze na základě znalosti nulovosti či nenulovosti jejích prvků, tj. z její nulové vzorové matice A_N. Při určování Weyrovy charakteristiky příslušné vlastnímu číslu 0 matice B zjistíme, že charakteristika záleží na hodnotách parametrů a, b, c, d. Je-li $a/c = b/d$, je $\eta(B) = (3, 1)$, není-li $a/c = b/d$, je $\eta(B) = (2, 2)$. Weyrovu charakteristiku $\eta(B)$ tedy z nulové vzorové matice B_N neurčíme a nenalezneme ji ani s pomocí znaménkové vzorové matice B_Z, protože musíme znát vztah poměrů a/c, b/d parametrů a, b, c, d.

Problematika stanovení Weyrovy charakteristiky jejími vzorovými maticemi je obsažena v práci

- *Ranks of zero patterns and sign patterns* [HS7],

kterou roku 1993 publikovali Hershkowitz a Schneider, a v článku *Paths in directed graphs and spectral properties of matrices*, který roku 1994 publikoval Hershkowitz a který již byl zmíněn v minulém paragrafu.[313] Druhá z jmenovaných publikací má uvedenou problematiku jako hlavní náplň. Studuje souvislosti hodnosti matice a tvaru její nulové vzorové matice, hodnosti matice a tvaru její znaménkové vzorové matice, hodnosti mocnin A^k, $k \in \mathbb{N}$, a tvaru nulové vzorové matice A_N matice A. Odsud je vyvozena věta podávající postačující podmínky, za kterých mají čtvercové matice s totožnou nulovou vzorovou maticí stejnou výškovou charakteristiku:[314]

[313] Článek [HS7] obsahuje pouze termín výšková charakteristika, práce [He5] zmiňuje jednou termín Weyrova charakteristika, jinak používá termínu výšková charakteristika. V obou případech je termínem výšková charakteristika (bez dalšího zpřesnění) myšlena Weyrova charakteristika příslušná vlastnímu číslu 0.

Práce [HS7] několikrát zmiňuje (i v seznamu literatury) článek K. Čulíka [Ci1].

[314] Viz [HS7], Theorem 6.15, str. 19.

Nechť $\mathcal{F}$ je pole alespoň o třech prvcích a nechť P je čtvercová nulová vzorová matice řádu n, jejíž graf $G(P)$ splňuje následující podmínku: jestliže z orientovaného grafu $G(P)$ dostaneme odstraněním šipek na hranách graf neorientovaný, vznikne graf neobsahující cyklus (výskyt smyček je povolen).[315] *Potom všechny matice nad $\mathcal{F}$, kterým přísluší nulová vzorová matice P, mají tutéž výškovou charakteristiku.*

Uvědomme si nyní dodatečně, že v případech, v nichž mají diagonální čtvercové matice Frobeniova normálního tvaru řád 1 a 2, jsme úrovňovou charakteristiku matice schopni určit pouze na základě nulové (tedy i znaménkové) vzorové matice. Pro jisté matice jsme tedy mohli problematiku předešlého odstavce, zvláště pojmy definované pro graf $G(A)$ matice A a nikoliv pro její redukovaný graf $R(A)$, studovat pouze na základě příslušné nulové vzorové matice A_N.

6.6 Reakce na Weyrovy výsledky v období 1980 až 1999

Vraťme se nyní zpět do osmdesátých let 20. století a pokračujme v představování dalších reakcí jednotlivých autorů na výsledky Eduarda Weyra. V této době docházelo k odklonění od čistě algebraické interpretace Weyrovy charakteristiky, případně k „roztříštění“ této problematiky do poměrně úzce zaměřených oblastí. Weyrova charakteristika se tak v jednotlivých pracích objevuje vedle natolik speciálních pojmů jako jsou například *Hopf algebras*, *feedback set of (A, B)*, *Brunovsky numbers* atd. Není proto možné čtenáře detailně seznámit s konkrétními výsledky řady prací, resp. s postavením Weyrových výsledků v jednotlivých disciplínách, neboť každé z uvedených témat předpokládá rozsáhlé studium. U nejčastěji studovaných oblastí však jejich základní podstatu načrtneme.

Již zmíněný francouzský matematik Jean Alexandre Eugène Dieudonné ve své knize

- *History of Functional Analysis* [Dd2]

z roku 1981, konkrétně v kapitole *Spectral theory after 1900*, paragrafu *F. Riesz's theory of compact operators*, zmínil Weyrovu práci *Zur Theorie der bilinearen Formen*. Podotkl, že metodu, kterou použil maďarský matematik Frigyes Riesze (1880–1956) v článku *Ueber lineare Funktionalgleichungen* [Rs1] při studiu spektra kompaktních operátorů, použil i Eduard Weyr, a to k získání *Jordanova kanonického tvaru endomorfismu.*[316]

V roce 1980 publikoval Wolfgang Brandenbusch v krátké poznámce

- *Die Anzahl linear unabhängiger Matrizen X, die mit einer bestimmten Matrix A kommutieren, ausgedrückt in den Weyrschen Charakteristiken* [Bb1]

velmi jednoduchý vztah mezi počtem lineárně nezávislých matic, které komutují s danou čtvercovou maticí A nad libovolným polem $\mathcal{F}$, a její Weyrovou charakteristikou. Tento poznatek využila o pět let později María Asunción

[315] V textu [HS7] je tento typ grafu nazván *strongly triangular graph*, obdobným termínem *triangular graph* je myšlen orientovaný graf bez cyklů (smyčky jsou povoleny).

[316] Děkujeme panu doktoru Janu Seidlerovi za upozornění na Dieudonného knihu.

Beitia v článku

- *Matrices which commute with a given matrix upon a subspace* [Bt1].

Uveďme důležité tvrzení z této práce, v němž $C(A)$ značí množinu všech čtvercových matic X nad libovolným polem $\mathcal{F}$, které komutují s maticí A:

In terms of the Weyr characteristic of the matrix A:

$$[(m_{11}, m_{12}, \ldots, m_{1t_1}), \ \ldots, \ (m_{r1}, m_{r2}, \ldots, m_{rt_r})]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\dim C(A) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=1}^{t_k} m_{ki}^2.$$

([Bt1], str. 168)

Počet lineárně nezávislých matic komutujících s danou maticí, který určil Brandenbusch, je tedy roven součtu čtverců všech charakteristických čísel příslušných všem různým vlastním číslům matice A.

Jak uvidíme dále, María Asunción Beitia využila Weyrovu charakteristiku ve více svých textech, na řadě z nich spolupracoval Ion Zaballa. Ten roku 1983, ještě samostatně, napsal článek

- *Inequalities for the Weyr characteristic of modules* [Za1].

V témže roce publikoval německý matematik Max Koecher (1924–1990) knihu

- *Lineare Algebra und analytische Geometrie* [Kc1].

V ní citoval Frobeniovu práci *Über den Rang einer Matrix*, ve které, jak bylo výše napsáno, byl Weyr často citován. Koecher zmínil tzv. *Weyrovy-Frobeniovy nerovnosti*, které vymezují nulitu součinu dvou matic.

Víme-li, že článek

- *Theorems on M-splittings of a singular M-matrix which depend on graph structure* [Sc3]

sepsal Hans Schneider přibližně v polovině osmdesátých let minulého století, můžeme nejen z názvu tušit, že jeho tématem je vztah grafů a matic. Náš odhad je do jisté míry správný, ale na druhou stranu tento text není typickým článkem, který by měl patřit mezi práce uvedené v podkapitole 6.3, resp. 6.4. Jsou v něm sice zavedeny grafy matic stejným způsobem jako v podkapitole 6.4, ale místo studia vztahů mezi různými charakteristikami matic a grafů jsou jeho podstatnou náplní spektrální vlastnosti matic A, M, N, kde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matice M je regulární a $A = M - N$. Studium se zakládá na vztazích mezi grafy matic A, M, N a $M^{-1}N$. Platí-li uvedený vztah $A = M - N$, kde M je regulární, říkáme, že dvojice matic (M, N), nebo přímo jejich rozdíl $M - N$, je *rozštěpením* (*splitting*) matice A. Je-li matice M navíc M-maticí[317] a matice N

[317] Definice M-matice viz strana 221.

má pouze nezáporné prvky, mluvíme o *M-rozštěpení* (*M-splitting*).[318] Autor dospěl mimo jiné k následujícímu, na první pohled překvapivému výsledku:

Nechť A je singulární M-matice a nechť $A = M - N$ je M-rozštěpení matice A. Potom platí

a) *spektrální poloměr $\varrho(M^{-1}N)$ matice $M^{-1}N$ je* 1,
b) *násobnost vlastního čísla* 1 *matice $M^{-1}N$ (tj. jejího spektrálního poloměru) je totožná s násobností vlastního čísla* 0 *matice A*,
c) *index matice $M^{-1}N$ příslušný vlastnímu číslu* 1 (*tj. počet charakteristických čísel Weyrovy charakteristiky matice $M^{-1}N$ příslušných spektrálnímu poloměru* 1) *je totožný s indexem matice A příslušným vlastnímu číslu* 0 (*tj. s počtem charakteristických čísel Weyrovy charakteristiky matice A příslušných vlastnímu číslu* 0).

Právě po uvedení tohoto výsledku Hans Schneider poznamenal, že díky již dokázaným poznatkům (výše uvedeného článku [RS1], který publikoval o šest let dříve s Danielem Richmanem) o vztahu Weyrovy charakteristiky a grafu M-matice můžeme vyslovit větu, jejíž závěry jsou silnější než tvrzení b) a c). Lze dokázat, že pro M-rozštěpení $A = M - N$ (singulární) M-matice A, je matice $B = E - M^{-1}N$ (singulární) M-maticí a matice A a B mají stejný singulární graf (ve smyslu práce [RS1]). Dále si uvědomme, že pokud má matice $M^{-1}N$ vlastní číslo 1, má matice $B = E - M^{-1}N$ vlastní číslo 0 (se stejnou násobností, Weyrovou charakteristikou apod.). V některých případech je Weyrova charakteristika příslušná vlastnímu číslu 0 určená přímo singulárním grafem, tj. matice A a B mají nejen totožný singulární graf, ale i shodnou Weyrovu charakteristiku příslušnou vlastnímu číslu 0, což v sobě zahrnuje případy b) a c).

Pojem Weyrova charakteristika zmínil také Robert Charles Thompson[319] (1931–1995) v práci z roku 1989

- *Divisibility relations satisfied by the invariant factors of a matrix product* [Th1].

Ve stejném roce vyšel článek

- *The Jordan* 1*-structure of a matrix of Redheffer* [RB1],

který je v kontextu ostatních textů obsahujících či rozšiřujících Weyrovy výsledky poměrně neobvyklý. Sepsali jej Donald W. Robinson a Wayne W. Barrett (nar. 1948), kteří v něm odvodili vzorce pro určení řádů Jordanových buněk (a tedy i pro Segreovu charakteristiku) a pro výpočet charakteristických čísel

[318] Uveďme pro zajímavost, že pro rozštěpení matice $A = M - N$ jsou v článku definovány *červené*, resp. *modré* hrany grafu $G(M) \cup G(N)$, což jsou hrany grafu $G(M)$, resp. $G(N)$. Hrany patřící průniku grafů $G(M)$ a $G(N)$ jsou nazvány *červeno-modré*, hrany patřící rozdílu $G(N) \setminus G(M)$ grafů $G(N)$ a $G(M)$ jsou *ryze modré*. Graf $G(M) \cup G(N)$ je nazván *barevným grafem matice A* apod.

[319] Robert Charles Thompson získal doktorát na California Institute of Technology (tzv. Caltech), kde byl prvním oficiálním studentem Olgy Taussky–Todd. Roku 1996, tj. posmrtně, získal *Hans Schneider Prize*.

(a tedy i pro Weyrovu charakteristiku) příslušných vlastnímu číslu 1 tzv. Redhefferových matic.

Nechť $\gamma_n = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ a $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ jsou vektory prostoru $\mathbb{C}^n$, $C_n = \gamma_n^T e_1$ a $D_n = (d_{ij})$ jsou matice řádu n, kde

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } i|j \quad (i \text{ dělí } j), \\ 0, & \text{jestliže } i \nmid j \quad (i \text{ nedělí } j). \end{cases}$$

Uvažujme matici $A_n = C_n + D_n$. Například pro $n = 5$ je

$$A_5 = \begin{pmatrix} c_1 + 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ c_2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ c_3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c_5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice A_n zavedl americký matematik Raymond Moos Redheffer (1921–2005) roku 1977 v práci *Eine explizit lösbare Optimierungsaufgabe* [Re1].

Pro reálné číslo x dále označme jeho celou část symbolem $[x]$. Uvědomme si, že pro $[\log_2 x]$, kde x je kladné reálné číslo, je

$$2^{[\log_2 x]} \le x < 2^{[\log_2 x]+1}$$

a aritmetický průměr hodnot $2^{[\log_2 x]}$ a $2^{[\log_2 x]+1}$ je roven číslu $3{\cdot}2^{[\log_2 x]-1}$, které je tedy „středem“ polouzavřeného intervalu $\left\langle 2^{[\log_2 x]}, 2^{[\log_2 x]+1}\right)$ obsahujícího číslo x. Uvažujme dále funkci τ, která vektoru $\gamma_n = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^n$ přiřadí komplexní číslo

$$\tau(\gamma_n) = \begin{cases} c_{2^{[\log_2 n]}}, & \text{jestliže } n < 3 \cdot 2^{[\log_2 n]-1}, \\ c_{2^{[\log_2 n]}} + [\log_2 n] c_{3 \cdot 2^{[\log_2 n]-1}}, & \text{jestliže } n \ge 3 \cdot 2^{[\log_2 n]-1}. \end{cases}$$

Například $[\log_2 4] = [\log_2 5] = [\log_2 6] = [\log_2 7] = 2$, tedy $3 \cdot 2^{[\log_2 n]-1} = 6$ pro $n = 4, 5, 6, 7$. Proto $\tau(\gamma_4) = \tau(\gamma_5) = c_4$, ale $\tau(\gamma_6) = \tau(\gamma_7) = c_4 + 2c_6$. Hlavním výsledkem článku je následující tvrzení:

Nechť $\gamma_n = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^n$ *a* $e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^n$, $n \ge 3$. *Dále nechť matice* A_n *a funkce* τ *jsou dány tak, jak je popsáno výše, a nechť* $\xi(1)_n = (\xi_1(n), \xi_2(n), \ldots, \xi_{\eta_1(n)}(n))$, *resp.* $\eta(1)_n = (\eta_1(n), \eta_2(n), \ldots, \eta_{\xi_1(n)}(n))$ *značí Segreovu, resp. Weyrovu charakteristiku matice* A_n *příslušnou vlastnímu číslu* 1. *Jestliže* $\tau(\gamma_n) \ne 0$, *potom*

$$\xi_i(n) = \left[\log_2 \frac{n}{2i+1}\right] + 1, \qquad \eta_j(n) = \left[\frac{n}{2^{j-1}}\right] - \left[\frac{n}{2^j}\right] - 1,$$

$i = 1, 2, \ldots, k$, *kde* k *je největší přirozené číslo, pro nějž je* $n \ge 2k + 1$, *a* $j = 1, 2, \ldots, \xi_1(n)$.

V práci je rovněž odvozeno, že násobnost vlastního čísla 1 matice A_n je rovna $n - [\log_2 n] - 1$ právě tehdy, když $\tau(\gamma_n) \ne 0$. To nastane například tehdy, když $c_i > 0$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, n$, v triviálním případě

$\gamma_n = (1, 1, \ldots, 1)$. Uvedené výsledky zůstanou v platnosti také pro vektor $\gamma_n = (0, 1, \ldots, 1)$, protože funkční hodnota $\tau(\gamma_n)$ nemůže být pro $n \geq 2$ nikdy rovna c_1.[320]

Například pro matici $A_{12} = \gamma_{12}^T e_1 + D_{12}$, kde $\tau(\gamma_{12}) \neq 0$, mají Jordanovy buňky řády

$$\xi_1(12) = [\log_2 \tfrac{12}{3}] + 1 = 3, \qquad \xi_4(12) = [\log_2 \tfrac{12}{9}] + 1 = 1,$$
$$\xi_2(12) = [\log_2 \tfrac{12}{5}] + 1 = 2, \qquad \xi_5(12) = [\log_2 \tfrac{12}{11}] + 1 = 1,$$
$$\xi_3(12) = [\log_2 \tfrac{12}{7}] + 1 = 1,$$

tj. $\xi(1)_{12} = (3, 2, 1, 1, 1)$. Chceme-li získat charakteristická čísla příslušná vlastnímu číslu 1 matice A_{12}, můžeme je určit pomocí Ferrersova diagramu nebo výpočtem

$$\eta_1(12) = [\tfrac{12}{1}] - [\tfrac{12}{2}] - 1 = 5,$$
$$\eta_2(12) = [\tfrac{12}{2}] - [\tfrac{12}{4}] - 1 = 2,$$
$$\eta_3(12) = [\tfrac{12}{4}] - [\tfrac{12}{8}] - 1 = 1,$$

tj. $\eta(1)_{12} = (5, 2, 1)$. Násobnost vlastního čísla 1 je $12 - [\log_2 12] - 1 = 8$ (samozřejmě $8 = 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 5 + 2 + 1$). O dalších vlastních číslech matice A_{12} pouze víme, že součet jejich násobností je $4 = 12 - 8$.

Na Weyrovy výsledky zareagovala i řecká škola, především Nicos Karcanias, Grigoris I. Kalogeropoulos a Panayiotis J. Psarrakos.[321] Tito matematikové publikovali během takřka dvaceti let čtyři články, které na sebe postupně odkazují. Nejprve v roce 1986 napsali Nicos Karcanias a Grigoris Kalogeropoulos práci

- *On the Segré, Weyr characteristics of right (left) regular pencils* [KK1],

o rok později publikoval Karcanias text

- *On the characteristic, Weyr sequences, the Kronecker invariants and canonical form of a singular pencil* [Ka2].

V roce 1995 vyšla práce

- *The prime and generalized nullspaces of right regular pencils* [KK3],

na níž se opět podílela autorská dvojice Karcanias–Kalogeropoulos. Na článku

- *On the computation of the Jordan canonical form of regular matrix polynomials* [KPK1]

z roku 2004[322] spolupracovali všichni tři jmenovaní. Zjednodušeně lze říci, že se uvedené práce zabývají rozšířením problematiky Segreovy a Weyrovy charakteristiky, které jsou přirozeně přidružené k mnohokrát studovanému svazku

[320] Pro tento speciální případ $\gamma_n = (0, 1, \ldots, 1)$ byla násobnost $n - [\log_2 n] - 1$ vlastního čísla 1 matice A_n určena o rok dříve v článku *On the spectral radius of a* (0, 1) *matrix related to Mertens's function* [BFP1], který publikovali Wayne W. Barrett, Rodney Warring Forcade a Andrew Douglas Pollington.

[321] První jmenovaný působí v Londýně, další dva v Aténách.

[322] Práce tedy již přesahuje časový rozsah 1980 až 1999 vymezený v názvu této části. Vzhledem k návaznosti na předchozí tři články jsme si ji však dovolili uvést již nyní. Ještě novější text publikovaný těmito řeckými matematiky, který však má náplň poměrně odlišnou než zmíněná čtveřice prací, představíme později.

matic $A - sE$ (resp. $sE - A$), na obecnější svazky matic, např. na svazek matic $sF - G$, kde matice F a G nemusí být čtvercové.

Právě toto zobecnění na svazek matic je jedním z výrazných proudů studia Weyrovy charakteristiky na přelomu 20. a 21. století.

V pojednání

- *Extensions of Jordan bases for invariant subspaces of a matrix* [BRS1]

z roku 1991 využili Rafael Bru, Leiba Rodman[323] (nar. 1949) a Hans Schneider Weyrovu charakteristiku k alternativnímu vyjádření vlastnosti nilpotentní matice, k němuž dospěli v jiné terminologii:

Nechť A je nilpotentní matice, $\mathcal{R}(A)$ značí množinu všech lineárních kombinací jejích sloupců a t je řád její největší Jordanovy buňky. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) $\operatorname{Ker}(A^{t-1}) \subset \mathcal{R}(A)$,
(ii) *pro členy Weyrovy charakteristiky* $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t)$ *platí* $\eta_1 = \eta_2 = \ldots = \eta_t$,
(iii) *řády všech Jordanových buněk jsou stejné* (*rovny* t).

Jedná se tedy o nilpotentní matici, jejíž Ferrersův diagram je tvořen tečkami seskupenými do obdélníku.

Ferrersův diagram (nazývaný však jednoduše *bodový diagram*) Segreovy, resp. Weyrovy charakteristiky nalezneme rovněž v o rok mladším článku Keitha Roberta Matthewse

- *A rational canonical form algorithm* [Me1].

V roce 1989 vyšla v časopisu Linear Algebra and its Applications práce

- *Perturbation of linear control systems* [GHZ1],

kterou publikovali matematikové působící na univerzitě Universidad del País Vasco: Juan-Miguel Gracia, Inmaculada de Hoyos a již zmíněný Ion Zaballa. V ní je Weyrova charakteristika jedním z klíčových pojmů.[324] Jmenovaní matematikové později publikovali větší počet článků s obdobnou tematikou, jejich kolektiv rozšířila María Asunción Beitia, později také Francisco Enrique Velasco z téže univerzity.

Například v roce 1994 vyšly (opět v časopisu Linear Algebra and its Applications) články

- *Invariants of the block tensor product* [BZ1],

který napsali María Asunción Beitia a Ion Zaballa,

- *Local behavior of Sylvester matrix equations related to block similarity* [BG1],

který publikovali María Asunción Beitia a Juan-Miguel Gracia, a

- *Similarity and block similarity* [Za2]

Iona Zabally.

[323] Leiba Rodman je americký matematik, který se narodil v Litvě.
[324] Zdůrazněme, že se ve třicetistránkovém textu termín Weyrova charakteristika vyskytuje více než čtyřicetkrát.

Uveďme, že z odkazů a rovněž z korespondence s autorkou této monografie[325] vyplynulo, že španělská škola čerpala základní poznatky o Weyrově charakteristice především ze španělského vydání již zmíněné Mal'cevovy knihy *Osnovy linejnoj algebry.*

Náplň posledních čtyř jmenovaných článků je dalším výrazným směrem, kterým se ubíralo studium problematiky využívající Weyrovu charakteristiku. Udělejme si proto alespoň přibližnou představu o jejich tematice z následujících definic a tvrzení. Uvedené termíny se navíc vyskytují v názvech článků publikovaných mnohem později. Jak uvidíme, jedná se o řadu prací, které studují problematiku úzce spojenou s teorií řízení.

Nechť $A = (a_{ij})$ je komplexní matice typu $n \times m$ a B je komplexní matice typu $p \times q$. *Kroneckerovým součinem* matic A a B, který budeme značit $A \otimes B$, rozumíme matici

$$A \otimes B = (a_{ij}B)$$

typu $np \times mq$.

Nechť $\mathcal{F}$ je libovolné pole, $A \in \mathcal{F}^{n\times n}$ a $B \in \mathcal{F}^{n\times m}$. Pro uspořádanou dvojici matic A a B budeme symbolem $(A,\, B)$ přirozeně rozumět jak prvek kartézského součinu $\mathcal{F}^{n\times n} \times \mathcal{F}^{n\times m}$, tak blokovou matici typu $n \times (n+m)$, jejíž jediný řádek bloků je tvořen dvěma bloky A a B (v tomto pořadí). Zcela analogicky budeme vnímat obdobný symbol s trojicí matic atd.

Nechť $\mathcal{F}$ je libovolné pole a nechť dále

$$(A_1, B_1) \in \mathcal{F}^{n_1\times n_1} \times \mathcal{F}^{n_1\times m_1}, \quad (A_2, B_2) \in \mathcal{F}^{n_2\times n_2} \times \mathcal{F}^{n_2\times m_2}.$$

Potom *blokovým Kroneckerovým součinem* matic $(A_1,\, B_1)$ a $(A_2,\, B_2)$, který budeme značit $(A_1, B_1) \otimes^b (A_2, B_2)$, rozumíme matici

$$(A_1 \otimes A_2,\, (A_1 \otimes B_2,\, B_1 \otimes A_2,\, B_1 \otimes B_2)) \\ \in \mathcal{F}^{n_1n_2\times n_1n_2} \times \mathcal{F}^{n_1n_2\times(n_1m_2+m_1n_2+m_1m_2)}.$$

Takto zavedený součin dvou dvojic matic je velmi výhodný, zachovává totiž tzv. blokovou podobnost.[326]

Nechť $(A,\, B)$ a $(\bar{A},\, \bar{B}) \in \mathcal{F}^{n\times n} \times \mathcal{F}^{n\times m}$. Říkáme, že tyto dvojice matic jsou *blokově podobné*, jestliže existují invertibilní matice $P \in \mathcal{F}^{n\times n}$ a $Q \in \mathcal{F}^{m\times m}$

[325] Viz dále.

[326] Citujme zajímavé vyjádření k definici součinu dvou dvojic matic:

Given two such matrices $[A_1,\, B_1]$, $[A_2,\, B_2] \in \mathcal{F}^{n\times(n+m)}$, *we can form the Kronecker or direct product of them,* $[A_1,\, B_1] \otimes [A_2,\, B_2]$. *Of course this matrix is rectangular with more columns than rows, but in general there is not a pair of matrices associated to this matrix that can be easily identified in terms of the components* A_1, A_2, B_1, *and* B_2. *For instance,*

$$[A_1,\, B_1] \otimes [A_2,\, B_2] \neq [A_1 \otimes A_2,\, A_1 \otimes B_2,\, B_1 \otimes A_2,\, B_1 \otimes B_2],$$

althought these two matrices are permutationally similar. However, the equality between these two matrices seems to be what one wants for such a product. We will show that this must be the appropriate definition of the direct product of matrix pairs. ([BZ1], str. 590) a dále matice $R \in \mathcal{F}^{m\times n}$, pro které

$$P^{-1}(\bar{A},\, \bar{B}) \begin{pmatrix} P & O \\ R & Q \end{pmatrix} = (A,\, B).$$

Vedle termínu *blokově podobné* (*block similar*) se pro tento vztah často užívá též název *zpětnovazebně ekvivalentní* (*feedback equivalent*). Právě pod tímto termínem byl pojem poprvé zaveden v literatuře, konkrétně v článku *A classification of linear controllable systems* [Bn1] z roku 1970. Jedná se o často citovanou práci z teorie řízení, kterou publikoval slovenský matematik Pavol Brunovský (nar. 1934) v časopisu Kybernetika.[327]

Relace blokové podobnosti dvojic matic je relací ekvivalence. Formulujme již zmíněnou vlastnost součinu $\otimes^b$:

Nechť $(A_1,\, B_1)$ a $(\bar{A}_1,\, \bar{B}_1) \in \mathcal{F}^{n_1\times n_1} \times \mathcal{F}^{n_1\times m_1}$ jsou blokově podobné dvojice matic a nechť také $(A_2,\, B_2)$ a $(\bar{A}_2,\, \bar{B}_2) \in \mathcal{F}^{n_2\times n_2} \times \mathcal{F}^{n_2\times m_2}$ jsou blokově podobné dvojice matic. Potom také matice

$$(A_1,\, B_1) \otimes^b (A_2,\, B_2) \quad \text{a} \quad (\bar{A}_1,\, \bar{B}_1) \otimes^b (\bar{A}_2,\, \bar{B}_2)$$

jsou blokově podobné.

Nechť $(A,\, B) \in \mathcal{F}^{n\times n} \times \mathcal{F}^{n\times m}$. Potom *r-čísly* nebo též *Brunovského čísly*[328] dvojice matic $(A,\, B)$ jsou čísla $r_1,\, r_2,\, \ldots, r_n$ definovaná pomocí hodností vztahy

$$\begin{aligned} r_1 &= r(B), \\ r_i &= r(S_{i-1}(A,\, B)) - r(S_{i-2}(A,\, B)), \qquad i = 2,\, 3,\, \ldots,\, n, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} S_i(A,\, B) &= (B,\, AB,\, A^2B,\, \ldots,\, A^iB), \qquad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1, \\ S_0(A,\, B) &= B. \end{aligned}$$

Lze dokázat, že

$$m \geq r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_n \geq 0.$$

[327] Práce [Bn1] používá rovněž zkrácený termín *F-equivalent*, článek [GHZ1] *Γ-equivalent*.
Uveďme jinou, pro někoho možná průhlednější definici blokové podobnosti převzatou z reference článku [BG1], kterou napsal Leiba Rodman pro Zentralblatt (Zbl 0797.15011):

Two rectangular block complex matrices $[A,\, B]$ and $[A',\, B']$, where A and A' are $n \times n$ and B and B' are $n \times m$, are called block similar if $[AX + BY,\, BZ] = [XA',\, XB']$ for some matrices X, Y, Z with invertible X a *Z.*

Někomu bude možná ještě bližší následující možnost zavedení blokové podobnosti dvojic matic. Jedná se o způsob z uvedených nejstarší; následující úryvek je ze zmíněné Brunovského práce [Bn1] z roku 1970:

… the question … asks, whether for given systems $\langle A,\, B\rangle$, $\langle A',\, B'\rangle$ there are matrices $C(m \times n)$, $Q(m \times n)$, $D(m \times m)$, C, D being nonsingular, such that

$$A' = C^{-1}(A + BQ)C, \qquad B' = C^{-1}BD. \tag{3}$$

If the answer is positive, we shall say that $\langle A,\, B\rangle$ and $\langle A',\, B'\rangle$ are feedback (or, briefly, F-) equivalent. ([Bn1], str. 174)

V hlavním textu jsme použili definici dle matematiků, jejichž práce právě rozebíráme.

[328] Tato čísla byla poprvé zavedena ve zmíněném Brunovského článku [Bn1].

Prvky duální posloupnosti $(k_1, k_2, \ldots)$ k posloupnosti $(r_1, r_2, \ldots)$ Brunovského čísel jsou tzv. *indexy řiditelnosti* (*controllability indices*).

Dvojice matic (A, B) je tzv. *řiditelná* (též *plně řiditelná*), právě když

$$r\left(S_{n-1}(A, B)\right) = n.$$

Matice

$$S_{n-1}(A, B) = (B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B) \in \mathcal{F}^{n\times nm}$$

je nazývána *matice řiditelnosti* dvojice matic (A, B). Dvojice matic (A, B) je tedy *řiditelná*, právě když má její matice řiditelnosti hodnost n (její řádky jsou lineárně nezávislé vektory).

Vzhledem k platnosti vztahu

$$r\left(S_{i-1}(A, B)\right) = r_i + r\left(S_{i-2}(A, B)\right), \quad i = 2, 3, \ldots, n,$$

lze podmínku

$$r\left(S_{n-1}(A, B)\right) = n$$

nahradit rovností

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = n.$$

Nechť je dále $\mathcal{F}$ polem komplexních čísel, tj. $\mathcal{F} = \mathbb{C}$. Rozšiřme dobře známé pojmy pro čtvercovou matici na dvojici matic, která není řiditelná.

Nechť (A, B) není řiditelná. Potom se komplexní číslo λ nazývá *vlastní číslo dvojice matic* (A, B), jestliže existuje nenulový vektor $x \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ takový, že $B^T x = o^T$ a $A^T x = \lambda x$.

Nechť λ je vlastní číslo dvojice matic $(A, B) \in \mathcal{F}^{n\times n} \times \mathcal{F}^{n\times m}$. Potom posloupnost čísel $\eta(\lambda) = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$, která splňují rovnosti

$$\sum_{i=1}^{k} \eta_i = n - r\left((\lambda E - A)^k, B, AB, \ldots, A^{k-1}B\right), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

se nazývá *Weyrova charakteristika dvojice matic* (A, B) *příslušná vlastnímu číslu* λ.

Pro její prvky η_i tedy platí:

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= n - r\left((\lambda E - A), B\right),\\
\eta_2 &= r\left((\lambda E - A), B\right) - r\left((\lambda E - A)^2, B, AB\right),\\
\eta_3 &= r\left((\lambda E - A)^2, B, AB\right) - r\left((\lambda E - A)^3, B, AB, A^2B\right),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\eta_i &= r\left((\lambda E - A)^{i-1}, B, AB, \ldots, A^{i-2}B\right) - r\left((\lambda E - A)^i, B, AB, \ldots, A^{i-1}B\right),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Duální posloupnost k Weyrově charakteristice dvojice matic (A, B) příslušné vlastnímu číslu λ se nazývá *Segreova charakteristika dvojice matic* (A, B) *příslušná vlastnímu číslu* λ.

Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_u$ jsou všechna navzájem různá vlastní čísla dvojice matic (A, B). Posloupnost

$$[\eta(\lambda_1), \eta(\lambda_2), \ldots, \eta(\lambda_u)],$$

kde $\eta(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots, u$, značí *Weyrovu charakteristiku dvojice matic* (A, B) *příslušnou vlastnímu číslu* λ_i, nazýváme *Weyrovou charakteristikou dvojice matic* (A, B).

Posloupnost

$$[\xi(\lambda_1), \xi(\lambda_2), \ldots, \xi(\lambda_u)],$$

kde $\xi(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots, u$, značí *Segreovu charakteristiku dvojice matic* (A, B) *příslušnou vlastnímu číslu* λ_i, nazýváme *Segreovou charakteristikou dvojice matic* (A, B).

Tak jako v úplném systému invariantů podobnosti čtvercových matic vystupují Weyrovy charakteristiky těchto matic, jsou součástí úplného systému blokové podobnosti dvojic matic Weyrovy charakteristiky příslušné těmto dvojicím:

Úplný systém invariantů blokové podobnosti je tvořen r-čísly (*nebo indexy řiditelnosti*), *vlastními čísly a Weyrovou* (*nebo Segreovou*) *charakteristikou dvojice matic* (A, B).

Vedle právě představené problematiky se María Asunción Beitia a Ion Zaballa v jednom z jmenovaných článků, konkrétně v závěru práce [BG1], krátce věnovali i Brandenbuschově rovnosti mezi počtem lineárně nezávislých matic komutujících s danou maticí a Weyrovou charakteristikou matice. Ptali se, kdy je počet těchto matic minimální, neboli kdy je minimální součet

$$\sum_{k=1}^{r} \sum_{i=1}^{t_k} m_{ki}^2,$$

kde r značí počet vlastních čísel, t_k, $k = 1, 2, \ldots, r$, jejich příslušné indexy a m_{ki} charakteristická čísla matice příslušná jednotlivým vlastním číslům.

Odpověď je triviální:

It is clear that the minimum of (...) is equal to n, since $\sum_{k=1}^{r} \sum_{i=1}^{t_k} m_{ki} = n$ *and* $m_{ki} \geq 1$ *for* $i = 1, \ldots, t_k$, $k = 1, \ldots, r$; *hence, this minimum is attained if and only if* $m_{ki} = 1$ *for* $i = 1, \ldots, t_k$, $k = 1, \ldots, r$ *– that is to say, when A is nonderogatory.* ([BG1], str. 277)

Z ukázky je zřejmé, že i před koncem 20. století se pro matici užíval přívlastek *derogatory* (resp. jeho negace *nonderogatory*). Občas se vyskytuje i v současné odborné literatuře.[329] Připomeňme, že termín *dérogatoire* pochází od

[329] Termín *nonderogatory* zmiňuje například monografie *Advanced Topics in Linear Algebra: Weaving Matrix Problems through the Weyr Form* [OCV1] z roku 2011. Podotkněme ještě, že dnes se tato matice nazývá také 1-*regular matrix*, neboť je speciálním případem matic nazývaných *k-regular*, tj. matic, jejichž všechna jádra příslušná ke všem vlastním číslům mají dimenzi nejvýše k.

Jamese Josepha Sylvestera a byl používán i Eduardem Weyrem.

Vraťme se ještě krátce ke zmíněnému výsledku: počet lineárně nezávislých matic komutujících s danou maticí stupně n je tedy minimální, právě když pro danou matici neexistuje anulující polynom stupně menšího než n (neboli minimální polynom matice je roven charakteristickému).

V roce 1994 publikovali Lindsay N. Childs a Karl Zimmermann obsáhlejší článek

- *Congruence-torsion subgroups of dimension one formal groups* [CZ1],

v němž jsou definovány tzv. *Weyrovy invarianty* a studovány tzv. *Hopfovy algebry* s danými Weyrovými invarianty. Rozdíly dvou po sobě jdoucích Weyrových invariantů seřazených sestupně (tj. rozdíly dvou po sobě jdoucích charakteristických čísel) jsou identifikovány s tzv. *Ulmovými invarianty*[330] speciálních typů grup.

K použité terminologii Lindsay N. Childs napsal:[331]

In fact, when we wrote the "Congruence-torsion subgroups" paper and I called the dimensions g_r of $(p^{r-1}G)/(p^r G)$ the Weyr invariants of the p-group G, the referee of the paper complained about the terminology and suggested we not call the g_r by that name. I ignored the referee's suggestion, ...

Souvislost Weyrovy charakteristiky a jistých invariantů, tentokrát nazvaných *Ulmovy-Kaplanského invarianty*,[332] uvedli následující rok v práci

- *Orbits of invariant subspaces of algebraic linear operators* [BCh2]

také Khalid Benabdallah a Bernard Charles.

Američtí matematikové James W. Demmel a Alan Edelman vyšetřovali v článku

- *The dimension of matrices (matrix pencils) with given Jordan (Kronecker) canonical forms* [DE1]

z roku 1995 dvě množiny. První z nich,

$$\left\{Q^{-1}AQ;\ \det Q \neq 0\right\},$$

byla množina všech komplexních matic, které jsou podobné dané čtvercové komplexní matici A. Jinými slovy se jedná o množinu komplexních matic, které mají stejný Jordanův kanonický tvar. V jednom z algoritmů práce [DE1] se vyskytla čísla, která jsou charakteristickými čísly matice A. Zcela analogicky studovali oba autoři obecnější případ pro svazek matic $A-\lambda B$, tj. polynom v λ, kde A, B jsou dané komplexní matice typu $m \times n$ a λ je libovolné komplexní číslo. Tento svazek násobili zprava a zleva regulárními čtvercovými maticemi vhodného řádu, tj. uvažovali množinu

$$\left\{Q^{-1}(A-\lambda B)R;\ \det Q \cdot \det R \neq 0\right\}.$$

[330] Viz kniha *Infinite Abelian Group* [Kp1], str. 27, kterou roku 1969 publikoval kanadský matematik Irving Kaplansky (1917–2006).
[331] Z emailové korespondence s autorkou této monografie (únor 2013).
[332] Viz poznámka pod čarou č. 330.

Tato druhá množina je množinou všech svazků matic, které mají stejný Kroneckerův kanonický tvar. Je zajímavé, že autoři zavedli nulitu i pro obdélníkovou matici A typu $m \times n$. Rozlišovali mezi řádkovou nulitou $m - r(A)$ a sloupcovou nulitou $n - r(A)$. Některé poznatky z práce [DE1], např. určení tzv. *kodimenze* dvou výše uvedených množin matic, resp. svazků matic, se staly podstatnými základy pro výsledky publikované v sérii článků převážně švédských matematiků z let 1999 až 2012. Další pojmy z práce [DE1] budou proto představeny níže (viz str. 286 a strany následující) spolu s navazujícími, novějšími výsledky.

Weyrova charakteristika je rovněž několikrát zmíněna ve více než čtyřicetistránkovém pojednání

- *Sylvester matrix equation for matrix pencils* [BG2],

které roku 1996 publikovali María Asunción Beitia a Juan-Miguel Gracia, okrajově také v práci

- *Black box interpolation. II. The one variable derogatory case* [MH1]

z roku 1996, kterou napsali Vaidyanath Mani a Robert E. Hartwig, či o rok později v důkazu jedné věty článku

- *Feedback invariants of supplementary pairs of matrices* [BZa1],

který je společným textem Itziara Baragaña a jeho školitele Iona Zabally.

V pojednání

- *The algebraic structure of pencils and block Toeplitz matrices* [Bd1]

z roku 1998 studoval Daniel L. Boley mimo jiné vztahy mezi některými posloupnostmi, především mezi Weyrovou charakteristikou, posloupností tzv. Kroneckerových indexů a nerostoucí nebo neklesající posloupností tzv. Jordanových indexů. Neklesající posloupnost Jordanových indexů je přitom Segreova charakteristika matice.

Téhož roku s Weyrovou charakteristikou a Weyrovým tvarem pracovaly také matematičky Grace E. Cho a Ilse Clara Franziska Ipsen v pojednání

- *If a matrix has only a single eigenvalue how sensitive is this eigenvalue? II* [CI1].

Weyrovu charakteristiku nalezneme rovněž v článku

- *The contragredient equivalence: Application to solve some matrix systems* [RG1],

z roku 1999. V něm se jeho autoři Pablo Rubió a Josep Gelonch zabývali studiem matic A a B, pro které existují oba součiny AB i BA. Tato problematika je poměrně hojně studována již od poloviny století, kdy americký matematik Harley Flanders (nar. 1925) našel[333] vztah mezi elementárními děliteli matic AB a BA a také nutnou a postačující podmínku, aby pro dané čtvercové matice X a Y existovaly matice A, B takové, že $X = AB$ a $Y = BA$ (tzv. *Flandersova věta*). Jak uvidíme dále, práce s Weyrovou charakteristikou, které se zabývají maticemi AB a BA, jsou publikovány i v moderní lineární algebře.

[333] Viz Flandersův krátký článek *Elementary divisors of AB and BA* [Fs1] z roku 1951.

V roce 1999 vyšel také další článek pocházející ze španělské školy, a sice text

- *Stable subspaces of matrix pairs* [Vl1]

Francisca E. Velasca.

Rok 1999 se stal v jistém smyslu významným milníkem v historii Weyrovy charakteristiky. V tomto roce totiž publikovala přehledný, dodnes často citovaný článek americká matematička Helene Shapiro. Nazvala jej jednoduše

- *The Weyr characteristic* [Sh2]

a publikovala v časopisu The American Mathematical Monthly. Nabídku k otištění tohoto textu dostala od Rogera Horna, který byl editorem časopisu a který později rozpracoval výsledky Eduarda Weyra v druhém vydání monografie *Matrix Analysis* (viz dále).

Helene Shapiro se o Weyrově charakteristice poprvé dozvěděla od Hanse Schneidera v roce 1980, když po získání doktorátu pobývala na univerzitě ve Wisconsinu.[334] Vedli zde spolu kurz teorie matic.

Než se dostaneme k tomuto článku, uveďme, že Weyrova charakteristika, tzv. *speciální Weyrova charakteristika* a dokonce i Weyrův kanonický tvar (na jehož bloky nad hlavní zobecněnou diagonálou však není kladen požadavek, aby byly jednotkovými maticemi s přidanými řádky nul, ale je požadována pouze lineární nezávislost sloupců) jsou hojně zmíněny v rozsáhlém článku Helene Shapiro, který vyšel již dříve. Bylo to v roce 1991, kdy byl publikován přehledový, takřka sedmdesátistránkový text

- *A survey of canonical forms and invariants for unitary similarity* [Sh1],

který je věnován, jak název napovídá, unitární podobnosti matic. Matice A a B jsou unitárně podobné, jestliže existuje unitární matice U, pro kterou platí rovnost $U^*AU = B$. Pro každou unitární matici U je $U^* = U^{-1}$, jedná se tedy, dle očekávání, o speciální druh podobnosti. Práce je bohatá na historické poznámky o výsledcích týkajících se kanonických tvarů matic především po roce 1950, v jejím závěru je seznam literatury čítající 136 položek. Mezi nimi jsou Weyrovy práce *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* a *Theorie der bilinearen Formen.*

K porovnání ohlasů na oba články Helene Shapiro napsala:[335]

The 1991 article appeared in Linear Algebra and Its Applications, a journal for specialists in linear algebra. It is not primarily an article about the Weyr characteristic, but about unitary similarity. The 1999 article appeared in the American Mathematical Monthly, aimed at a general mathematical audience. It is also an article specifically about the Weyr characteristic.

[334] Její osobní vzpomínky na první seznámení se s výsledky Eduarda Weyra viz dále.

Zajímavé je, že byla doktorandkou Olgy Taussky-Todd na California Institute of Technology. Doktorské studium absolvovala v roce 1979 prací *Unitary block diagonalization and the characteristic polynomial of a pencil generated by Hermitian matrices.*

[335] Z emailové korespondence s autorkou této monografie (leden 2013).

Citujme ještě jiná slova Helene Shapiro, tentokrát z úvodu článku *The Weyr characteristic*.

The Jordan canonical form is a well-known and standard topic in linear algebra. It is thoroughly covered in many texts on linear algebra and abstract algebra. The purpose of this article is to publicize a different approach to the canonical form problem introduced by Eduard Weyr in 1885 ... Several older books ... mention Weyr characteristics but it does not appear in recent linear algebra texts. The basic idea of Weyr's approach is useful in several areas, such as describing algorithms for computing the Jordan form in a stable manner ... and in developing canonical forms for matrices under unitary similarity ..., but Weyr's papers are rarely referenced and the sequence of numbers we call the Weyr characteristic is not named. Thus, while Weyr's work seems to be little known, his basic idea has been rediscovered and used several times. ([Sh2], str. 919)

V úvodu své práce rovněž stručně popsala její náplň:

In this paper we define the Weyr characteristic and discuss its connection with so-called "staircase" forms used in numerical linear algebra to determine the Jordan form in a stable manner. There is a simple relationship between the Weyr characteristic and the better known Segre characteristic, which is associated with the Jordan canonical form. This relationship leads to a quick derivation of Weyr's canonical form from the Jordan canonical form; we also present a proof that is independent of the Jordan canonical form, as Weyr did in his original paper. ([Sh2], str. 919)

Povšimněme si, že autorka nazvala kanonický tvar po Eduardu Weyrovi. Zřejmě se tak v publikovaném textu stalo ve 20. století poprvé a tento název v následujících letech začali používat i ostatní algebraici.

Práce *The Weyr characteristic* představuje základy Weyrovy teorie a ukazuje postup konstrukce Weyrova kanonického tvaru (bez znalosti Jordanova kanonického tvaru), jehož princip je založen především na následujícím poznatku (přesněji na jeho opakovaném použití):

Nechť

$$A = \begin{pmatrix} O_{11} & A_{12} \\ O_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

je nenulová čtvercová nilpotentní matice řádu n*, jejíž Weyrova charakteristika je* $\eta(A) = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t)$ *a řád jejího bloku* O_{11} *je* η_1*. Potom platí*

$$\eta(A_{22}) = (\eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_t).$$

Editoři vkládali do článku Helene Shapiro naděje na rozšíření Weyrových výsledků v rámci širší matematické komunity. Na internetových stránkách časopisu The American Mathematical Monthly je u tohoto článku uvedeno:

We hope this article will make Weyr's work better known to a wider audience.

Toto očekávání bylo naplněno. V monografii *Advanced Topics in Linear Algebra: Weaving Matrix Problems through the Weyr Form* (viz dále) z roku 2011 je napsáno:

The first popular account of the Weyr characteristic and Weyr form was in 1999, when Shapiro wrote an article "The Weyr Characteristic" for the American Mathematical Monthly. There she described the Weyr canonical form under that very name. So historically, perhaps Shapiro gets the credit for finally nailing the correct term for this particular canonical form. ([OCV1], str. 81)

V poznámce pod čarou je navíc doplněno:

This publication has a very large readership across a broad spectrum of people interested in mathematics generally, and so it presents an ideal forum for promoting concepts with widespread applications. ([OCV1], str. 81)

Zároveň je zde však vyjádřena pochybnost, zda nemohl být článek lépe propagován svým názvem. Následující ukázka je potvrzením skutečnosti, že ještě před koncem tisíciletí byla Weyrova charakteristika poměrně neznámým pojmem:

It is a pity that the title of her article did not also draw attention to a matrix canonical form that is related to the Jordan form. That may well have helped others to come to know the Weyr form. ([OCV1], str. 81)

V seznamu literatury jsou uvedeny pouze dvě Weyrovy práce: *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* a *Zur Theorie der bilinearen Formen.*[336]

6.7 Nejnovější ohlasy

Zdůrazněme, že dosud uvedené zahraniční ohlasy na výsledky Eduarda Weyra jsou, až na naprosté výjimky, reakcemi pouze na Weyrovu charakteristiku, nikoli na Weyrův kanonický tvar. Ten v literatuře odkazován takřka nebyl. Teprve na přelomu tisíciletí začal být dáván do blízké souvislosti s nulitami mocnin matice $A - \lambda E$ a Weyrovou charakteristikou.

Jedná se rovněž o období, kdy se Weyrovy originální práce začínají častěji objevovat v seznamech literatury jednotlivých publikací a rovněž Weyrova charakteristika je definována přímo pomocí rozdílů nulit, nikoli jako duální posloupnost k Segreově charakteristice.

Již v roce 1983 publikoval matematik Genrich Ruvimovič Belitskij[337] třináctistránkový, rusky psaný text, který obsahuje algoritmus pro současnou transformaci m-tice komplexních matic na kanonický tvar pomocí téže transformační matice. V tomto algoritmu hraje podstatnou roli Weyrův kanonický tvar. Belitskij však nepoužíval tento název, ale termín *modified Jordan form.* Algoritmus natolik zaujal ukrajinského matematika Vladimira Vasil'eviče Sergejčuka (nar. 1949), že autorovi doporučil, aby publikoval článek znovu v detailnější

[336] Helene Shapiro uvedla právě tyto dvě práce zřejmě z toho důvodu, že je měla fyzicky k dispozici – viz dále její vzpomínky na str. 335.
[337] Genrich R. Belitskij emigroval roku 1991 z Ukrajiny, dnes působí v Izraeli.

podobě. Tato propracovanější verze (32 stran) vyšla anglicky pod mírně pozměněným názvem[338]

- *Normal forms in matrix spaces* [Bj2]

v roce 2000 a stala se značně citovanou prací. V druhém, přepracovaném vydání monografie *Matrix Analysis* [HJ1] (viz dále) z roku 2013 je napsáno:

The Weyr form (in its standard partition) was rediscovered by G. Belitskii, whose motivation was to find a canonical form for similarity with the property that every matrix commuting with it is block upper triangular. ([HJ1], str. 215)

Belitskij si byl již roku 1983 vědom toho, že mezi Weyrovým a Jordanovým kanonickým tvarem lze přecházet pomocí simultánních permutací řádků a sloupců. Byl zřejmě prvním, kdo publikoval větu vymezující matice, které komutují s daným Weyrovým tvarem, který má jediné vlastní číslo. Překvapivě je tato vlastnost podmíněna pouze jednoduchým vztahem mezi bloky komutující matice:

Nechť W je Weyrův blok řádu n příslušný některému vlastnímu číslu, jehož Weyrova charakteristika je $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t)$, kde $t \geq 2$. Nechť

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{t1} & A_{t2} & \ldots & A_{tt} \end{pmatrix}$$

je bloková matice řádu n, jejíž bloky A_{ij} jsou typu $\eta_i \times \eta_j$ (řádky, resp. sloupce matice A jsou rozděleny do t skupin po řadě o $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$ řádcích, resp. sloupcích). Potom $WA = AW$, právě když A je horní blokově trojúhelníková matice, pro jejíž bloky platí

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} A_{i+1,\, j+1} & * \\ O & * \end{pmatrix}, \qquad 1 \leq i \leq j \leq t-1,$$

kde na místě $*$ jsou matice o libovolných prvcích (pro $\eta_j = \eta_{j+1}$ nejsou v bloku A_{ij} tyto matice obsaženy; analogicky pro $\eta_i = \eta_{i+1}$ nejsou v bloku A_{ij} obsaženy poslední řádky začínající nulami).

Uvedený algoritmus rozvinul v roce 2000 již zmíněný Vladimir Sergejčuk v padesátistránkovém pojednání

- *Canonical matrices for linear matrix problems* [Sch1].

Použil jej rovněž k řešení mnoha problémů teorie matic, včetně současného převedení dvojice čtvercových matic A a B téhož řádu na kanonické tvary $G^{-1}AG$ a $G^{-1}BG$. Citujme jedno z hodnocení Sergejčukovy práce:

It is an impressive piece of work. ([OCV1], str. 81)

[338] Verze z roku 1983 je odkazována pod názvem *Normal forms in a space of matrices* [Bj1].

Také Sergejčuk pracoval s Weyrovým kanonickým tvarem již dříve, aniž by pro jeho pojmenování používal „historicky správný“ termín. Například v roce 1993 v článku[339]

- *Klassifikacija par linejnych operatorov v četyrechmernom vektornom prostranstve* [SG1],

jehož spoluautorem je Dmitrij V. Galinskij, psal o Jordanově tvaru s přeuspořádanými řádky a sloupci, v práci

- *Littlewood's algorithm and quaternion matrices* [MS1],

na které spolupracoval Dennis I. Merino, doktorand Rogera Alana Horna, jej pojmenoval *modifikovanou Jordanovou maticí.*

Teprve v práci z roku 2000, v níž opakovaně zdůraznil souvislost tohoto kanonického tvaru s Weyrovou charakteristikou, uvedl Weyrovo příjmení v názvu kanonického tvaru. Ihned v úvodu článku napsal:

... for every Jordan matrix J we construct a matrix $J^{\#} = P^{-1}JP$ (P is a permutation matrix) ... Following Shapiro ..., we call $J^{\#}$ a Weyr matrix since its form is determined by the set of its Weyr characteristic ...
([Sch1], online verze, str. 4)

V článku je přibližně čtyřstránková pasáž nazvaná *Weyr matrices*, v níž autor znovu zdůvodnil svoji terminologii. Weyrovu charakteristiku zavedl ve stejném duchu jako Eduard Weyr v 19. století:

The matrix W is named a "Weyr matrix" since $(m_{i1}, m_{i2}, \ldots, m_{ik})$ is the Weyr characteristic of W (and of every matrix that is similar to W) for λ_i. ... the Weyr characteristic of a square matrix A for an eigenvalue λ is the descreasing list $(m_1, m_2, \ldots)$, where $m_i := rank(A-\lambda I)^{i-1} - rank(A-\lambda I)^i$.
([Sch1], online verze, str. 7)

Termínu *Weyrova matice* se přidržel i v práci

- *Estimate of the number of one-parameter families of modules over a tame algebra* [BS1],

na níž spolupracoval Thomas Brüstle. Společně se zabývali, jak název pojednání napovídá, strukturami se zvláštním názvem *tame algebras.*[340]

S Weyrovou charakteristikou pracovali Albert Compta a Josep Ferrer, matematikové působící ve Španělsku, v článku

- *Matricial realizations of the solutions of the Carlson problem* [CF1]

z roku 2002. Psali však pouze o duální posloupnosti k Segreově charakteristice. Studovali problematiku vycházející z tzv. Carlsonova problému, který se zabývá existencí takové matice Z, že matice

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & Z \\ O & A_2 \end{pmatrix}$$

[339] Text je většinou citován pod svým anglickým názvem *Classification of pairs of linear operators in a four-dimensional vector space.*

[340] Poznamenejme, že problematika tzv. „krotkých“ (ale i „divokých“) algebraických struktur se vyskytuje i v dalších Sergejčukových pracích. Jmenujme například článek Gabriel P., Nazarova L. A., Roiter A. V., Sergeichuk V. V., Vossieck D., *Tame and wild subspace problems* [GNRSV1] z roku 1993.

má předepsaný Jordanův kanonický tvar a bloky A_1 a A_2 jsou dané matice. Zaměřili se na případ, kdy A_1, A_2 jsou nilpotentní, a tedy daná data jsou Segreovy charakteristiky matic A_1, A_2 a A. Představili metodu konstrukce matice Z založenou na jejich důkazu tzv. Kleinovy věty. Tento teorém, pojmenovaný po T. Kleinovi a publikovaný roku 1968 v jeho článku *The multiplication of Schur functions and extensions of p-modules* [Ke1], převádí Carlsonův problém na existenci tzv. *LR-posloupností*:[341]

Nechť $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\ell(\alpha)})$ je nerostoucí posloupnost přirozených čísel. Symbol $\ell(\alpha)$ značí *délku* této posloupnosti a $|\alpha|$ značí její *váhu*, tj.

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\ell(\alpha)}.$$

Nechť jsou dány tři nerostoucí posloupnosti α, β, γ přirozených čísel, pro které $|\alpha| = n$, $|\beta| = n - d$, $|\gamma| = d$. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) *Pro nilpotentní matice $A_1 \in \mathbb{C}^{d\times d}$, resp. $A_2 \in \mathbb{C}^{(n-d)\times(n-d)}$, jejichž Weyrovy charakteristiky (příslušné jedinému vlastnímu číslu 0) jsou γ, resp. β, existuje matice $Z \in \mathbb{C}^{d\times(n-d)}$ taková, že matice*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & Z \\ O & A_2 \end{pmatrix}$$

má Weyrovu charakteristiku α.

(ii) *Existuje taková konečná řada posloupností γ^0, γ^1, $\ldots$, γ^s, kde $s = \ell(\beta)$, že $\gamma^0 = \gamma$, $\gamma^s = \alpha$ a pro všechna i, $j \geq 1$ platí:*

a) $\left|\gamma^j\right| - \left|\gamma^{j-1}\right| = \beta_j$,

b) $\gamma_i^j \geq \gamma_i^{j-1} \geq \gamma_{i+1}^j$,

c) $\sum_{\ell\leq i} (\gamma_\ell^{j+1} - \gamma_\ell^j) \leq \sum_{\ell\leq i-1} (\gamma_\ell^j - \gamma_\ell^{j-1})$,

přičemž se klade $\gamma_0^{j-1} = 0$ pro $j \geq 1$.

Posloupnosti γ^0, γ^1, $\ldots$, γ^s se nazývají *LR-posloupnosti.*

Na přelomu 20. a 21. století byla Weyrova charakteristika známa i matematikům působícím ve Švédsku. Máme na mysli poměrně uzavřenou společnost odborníků na Umeå University, výjimečně rozšířenou o již zmíněného Alana Edelmana. Tito matematikové sepsali větší počet značně specializovaných prací zaměřených na tzv. *stratifikaci* (viz dále) jistých množin matic a svazků matic. Weyrova charakteristika v nich figuruje především jako invariant podobnosti matic a je většinou definována jako duální posloupnost k Segreově charakteristice. Z těchto prací jmenujme následující:

[341] Písmena LR odkazují na dvojici matematiků Dudley Ernest Littlewood (1903–1979) a Archibald Read Richardson (1881–1954), konkrétně na jejich společný článek *Group characters and algebra* [LR1] z roku 1934, resp. na Littlewoodovu knihu *The Theory of Group Characters* [Lt1] z roku 1940.

- *On the stratification of the Kronecker Canonical Form* [El1],

což je referát Erika Elmrotha z roku 1995,

- *A geometric approach to perturbation theory of matrices and matrix pencils. Part II: A stratification-enhanced staircase algorithm* [EEK1],

kterou roku 1999 publikovali Alan Edelman, Erik Elmroth a Bo Kågström,

- *Computation and presentation of graphs displaying closure hierarchies of Jordan and Kronecker structures* [EJK1],

na jejímž vzniku v roce 2001 se podíleli Erik Elmroth, Pedher Johansson a Bo Kågström,

- *Bounds for the distance between nearby Jordan and Kronecker structures in a closure hierarchy* [EJK2],

pod níž se roku 2003 podepsala stejná trojice autorů jako u předchozí práce,

- *Stratification of controllability and observability pairs. Theory and use in applications* [EJsK1]

z roku 2009, na níž opět spolupracovali Erik Elmroth a Bo Kågström, tentokrát však se Stefanem Johanssonem,

- *Tools for control system design – stratification of matrix pairs and periodic Riccati differential equation solvers* [Jh1]

z roku 2009, což je disertační práce Stefana Johanssona sepsaná pod vedením Bo Kågströma,

- *Reviewing the closure hierarchy of orbits and bundles of system pencils and their canonical forms* [Jh2],

takřka devadesátistránkový text Stefana Johanssona z téhož roku jako jeho disertační práce, a příspěvek

- *StratiGraph tool: matrix stratifications in control applications* [KJJ1],

který publikovali roku 2012 Bo Kågström, Stefan Johansson a Pedher Johansson.[342]

Byl to patrně americký matematik Alan Edelman, který mezi švédskými kolegy vzbudil zájem o tuto problematiku.[343] V textech jsou totiž, tak jako v Edelmanově a Demmelově výše zmíněném článku *The dimension of matrices (matrix pencils) with given Jordan (Kronecker) canonical forms* [DE1] z roku 1995, stěžejními objekty množiny matic, které mají stejný Jordanův kanonický tvar, a množiny svazků matic, které mají totožný Kroneckerův kanonický tvar. Připomeňme, že svazkem matic rozumíme λ-matici, resp. maticový polynom neurčité λ tvaru $A - \lambda B$, kde A, $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ jsou dané matice a λ je libovolné komplexní číslo, a že zmíněnými stěžejními objekty jsou myšleny dvě množiny,

[342] Jedná se o část publikace, která vznikla na základě workshopu konaného v kanadském městě Banff již v roce 2010.

[343] Uvedenou domněnku potvrzuje i skutečnost, že v nejstarším z uvedených textů [El1] jeho autor Erik Elmroth děkuje právě Alanu Edelmanovi za povzbuzení ke studiu těchto otázek.

které lze popsat následujícím způsobem: pro danou čtvercovou matici A se jedná o podmnožinu (orbitu)

$$\mathcal{O}(A) = \left\{Q^{-1}AQ;\ \det Q \neq 0\right\}$$

n^2-dimenzionálního prostoru čtvercových matic řádu n a pro daný svazek matic $A - \lambda B$ o podmnožinu (orbitu)

$$\mathcal{O}(A - \lambda B) = \left\{Q^{-1}(A - \lambda B)R;\ \det Q \cdot \det R \neq 0\right\}$$

$2mn$-dimenzionálního prostoru svazků matic typu $m \times n$. Matice Q, resp. R jsou přitom čtvercové řádu m, resp. n. Orbita $\mathcal{O}(A)$ je tedy množinou všech navzájem podobných matic s danou maticí A a orbita $\mathcal{O}(A - \lambda B)$ je množinou všech tzv. *striktně ekvivalentních* matic s daným svazkem matic $A - \lambda B$. V uvedených pracích se relativně často vyskytují dva nové pojmy (pro čtvercové matice zavedené pomocí Weyrovy charakteristiky), a to tzv. *bundle*, resp. „*be in the same bundle*". Než představíme tyto pojmy, zobecněme pojem (konečného) vlastního čísla matice na (konečné a nekonečné) vlastní číslo svazku matic a také odlišme singulární svazek matic od regulárního.

Vlastní číslo svazku matic lze zavést definicí, která v sobě běžně používanou definici vlastního konečného čísla matice zahrnuje. Symbolem $\mathrm{nr}(A - \lambda B)$ označme tzv. *normální hodnost* svazku, tj. maximum z řádů všech minorů, které nejsou nulovým polynomem v λ.[344] Komplexní číslo λ_0 nazveme *konečným vlastním číslem* svazku $A - \lambda B$, jestliže

$$r(A - \lambda_0 B) < nr(A - \lambda B).$$

Upozorněme, že na levé straně nerovnosti je hodnost konstantní matice, zatímco na pravé straně je normální hodnost svazku matic (λ-matice). Říkáme, že svazek má *nekonečné vlastní číslo* ∞, jestliže 0 je vlastním číslem svazku $B - \lambda A$.

Svazek matic se nazývá singulární, jestliže buď $m \neq n$, nebo zároveň $m = n$ a $\det(A - \lambda B) = 0$ pro všechna λ. V opačném případě, tj. když $m = n$ a zároveň existuje alespoň jedno λ, pro které $\det(A - \lambda B) \neq 0$, se svazek nazývá regulární.

Pojem *bundle* je zaveden jak pro matice, tak pro svazky matic, značí se $\mathcal{B}(A)$, resp. $\mathcal{B}(A - \lambda B)$. Jedná se o množinu matic, resp. svazků matic, které mají – nepřesně řečeno – „stejně strukturovaný" Jordanův, resp. Kroneckerův kanonický tvar, ale jejich vlastní čísla se mohou lišit. Pro čtvercové matice se jedná o matice, které mají stejnou Weyrovu charakteristiku, ale dílčí Weyrovy charakteristiky jednotlivých matic mohou náležet rozdílným vlastním číslům. Exaktně řečeno, označíme-li $\eta(\lambda_1)$, $\eta(\lambda_2)$, …, $\eta(\lambda_u)$ Weyrovy charakteristiky příslušné všem navzájem různým vlastním číslům λ_1, λ_2, …, λ_u čtvercové matice A a analogicky $\eta(\mu_1)$, $\eta(\mu_2)$, …, $\eta(\mu_u)$ Weyrovy charakteristiky příslušné všem navzájem různým vlastním číslům μ_1, μ_2, …, μ_u čtvercové matice B,

[344] Nepřesně, avšak srozumitelněji můžeme říci, že se jedná o řád „největšího" minoru, který není nulovým polynomem v λ.

potom matice A a B „jsou ve stejném ranci“, jestliže vhodně zvolenou permutací charakteristik $\eta(\lambda_1)$, $\eta(\lambda_2)$, …, $\eta(\lambda_u)$ získáme posloupnost charakteristik $\eta(\mu_1)$, $\eta(\mu_2)$, …, $\eta(\mu_u)$, tj. existuje permutace P, pro kterou $\eta(\lambda_i) = \eta(\mu_{P(i)})$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, u$. Jedná se tedy o matice, jejichž Jordanovy kanonické tvary jsou rozděleny na stejně velké bloky odpovídající po řadě jednotlivým vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_u$, resp. $\mu_{P(1)}, \mu_{P(2)}, \ldots, \mu_{P(u)}$ a tyto bloky mají stejná členění na Jordanovy buňky.

Uvědomme si dále, že jednotlivé „rance“ $\mathcal{B}(\cdot)$ matic či svazků matic jsou sjednocením navzájem disjunktních orbit $\mathcal{O}(\cdot)$ matic či svazků matic.

Pozastavme se ještě krátce u Kroneckerova kanonického tvaru svazku matic.[345] Je známo, že pro dané matice $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ existují regulární matice $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ a $R \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takové, že

$$Q^{-1}(A - \lambda B)R = \tilde{A} - \lambda\tilde{B} = \mathrm{diag}(A_1 - \lambda B_1,\, A_2 - \lambda B_2,\, \ldots,\, A_k - \lambda B_k),$$

kde $\mathrm{diag}(A_1 - \lambda B_1, A_2 - \lambda B_2, \ldots, A_k - \lambda B_k)$ značí blokovou diagonální matici s bloky $A_i - \lambda B_i$ typu $m_i \times n_i$ na diagonále a každý blok $A_i - \lambda B_i$ má jeden z následujících čtyř tvarů:

$$J_j(\alpha), \qquad N_j, \qquad L_j, \qquad L_j^T.$$

Symboly $J_j(\alpha)$ a N_j značí jakési zobecněné Jordanovy buňky příslušné po řadě konečným a nekonečným vlastním číslům svazku.

Buňky vypadají takto (α značí konečné vlastní číslo svazku; na nevyplněných místech jsou nuly):

$$J_j(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \alpha-\lambda \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad N_j = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -\lambda \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Bloky $J_j(\alpha)$ a N_j tvoří tzv. *regulární strukturu* svazku. Zbývající dvě možnosti jsou bloky tvarů

$$L_j = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad L_j^T = \begin{pmatrix} -\lambda & & \\ 1 & \ddots & \\ & \ddots & -\lambda \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

K matici L_j typu $j \times (j+1)$, která se nazývá *pravý singulární blok pravého* (nebo *sloupcového*) *minimálního indexu* j, existuje až na násobek jediný vektor $r_j = (1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^j)$, pro který $L_j r_j^T = o^T$. Matice L_j^T typu $(j+1)\times j$ se nazývá *levý singulární blok levého* (nebo *řádkového*) *minimálního indexu* j a až na

[345] Pro přesnější představení tohoto tvaru doporučujeme Gantmacherovu slavnou monografii *Teorija matric* [Gn1].

násobek existuje jediný vektor $l_j = (1,\, \lambda,\, \lambda^2,\, \ldots,\, \lambda^j)$, pro který platí $l_j L_j^T = o$. Bloky L_0, resp. L_0^T jsou bloky typu 0×1, resp. 1×0, které přidávají do Kroneckerova kanonického tvaru svazku matic sloupce, resp. řádky nul (viz příklad níže).

Bloky L_j a L_j^T tvoří tzv. *singulární strukturu* svazku a v Kroneckerově kanonickém tvaru svazku se vyskytují pouze tehdy, je-li svazek singulární. Singulární a regulární struktury definují tzv. *Kroneckerovu strukturu* svazku. Svazky matic jsou strikně ekvivalentní právě tehdy, když mají až na pořadí bloků na diagonále[346] tentýž Kroneckerův kanonický tvar.

Pro ujasnění teorie raději uveďme Kroneckerův kanonický tvar s konkrétní strukturou. Je-li např. $\tilde{A} - \lambda\tilde{B} = \operatorname{diag}(L_1,\, L_2,\, J_3(\alpha),\, L_0^T)$, je

$$\tilde{A} - \lambda\tilde{B} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & & & & & & \\ & & -\lambda & 1 & & & & \\ & & & -\lambda & 1 & & & \\ & & & & & \alpha-\lambda & 1 & \\ & & & & & & \alpha-\lambda & 1 \\ & & & & & & & \alpha-\lambda \\ & & & & & & & \end{pmatrix}.$$

Rozšiřme přirozeným způsobem další pojmy úzce spojené se čtvercovými maticemi na svazky matic. Uvažujme svazek $A - \lambda B$ a jemu příslušný Kroneckerův kanonický tvar s diagonálou sestavenou z buněk čtyř výše uvedených typů.

Nechť jednotlivá čísla ξ_i *Segreovy charakteristiky* $\xi(\alpha_i) = (\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots,\, \xi_{q_i})$ *příslušné konečnému číslu* α_i *svazku* $A - \lambda B$ značí řády buněk $J_{\xi_k}(\alpha_i)$ příslušných k jeho konečným vlastním číslům α_i, $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, u$, a nechť jednotlivá čísla ${}_\infty\xi_i$ *Segreovy charakteristiky* $\xi(\infty) = ({}_\infty\xi_1,\, {}_\infty\xi_2,\, \ldots,\, {}_\infty\xi_q)$ *příslušné nekonečnému číslu* ∞ *svazku* $A - \lambda B$ značí řády buněk $N_{{}_\infty\xi_k}$ příslušných k jeho nekonečnému vlastnímu číslu ∞. Obdobně jako u matic, nechť charakteristické číslo η_m *Weyrovy charakteristiky* $\eta(\alpha_i) = (\eta_1,\, \eta_2,\, \ldots,\, \eta_{t_i})$ *příslušné nekonečnému číslu* α_i *svazku* $A - \lambda B$ je rovno počtu buněk $J_{\xi_k}(\alpha_i)$ řádu $\xi_k \geq m$ a nechť jednotlivá čísla ${}_\infty\eta_m$ Weyrovy charakteristiky $\eta(\infty) = ({}_\infty\eta_1,\, {}_\infty\eta_2,\, \ldots,\, {}_\infty\eta_t)$ *příslušné nekonečnému číslu* ∞ *svazku* $A - \lambda B$ značí počty buněk $N_{{}_\infty\xi_k}$ řádu ${}_\infty\xi_k \geq m$.

Nechť dále r_0, resp. l_0 jsou počty pravých, resp. levých singulárních bloků svazku $A - \lambda B$. Potom *pravými* (též *sloupcovými*) *minimálními indexy* svazku nazýváme prvky posloupnosti $\epsilon = (\epsilon_1,\, \epsilon_2,\, \ldots,\, \epsilon_{r_0})$, kde

$$\epsilon_1 \geq \epsilon_2 \geq \cdots \geq \epsilon_{r_1} > \epsilon_{r_1+1} = \cdots = \epsilon_{r_0} = 0$$

značí „velikosti“ ϵ_k bloků L_{ϵ_k} typu $\epsilon_k \times (\epsilon_k + 1)$. Posloupnost duální k posloupnosti ϵ označme $r = (r_1,\, r_2,\, \ldots,\, r_{\epsilon_1},\, 0,\, \ldots)$. Ta určuje tzv. *r-čísla* svazku. Dále

[346] Bloky L_j je zvykem řadit před bloky L_j^T.

označme $\mathcal{R}(A-\lambda B) = (r_0, r_1, \ldots, r_{\epsilon_1})$, kde prvky r_m posloupnosti $\mathcal{R}(A-\lambda B)$ značí počet bloků L_{ϵ_k}, pro které je $\epsilon_k \geq m$. Pokud v Kroneckerově struktuře svazku $A - \lambda B$ není žádný blok L_0, potom $r_0 = r_1$ a $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_{r_1})$, a jestliže v ní neexistuje žádný pravý singulární blok, potom je $\epsilon = \emptyset$ a posloupnost $\mathcal{R}(A - \lambda B) = (0, 0, \ldots, 0) = (0)$.

Zcela analogicky *levými* (též *řádkovými*) *minimálními indexy* svazku nazýváme prvky posloupnosti $\phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{l_0})$, kde

$$\phi_1 \geq \phi_2 \geq \cdots \geq \phi_{l_1} > \phi_{l_1+1} = \cdots = \phi_{l_0} = 0$$

značí „velikosti“ ϕ_k bloků L_{ϕ_k} typu $(\phi_k + 1) \times \phi_k$. Posloupnost duální k posloupnosti ϕ označme $l = (l_1, l_2, \ldots, l_{\phi_1}, 0, \ldots)$. Tato posloupnost definuje tzv. *l-čísla* svazku. Nechť dále $\mathcal{L}(A - \lambda B) = (l_0, l_1, \ldots, l_{\phi_1})$, tj. prvky l_m posloupnosti $\mathcal{L}(A-\lambda B)$ značí počet bloků $L^T_{\phi_k}$, kde $\phi_k \geq m$. Jestliže v Kroneckerově struktuře svazku $A - \lambda B$ není žádný blok L^T_0, potom $l_0 = l_1$, a pokud v ní neexistuje žádný levý singulární blok, potom $\phi = \emptyset$ a $\mathcal{L}(A - \lambda B) = (0)$.

Tečným prostorem k orbitě $\mathcal{O}(A)$, resp. $\mathcal{O}(A - \lambda B)$ v bodě A, resp. $A-\lambda B$, který značíme $\tan(A)$, resp. $\tan(A-\lambda B)$, rozumíme prostor matic, resp. svazků matic majících tvar

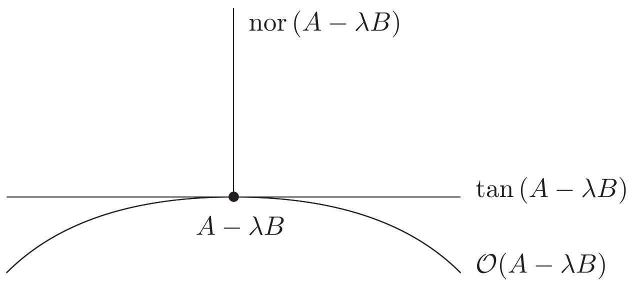
$$XA - AX, \tag{$*$}$$

resp.

$$X(A - \lambda B) - (A - \lambda B)Y. \tag{$**$}$$

Dimenze $\dim(\mathcal{O}(A))$, resp. $\dim(\mathcal{O}(A-\lambda B))$ orbity $\mathcal{O}(A)$, resp. $\mathcal{O}(A - \lambda B)$ je definována jako dimenze tečného prostoru $\tan(A)$, resp. $\tan(A - \lambda B)$ v bodě A, resp. $A - \lambda B$.

Definujme dále tzv. *kodimenzi* $\operatorname{codim}(\mathcal{O}(A))$, resp. $\operatorname{codim}(\mathcal{O}(A - \lambda B))$ orbity $\mathcal{O}(A)$, resp. $\mathcal{O}(A-\lambda B)$ jako dimenzi prostoru $\operatorname{nor}(A)$, resp. $\operatorname{nor}(A-\lambda B)$, který je doplňkem k tečnému prostoru dané orbity v bodě A, resp. $A - \lambda B$, tj. dimenzi prostoru kolmého k orbitě $\mathcal{O}(A)$, resp. k orbitě $\mathcal{O}(A - \lambda B)$ jdoucí bodem A, resp. $A - \lambda B$. Kodimenze orbity $\mathcal{O}(A)$ je rovna počtu lineárně nezávislých matic X, pro které je nulová matice $(*)$, zatímco kodimenze orbity $\mathcal{O}(A - \lambda B)$ je počet lineárně nezávislých párů matic X, Y, pro které je nulový maticový polynom $(**)$.



Součet dimenze a kodimenze orbity je roven dimenzi příslušného prostoru matic, resp. svazků matic, kodimenze „rance“ je rovna rozdílu kodimenze odpovídající orbity a počtu navzájem různých vlastních čísel struktury. tj. platí vztahy:

- $\dim(\mathcal{O}(A - \lambda B)) = \dim(\tan(A - \lambda B))$,
- $\operatorname{codim}(\mathcal{O}(A - \lambda B)) = \dim(\operatorname{nor}(A - \lambda B))$,
- $\dim(\mathcal{O}(A - \lambda B)) + \operatorname{codim}(\mathcal{O}(A - \lambda B)) = 2mn$,
- $\operatorname{codim}(\mathcal{B}(\cdot)) = \operatorname{codim}(\mathcal{O}(\cdot)) - u$, kde u je počet různých vlastních čísel struktury.

Kodimenze orbity $\mathcal{O}(A)$, resp. $\mathcal{O}(A - \lambda B)$ byla navíc explicitně vyjádřena v závislosti na prvcích Segreovy charakteristiky matice A, resp. na Kroneckerově struktuře svazku matic $A - \lambda B$ již roku 1995 ve výše zmíněné Demmelově a Edelmanově práci [DE1]. Uveďme tento vztah pro matici A (zájemce o poněkud složitější vztah pro svazek matic odkazujeme do článku [DE1]):

Nechť A je čtvercová matice a $(\xi_1(\lambda_i), \xi_2(\lambda_i), \ldots, \xi_{q_i}(\lambda_i))$, $i = 1, 2, \ldots, u$, jsou Segreovy charakteristiky matice A příslušné ke všem jejím různým vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_u$. Potom

$$\operatorname{cod}(\mathcal{O}(A)) = \sum_{i=1}^{u} (\xi_1(\lambda_i) + 3\xi_2(\lambda_i) + 5\xi_3(\lambda_i) + \ldots + (2q_i - 1)\xi_{q_i}(\lambda_i)).$$

A k čemu jsou tyto pojmy užitečné? Pomáhají například při počítání kanonického tvaru matice či svazu matic pomocí vhodného algoritmu,[347] které

[347] Při určování Jordanova tvaru matice se často používá tzv. *schodišťový algoritmus*, který za pomocí unitárních podobných transformací převede matici A mající jediné vlastní číslo λ s Weyrovou charakteristikou $\eta(\lambda) = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t)$ na tvar

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|}
 & \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \eta_t \\
\hline
\eta_1 & \lambda E & A_{1,2} & * & \cdots & * \\
\hline
\eta_2 & & \lambda E & A_{2,3} & \ddots & * \\
\hline
\eta_3 & & & \lambda E & \ddots & * \\
\hline
\vdots & & & & \ddots & A_{t-1,t} \\
\hline
\eta_t & & & & & \lambda E \\
\hline
\end{array},$$

je často problematické. Malé změny (perturbace) prvků matice, resp. svazku matic, mohou vést ke zcela odlišnému Jordanovu, resp. Kroneckerovu kanonickému tvaru. Při provádění algoritmu je dobré, když si je počtář (či program) vědom, které struktury jsou „blízko“ dané orbitě nebo „ranci“. O tomto vztahu mezi maticemi téhož řádu n či mezi svazky matic stejného typu $m \times n$ názorně vypovídá tzv. *stratifikace* (rozvrstvení) orbit, resp. „ranců“ v prostoru matic či svazků matic.

Stratifikace struktur odpovídá uspořádání příslušných Weyrových (Segreových) charakteristik matic, resp. Kroneckerových struktur svazků matic pomocí jisté binární relace, kterou lze definovat více způsoby. Představme například přístup z výše uvedené práce *A geometric approach to perturbation theory of matrices and matrix pencils. Part II: A stratification-enhanced staircase algorithm.* V ní se objevují i pojmy z teorie grafů a vztah, který je obdobný pojmu majorizace posloupnosti. Zde se píše o tzv. *pokrytí rozdělení.* Rozdělením přirozeného čísla n rozumíme posloupnost $(k_1, k_2, \ldots)$ takových přirozených čísel, že $k_1 + k_2 + \ldots = n$ a $k_1 \geq k_2 \geq \ldots$ Rozdělení $\kappa = (k_1, k_2, \ldots)$ přirozeného čísla n pokrývá rozdělení $\mu = (m_1, m_2, \ldots)$ téhož čísla n, právě když $k_1 + k_2 + \ldots + k_i \geq m_1 + m_2 + \ldots + m_i$ pro každé i, $\kappa \neq \mu$, a neexistuje pokrytí téhož čísla n, které by pokrývalo rozdělení μ a zároveň bylo pokrýváno rozdělením κ.

Tento pojem je ilustrován pomocí pohybu mincí.[348] Představme jeho zavedení originálními slovy autorů:

A partition κ_1 covers κ_2 if κ_2 may be obtained from κ_1 by moving a coin rightward one column, or downward one row, so long as the partition remains monotonic ... Or equivalently, κ_1 covers κ_2 if κ_1 may be obtained from κ_2 by moving a coin leftward one column, or upward one row, and keeping the monotonicity of the partition. We call these moves a minimum rightward and a minimum leftward coin move, respectively. ([EEK1], str. 672)

Pohyb mincí a pokrývání rozdělení jsou znázorněny obrázkem. Totéž platí i pro duální (konjugovaná) rozdělení. V článku jsou konkrétně uvedeny následující názorné pomůcky ([EEK1], str. 673):

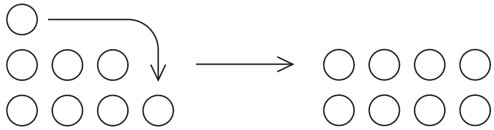


FIG. 2.2. *"Coin move" illustrates that* (3, 2, 2, 1) *covers* (2, 2, 2, 2).

kde jednotlivé čtvercové bloky na zobecněné diagonále mají řády η_i, bloky $A_{i,\,i+1}$ mají lineárně nezávislé sloupce (tj. jejich hodnost je η_{i+1}), $*$ značí libovolné matice příslušného typu a na nevyplněných místech jsou nuly. U matic s více vlastními čísly dospějeme u jednotlivých vlastních čísel k obdobným tvarům a ty tvoří bloky na zobecněné diagonále blokové diagonální matice ve *schodišťovém tvaru.*

[348] Uvědomme si, že majorizace různých posloupností Weyrovou charakteristikou lze znázornit pomocí pohybů mincí, připouštíme však možnost posunutí více mincí z téhož sloupce a také triviální případ, kdy žádnou minci nepřesouváme.

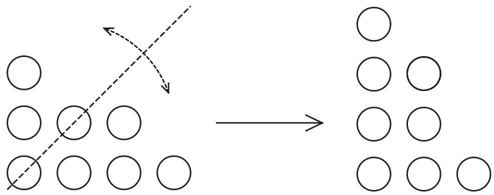
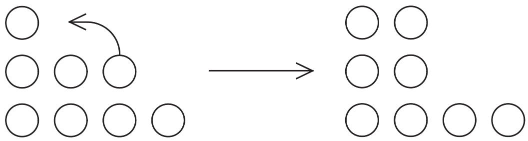


FIG. 2.3. *Transposing illustrates that* (3, 2, 2, 1) *and* (4, 3, 1) *are conjugate partitions.*

Na prvním z obou obrázků je znázorněn minimální pohyb mince doprava, na obrázku následujícím připojujeme ilustraci minimální pohybu mince doleva:



Věnujme se nyní pro jednoduchost pouze čtvercovým maticím (pro svazky matic lze zformulovat teorii obdobnou). Nechť A je daná čtvercová matice s Weyrovými charakteristikami $\eta(\lambda_i)$ příslušnými jednotlivým vlastním číslům λ_i matice A. V následující tabulce jsou přehledně uvedena pravidla, podle nichž jednoznačně určíme, které operace s mincemi znázorňující Weyrovy charakteristiky matice A (určující množiny $\mathcal{O}(A)$ či $\mathcal{B}(A)$) můžeme provést, abychom dostali rozmístění mincí znázorňující Weyrovy charakteristiky matice A^* (určující množiny $\mathcal{O}(A^*)$ či $\mathcal{B}(A^*)$) a aby orbita $\mathcal{O}(A)$ nebo „ranec“ $\mathcal{B}(A)$ pokrývaly orbitu $\mathcal{O}(A^*)$ nebo „ranec“ $\mathcal{B}(A^*)$, nebo jimi byly naopak pokrývány. Je však nutné dát pozor na skutečnost, že pokrývání struktur se oproti pokrývání jim příslušných charakteristik uvažuje v opačném smyslu (zjednodušeně a nepřesně řečeno, jedna struktura pokrývá druhou právě tehdy, když je Weyrova charakteristika příslušná jednomu vlastnímu číslu matice A pokrývána Weyrovou charakteristikou příslušnou vlastnímu číslu matice A^* a Weyrovy charakteristiky příslušné k ostatním vlastním číslům matic A a A^* jsou stejné).

Sjednocením dvou rozmístění mincí rozumíme nové rozmístění mincí, které vznikne sjednocením všech sloupců dvou původních množin mincí a srovnáním těchto sloupců podle velikosti. Inverzním procesem k tomuto procesu je *dělení* rozmístění mincí, což je separace sloupců původního rozmístění mincí na dvě množiny sloupců mincí tak, aby jejich sjednocením bylo původní rozmístění mincí.

$\mathcal{O}(A)$ pokrývá $\mathcal{O}(A^*)$	$\mathcal{O}(A)$ je pokrývána $\mathcal{O}(A^*)$
(1) Minimální pohyb mince doleva v rozmístění mincí, které odpovídá některé $\eta(\lambda_i)$.	(1) Minimální pohyb mince doprava v rozmístění mincí, které odpovídá některé $\eta(\lambda_i)$.
$\mathcal{B}(A)$ pokrývá $\mathcal{B}(A^*)$	$\mathcal{B}(A)$ je pokrývána $\mathcal{B}(A^*)$
(1) Minimální pohyb mince doleva v rozmístění mincí, které odpovídá některé $\eta(\lambda_i)$. (2) Sjednocení dvou rozmístění mincí (odpovídá splynutí některé dvojice vlastních čísel).	(1) Minimální pohyb mince doprava v rozmístění mincí, které odpovídá některé $\eta(\lambda_i)$. (2) Dělení rozmístění mincí příslušných k $\eta(\lambda_i)$ pro některé λ_i.

Obdobná tabulka existuje i pro orbity svazků matic, čtenář ji nalezne na straně 392 článku [EJK1]. Vyskytují se v ní čtyři pravidla pro pokrývání jedné orbity druhou a pět pravidel pro pokrývání jednoho „rance“ druhým. V nich se hojně využívá pohybu mincí odpovídajícího výše zavedeným posloupnostem $\mathcal{R}(A - \lambda B)$ a $\mathcal{L}(A - \lambda B)$.

K určení a znázornění uspořádání struktur pomocí grafu slouží počítačový program nazvaný *StratiGraph*, o němž leccos napovídá následující citát:

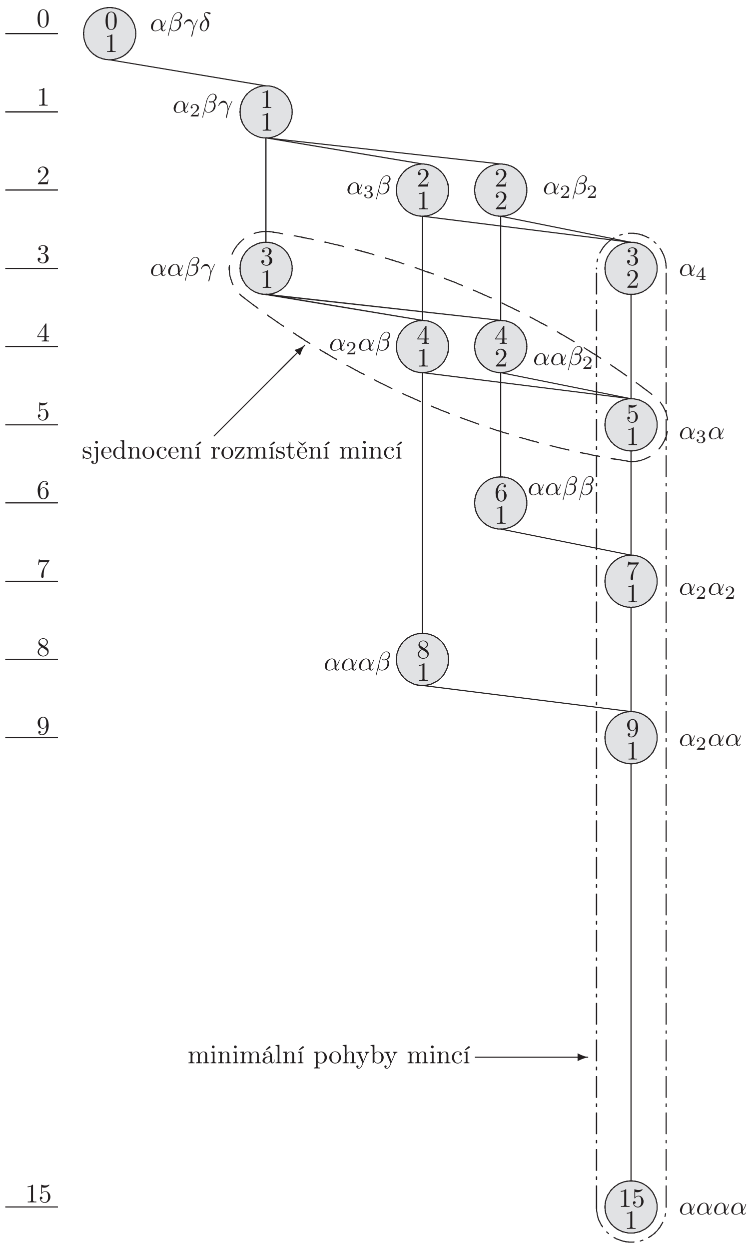
While stratigraphy is the key to understanding the geological evolution of the world [...], StratiGraph is the key to understanding the 'geometrical evolution' of orbits and bundles in the 'world' of matrices and matrix pencils.
([EJK1], str. 382)

Vrcholy grafu korespondují s jednotlivými orbitami nebo „ranci“ matic nebo svazků matic (a tedy i k jednotlivým kanonickými tvarům) a hrany grafu znázorňují pokrývání jedné struktury jinou. Vrcholy odpovídající orbitám, či „rancům“, které mají stejnou kodimenzi, se zobrazují do téže horizontální linie. V každém vrcholu grafu znázorněném kroužkem jsou nad sebou napsána dvě čísla. Horní číslo značí kodimenzi struktury (je značena rovněž ve sloupci umístěném na levé straně okna StratiGraphu), dolní číslo pouze odlišuje jednotlivé vrcholy odpovídající strukturám o stejné kodimenzi.

Ukažme konkrétní případ stratifikace, například rozvrstvení „ranců“ matic čtvrtého řádu.

Pro toto rozvrstvení je nutné si uvědomit, jaké Jordanovy kanonické tvary mohou matice čtvrtého řádu mít. Možností je čtrnáct. V grafu jsou kvůli přehlednosti jednotlivé rance matic označeny zjednodušeně, zápis $\alpha_k\beta_m$ znamená direktní součet Jordanovy buňky řádu k příslušné vlastnímu číslu α a Jordanovy buňky řádu m příslušné vlastnímu číslu β, tj. např.

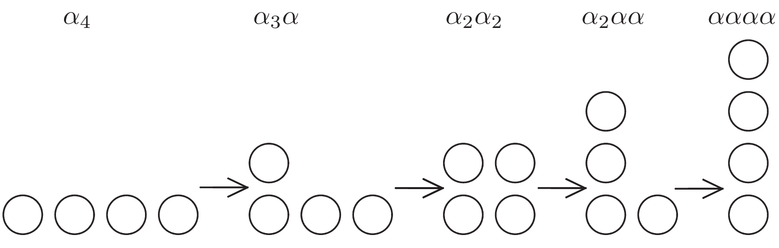
$$\alpha_2\alpha\beta = J_2(\alpha) \oplus J_1(\alpha) \oplus J_1(\beta).$$


0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
15
$\alpha\beta\gamma\delta$
$\alpha_2\beta\gamma$
$\alpha_3\beta$
$\alpha_2\beta_2$
$\alpha\alpha\beta\gamma$
α_4
$\alpha_2\alpha\beta$
$\alpha\alpha\beta_2$
$\alpha_3\alpha$
$\alpha\alpha\beta\beta$
$\alpha_2\alpha_2$
$\alpha\alpha\alpha\beta$
$\alpha_2\alpha\alpha$
$\alpha\alpha\alpha\alpha$
sjednocení rozmístění mincí
minimální pohyby mincí

Dále vypočítáme kodimenze jednotlivých struktur. Použijeme výše uvedený explicitní vzorec pro výpočet kodimeze orbity a poté od výsledku odečteme počty různých vlastních čísel příslušných matic, čímž získáme kodimenzi „rance“:

„ranec“	codim $(\mathcal{O}(\cdot))$	codim $(\mathcal{B}(\cdot))$
$\alpha\beta\gamma\delta$	$1+1+1+1=4$	$4-4=0$
$\alpha_2\beta\gamma$	$2+1+1=4$	$4-3=1$
$\alpha_3\beta$	$3+1=4$	$4-2=2$
$\alpha_2\beta_2$	$2+2=4$	$4-2=2$
α_4	4	$4-1=3$
$\alpha\alpha\beta\gamma$	$1+3\cdot1+1+1=6$	$6-3=3$
$\alpha_2\alpha\beta$	$2+3\cdot1+1=6$	$6-2=4$
$\alpha\alpha\beta_2$	$1+3\cdot1+2=6$	$6-2=4$
$\alpha_3\alpha$	$3+3\cdot1=6$	$6-1=5$
$\alpha\alpha\beta\beta$	$1+3\cdot1+1+3\cdot1=8$	$8-2=6$
$\alpha_2\alpha_2$	$2+3\cdot2=8$	$8-1=7$
$\alpha\alpha\alpha\beta$	$1+3\cdot1+5\cdot1+1=10$	$10-2=8$
$\alpha_2\alpha\alpha$	$2+3\cdot1+5\cdot1=10$	$10-1=9$
$\alpha\alpha\alpha\alpha$	$1+3\cdot1+5\cdot1+7\cdot1=16$	$16-1=15$

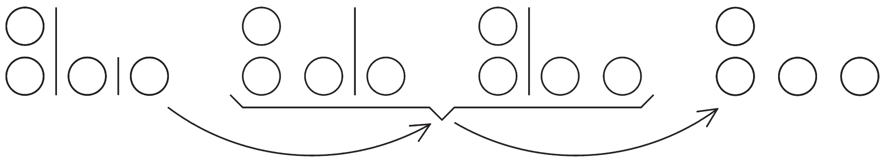
Zjistili jsme, které struktury mají stejnou kodimenzi a které tedy budou v grafu znázorněny na stejné horizontální úrovni. Nejvýše umístěný „ranec“ má dimenzi $16=16-0$, jedná se tedy o celý 4^2-dimenzionální prostor matic. Naopak nejníže zakreslený „ranec“ má dimenzi $1=16-15$. Zbývá již jen určit, které „rance“ pokrývají jiné. Jelikož se jedná o „rance“ matic, použijeme celkem dvě pravidla uvedená v tabulce. V prvním případě, tj. při minimálním pohybu mincí, dostáváme pokrývání, které je v StratiGraphu znázorněno svislými čarami. Příkladem skupiny „ranců“, které postupně vzniknou minimálním pohybem mincí znázorňujících odpovídající Weyrovy charakteristiky, je množina ohraničená v StratiGraphu čerchovanou čarou.



Na obrázku jsou pro „rance“ této množiny znázorněny příslušné Weyrovy charakteristiky a přechod od jedné charakteristiky k druhé.

Dle druhého pravidla můžeme připustit splynutí dvojice vlastních čísel, což odpovídá sjednocení dvou rozdělení mincí. V tabulce s výpočty kodimenzí jsou skupiny struktur, v nichž můžeme mezi „ranci“ různých kodimenzí takto přecházet, odděleny horizontálními čarami. V StratiGraphu je jedna z těchto skupin ohraničena čárkovanou čarou. Na níže uvedeném obrázku jsou opět znázorněny Weyrovy charakteristiky příslušné jednotlivým „rancům“ této skupiny, Weyrovy charakteristiky příslušné různým vlastním číslům téže struktury jsou odděleny svislou čarou. Sjednocení dvou rozdělení mincí lze ilustrovat vynecháním právě jedné této čáry – nebudeme-li právě jednu čáru u jedné struktury znázorňovat, dostaneme schéma pro druhou, pokrývanou strukturu (struktury $\alpha_2\alpha\beta$ a $\alpha\alpha\beta_2$ proto nelze pomocí relace pokrytí uspořádat). Při vynechání všech čar jsou rozložení mincí jednotlivých „ranců“ v rámci skupiny, v níž přecházíme pomocí druhého pravidla, stejná.

$\alpha\alpha\beta\gamma$ $\qquad$ $\alpha_2\alpha\beta$ $\qquad$ $\alpha\alpha\beta_2$ $\qquad$ $\alpha_3\alpha$



Po uvedení stěžejních otázek, které byly studovány v problematice stratifikace struktur v souvislosti s Weyrovou charakteristikou, pokračujme dále v představování reakcí na Weyrovy výsledky v posledních letech.

Weyrovu charakteristiku v textu a Weyrovu práci *Zur Theorie der bilinearen Formen* v seznamu literatury uvádí článek

- *On the change of the Jordan form under the transition from the adjacency matrix of a vertex-transitive digraph to its principal submatrix of co-order one* [Sv1]

z roku 2005, který napsal Sergej Valer’evič Savčenko.

K témuž roku je datován text

- *Tameness and homogeneity* [ZX1],

který sepsali čínští matematici Yingbo Zhang a Yunge Xu. Na takřka 150 stranách je Weyrovo jméno uvedeno více než dvacetkrát, v kapitole *Bimodule problems* je samostatná podkapitola nazvaná *Weyr matrices*. Weyrovou maticí W_λ příslušnou vlastnímu číslu λ je myšlen Weyrův blok příslušný tomuto vlastnímu číslu. Pojem je zaveden velmi neobvykle; sice pomocí řádů Jordanových buněk, ale bez Segreovy charakteristiky, natož pomocí „klasické“ duality mezi Segreovou a Weyrovou charakteristikou příslušnou témuž vlastnímu číslu. Weyrova charakteristika zmíněna vůbec není. K definici je naopak využit zcela nový pojem *vektor Weyrovy matice*: uvažujme řád t největší Jordanovy buňky Jordanova kanonického tvaru dané matice mající jediné vlastní číslo. Nechť v_i, $i = 1, 2, \ldots, t$, značí počet Jordanových buněk řádu i. Potom *vektorem Weyrovy matice* příslušné vlastnímu číslu λ rozumíme schéma

$$
\begin{array}{rl}
v = & (v_t \quad v_{t-1} \quad v_{t-2} \quad \cdots \quad v_3 \quad v_2 \quad v_1 \\
& v_t \quad v_{t-1} \quad v_{t-2} \quad \cdots \quad v_3 \quad v_2 \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& v_t \quad v_{t-1} \quad v_{t-2} \\
& v_t \quad v_{t-1} \\
& v_t)
\end{array}
.
$$

Čísla, která v naší terminologii nazýváme charakteristická, jsou tedy součty přirozených čísel v jednotlivých řádcích vektoru v, neboť $\eta_i = v_t + v_{t-1} + \cdots + v_i$. V přechodu od počtu Jordanových buněk stejného řádu k charakteristickým číslům můžeme spatřovat jakousi modifikaci duality posloupností. Pro lepší pochopení přístupu citujme ještě ukázku konkrétního příkladu s Jordanovými buňkami čtvrtého a druhého řádu (čísla m_i značí charakteristická čísla námi běžně značená η_i, $\underline{e}$ je vektor v, I_n značí jednotkovou matici řádu n, 0 ve schématu vpravo dole značí nulovou matici příslušného řádu):

For example, given a Jordan form $J_4(\lambda)^2 \oplus J_2(\lambda)^3$, we have
$m_1 = 2+0+3+0 = 5$, $m_2 = 2+0+3 = 5$, $m_3 = 2+0 = 2$, $m_4 = 2$,

$$
\underline{e} = \begin{array}{llll}
(2 & 0 & 3 & 0 \\
2 & 0 & 3 & \\
2 & 0 & & \\
2) & & &
\end{array}
\qquad
W_\lambda = \left(\begin{array}{cccc}
\boxed{\lambda I_5} & \boxed{I_5} & & \\
 & \boxed{\lambda I_5} & \boxed{\begin{matrix} I_2 \\ 0 \end{matrix}} & \\
 & & \boxed{\lambda I_2} & \boxed{I_2} \\
 & & & \boxed{\lambda I_2}
\end{array}\right)
$$

([ZX1], str. 17)

Ani v novém století neutichla publikační činnost již několikrát zmíněného španělského kolektivu. V roce 2006 vyšla práce

- *Stability of controlled invariant subspaces* [GV1],

která však Weyrovu charakteristiku uvádí pouze v přehledu dosud známých dílčích výsledků. Napsali ji společně Juan-Miguel Gracia a Francisco E. Velasco. Trojice autorů Mária Asunción Beitia, Inmaculada de Hoyos a Ion Zaballa publikovala tři články s velmi podobnými názvy

- *The change of the Jordan structure under one row perturbations* [BHZ1],
- *The change of similarity invariants under row perturbations: Generic cases* [BHZ2],
- *The change of similarity invariants under row perturbations* [BHZ3].

První práce je z roku 2005, další dvě z roku 2008. Autoři se v nich zabývali změnami Jordanových tvarů, Weyrových charakteristik a dalších invariantů podobnosti při „malé změně“ (perturbaci) prvků jednoho či více řádků dané matice. Pracovali tak například s pojmy *okolí spektra matice*, *norma rozdílu dvou matic* apod.

Problematika perturbací tehdy patřila k časté náplni článků, které zmiňují Weyrovu charakteristiku.[349] Na práci *The change of the Jordan structure under one row perturbations* navázali roku 2007 pojednáním

- *The change of feedback invariants under one row perturbation* [DSt1]

Marija Dodig a Marko Stošić, matematikové působící v Portugalsku. Název práce říká mnohé, jedná se o zobecnění výsledků pro obdélníkové matice.

Velmi podstatnou roli v šíření Weyrova kanonického tvaru mezi algebraickou komunitou hráli (a stále hrají) Kevin C. O'Meara a Charles Irvin Vinsonhaler (nar. 1942).[350] Na Weyrův kanonický tvar výrazně upozornili roku 2006 v článku

- *On approximately simultaneously diagonalizable matrices* [OV1],

v němž jej však nazvali *H-tvarem*, Weyrovu charakteristiku pro určité vlastní číslo pojmenovali *H-blokovou strukturou* s tímto vlastním číslem, Weyrův blok nazvali *základní H-maticí*, místo Segreovy charakteristiky používali termín *Jordanova struktura*. Písmeno „H“ značí „husky“ na počest spojení s University of Connecticut.[351]

V práci zavedli *H-tvar* v souvislosti se studiem tzv. *přibližné současné diagonalizovatelnosti* skupiny matic.

Normou $\|A\|$ čtvercové komplexní matice $A = (a_{ij})$ je míněno[352] reálné číslo

$$\|A\| = \sqrt{\sum |a_{ij}|^2}.$$

Čtvercové matice B_1, B_2, …, B_k řádu n (obecně nad polem) se nazývají *současně diagonalizovatelné*, jestliže existuje invertibilní matice C taková, že matice

$$C^{-1}B_1C, \quad C^{-1}B_2C, \quad \dots, \quad C^{-1}B_kC$$

[349] Za jedny z výchozích prací této problematiky jsou často uváděny články *Semi-stability of sums of partial multiplicities under additive perturbations* [BT1], který roku 1980 publikovali Huibert den Boer a Gerald Philip Antoine Thijsse, a *The change of the Jordan structure of a matrix under small perturbations* [MP1], který o tři roky později napsali A. S. Markus a E. È. Parilis. V nich byly studovány spektrální otázky matic, kterým byly „mírně“ pozměněny (obecně) všechny prvky.

[350] Tito matematikové zastávají pozice na více univerzitách v různých státech světa, především v USA a na Novém Zélandě.

[351] Pes husky byl studenty zvolen roku 1934 maskotem této university. Jeho jméno je Jonathan na počest Jonathana Trumbulla (1710–1785), amerického revolucionáře z Války za nezávislost (1775–1783). Od roku 1995 je v univerzitním kampusu huskyho socha, pohlazení po čumáčku prý přináší štěstí.

Více o tradicích této školy viz http://www.uconn.edu/history/traditions/index.php

Pojmenovat Weyrův kanonický tvar *H-form* navrhl Charles Vinsonhaler. Kevin O'Meara s nápadem rád souhlasil a považoval tuto volbu termínu za jistý dík za vše, co mu bylo při pobytech na University of Connecticut poskytnuto.

[352] Lze však použít i jinou normu, která splňuje následující podmínky: $\|XY\| \leq c\,\|X\|\,\|Y\|$, kde c je konstanta, a $\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$, např. $\|A\| = \max\{|a_{ij}|\}$.

jsou diagonální. Komplexní čtvercové matice $A_1, A_2, \ldots, A_k$ řádu n se nazývají *přibližně současně diagonalizovatelné*,[353] jestliže ke každému reálnému číslu $\varepsilon > 0$ existují matice $B_1, B_2, \ldots, B_k$, které jsou současně diagonalizovatelné a

$$\|B_i - A_i\| < \varepsilon \qquad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, k.$$

Již padesát let před publikováním této práce byla známa jedna významná vlastnost přibližně současně diagonalizovatelných matic.[354]

Každá dvojice komplexních komutujících matic řádu n je přibližně současně diagonalizovatelná.

V článku O'Meary a Vinsonhalera je dokázáno toto tvrzení:

Jestliže $A_1, A_2, \ldots, A_k$ jsou přibližně současně diagonalizovatelné, potom $A_iA_j = A_jA_i$ pro všechna i, j.

Vlastnost množiny matic *být přibližně současně diagonalizovatelnými* tedy implikuje komutativitu této skupiny matic. A tato komutativita úzce souvisí s převodem matic na horní trojúhelníkové matice. V teorii matic je dobře známo, že každou konečnou množinu komutujících matic lze pomocí současné podobné transformace převést na horní trojúhelníkový tvar.[355] Zde se ukazuje výhoda Weyrova kanonického tvaru oproti tvaru Jordanovu, Weyrův tvar má totiž následující vlastnost:

Nechť $A_1, A_2, \ldots, A_k$ jsou navzájem komutující matice řádu n nad algebraicky uzavřeným polem. Potom existuje invertibilní matice C taková, že $C^{-1}A_1C$ je Weyrův kanonický tvar matice A_1 a současně matice

$$C^{-1}A_2C,\ C^{-1}A_3C,\ \ldots,\ C^{-1}A_kC$$

jsou horní trojúhelníkové.

Díky této vlastnosti byl Weyrův kanonický tvar v práci zaveden.

Unfortunately, the most well-known standard form, the Jordan form, is not compatible with retaining upper triangularity in commuting matrices. To help circumvent this problem, we define a new standard form, the H-form, for an $n \times n$ matrix over an algebraically closed field, that allows us to assume all commuting matrices are also upper triangular. ([OV1], str. 48)

Práce se takřka na jedenácti stranách věnuje přímo Weyrovu kanonickému tvaru a jeho vlastnostem; tím se řadí mezi nejvýraznější časopiseckou literaturu věnovanou Weyrovým výsledkům.

---

[353] V literatuře se tato vlastnost běžně značí zkratkou ASD z anglického *approximately simultaneously diagonalizable.*

[354] Viz práce *Pairs of matrices with property L. II* [MT1], Theorem 5, str. 397, kterou roku 1955 publikovali Theodore Samuel Motzkin (1908–1970) a Olga Taussky-Todd.

Je rovněž známo, že tři komutující matice, z nichž jedna je tzv. 2-regulární, jsou též přibližně současně diagonalizovatelné. Čtvercová matice je přitom k-regulární, jestliže v jejím Jordanově kanonickém tvaru náleží k témuž vlastnímu číslu maximálně k Jordanových buněk. V případě uvedeného tvrzení mají tedy prostory generované vlastními vektory pro jednotlivá vlastní čísla dimenzi maximálně 2.

[355] Viz např. známou monografii R. A. Horna a C. R. Johnsona *Matrix Analysis* [HJ1], Theorem 2.3.3., str. 81 v prvním, resp. str. 103 ve druhém vydání.

Weyrovu charakteristiku označenou termínem *Weyrova posloupnost* několikrát zmínili ve své obsáhlé knize

- *Matrix Theory: from generalized inverses to Jordan form* [PO1]

z roku 2007 také američtí matematikové Robert Piziak (nar. 1943) a Patrick Lowry Odell (nar. 1930).

Další z prací, kde vystupuje Weyrův kanonický tvar pod jiným jménem, je text z roku 2008 nazvaný

- *The commutator algebra of a nilpotent matrix and an application to the theory of commutative Artinian algebras* [HW2],

který napsali japonští matematikové Tadahito Harima a Junzo Watanabe. Pro jeho označení používali termín *Jordan second canonical form* (pro Jordanův kanonický tvar uvedli i alternativní název *Jordan first canonical form*).

Lze uvést i jejich starší pojednání

- *The finite free extension of Artinian K-algebras with the strong Lefschetz property* [HW1]

z roku 2003. V tomto článku však pracovali s modifikací Weyrova kanonického tvaru, který rovněž nazývali *Jordan second canonical form.* Weyrovy buňky umístili do Weyrových bloků od nejmenších po největší, tedy způsobem, který použil již Eduard Weyr v 19. století, nenulové bloky s jednotkovými maticemi však psali nad diagonálu. Z dnes nejčastěji používaného Weyrova kanonického tvaru jej dostaneme „transponováním" podle vedlejší diagonály, příkladem Weyrova bloku v jejich pojetí je matice

$$W'' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & & \\ & \lambda & & 1 & & & \\ & & \lambda & & & 1 & \\ & & & \lambda & & & 1 \\ & & & & \lambda & & \\ & & & & & \lambda & \\ & & & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

I zde byl tento tvar použit vzhledem ke svým výhodnějším vlastnostem v porovnání s Jordanovým kanonickým tvarem.

Also we introduce the "Jordan second canonical form" of a nilpotent matrix. This is essentially the same as the usual Jordan decomposition, but as one will see it is easier to deal with in the theory of Artinian algebras. ([HW1], str. 121)

Zajímavým způsobem přistoupili roku 2009 k Weyrově charakteristice Lev Glebsky a Luis Manuel Rivera, matematikové působící v Mexiku, v práci

- *On low rank perturbations of complex matrices and some discrete metric spaces* [GR1].

Definovali ji jako funkci.

Let $\eta_m(A,\,\lambda)$ *denote the number of* λ*-Jordan blocks in* A *of size greater or equal than* m $(m \in \mathbb{Z}^+)$*:*

$$\eta_m(A,\,\lambda) = \dim \operatorname{Ker}(\lambda E - A)^m - \dim \operatorname{Ker}(\lambda E - A)^{m-1}.$$

The function $\eta_{(\cdot)}(A,\,\cdot) : \ \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{C} \to \mathbb{N}$ *is called the Weyr characteristic of the matrix* A. ([GR1], str. 304)

Jsou zde rovněž zavedeny tzv. *prostory* $\Im_n$ *Weyrových charakteristik*: prostor $\Im_n$ je prostor funkcí $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{C} \to \mathbb{N}$, které dvojici $(i,\,\lambda)$ přiřazují takové přirozené číslo $\eta_i(\lambda)$, že

(i) $\eta_i(\lambda) \neq 0$ pro konečně mnoho $(i,\,\lambda)$ a $\sum_{\lambda\in\mathbb{C}}\sum_{i\in\mathbb{Z}^+}\eta_i(\lambda) = n$,
(ii) $\eta_i(\lambda) \geq \eta_{i+1}(\lambda)$.

V práci je také definována metrika na $\Im_n$ vztahem

$$d(\eta,\,\mu) = \max_{(i,\,\lambda)}\left\{|\eta_i(\lambda) - \mu_i(\lambda)|\right\}.$$

Takto zavedená metrika je použitelná i pro dva prvky z různých prostorů Weyrových charakteristik (pro různá n). V práci jsou formulovány některé její vlastnosti.

V seznamu literatury je uvedena Weyrova práce *Zur Theorie der bilinearen Formen*. Je zajímavé, že na tuto práci (a také na práci Helene Shapiro *The Weyr characteristic*) je odkazováno při zavedení Segreovy charakteristiky matice příslušné danému vlastnímu číslu.

Velmi okrajově je Weyrův kanonický tvar a Weyrova charakteristika zmíněna v práci

- *Matrices that are self-congruent only via matrices of determinant one* [GHS1],

kterou v roce 2009 publikovali ukrajinská matematička Tatjana G. Gerasimova, Roger A. Horn a Vladimir V. Sergejčuk. V tomtéž roce vyšel v čínštině článek, jehož anglické shrnutí nese název

- *The centralizer of matrices* [Zh1].[356]

Autorem je Chao Zhang, který termín *centralizátor* použil, jak je běžně zvykem, pro označení množiny všech matic komutujících s danou maticí. Zabýval se explicitním určením dimenze tohoto podprostoru vektorového prostoru všech matic řádu n, tedy problematice, které se věnoval již Wolfgang Brandenbusch v roce 1980.

Američtí matematikové Ross Adams Lippert (nar. 1971), jehož školitelem byl Alan Edelman, a proslulý Gilbert Strang (nar. 1934) publikovali v roce 2009 efektní článek

- *The Jordan forms of AB and BA* [LS1],

[356] Originální, obšírný titul práce v čínštině obsahuje přímo příjmení Weyr.

v němž se zabývali výsledkem již zmíněného Harleye Flanderse, který byl dokázán v jeho krátkém článku *Elementary divisors of AB and BA* [Fs1].

Uvažujme čtvercové komplexní matice A a B téhož řádu, kde A je invertibilní. Potom $AB = ABAA^{-1}$ a vzhledem k asociativitě násobení matic platí $AB = A(BA)A^{-1}$. Matice AB a BA jsou tedy podobné, proto mají stejná vlastní čísla, stejný Jordanův kanonický tvar, stejné řády Jordanových buněk atd. Zcela analogicky lze postupovat, jestliže bude invertibilní matice B. Jak se však změní řády Jordanových buněk, jestliže budou obě matice (nad algebraicky uzavřeným polem) čtvercové singulární nebo obdélníkové? Odpověď je překvapivě jednoduchá: pro nenulová vlastní čísla zůstanou Jordanovy buňky nezměněny, pro vlastní číslo 0 se řády Jordanových buněk zvětší nebo zmenší maximálně o 1. Pro důkaz je podstatná nerovnost

$$\eta_i(BA) \geq \eta_{i+1}(AB),$$

kde $\eta_i(X)$ značí i-té číslo Weyrovy charakteristiky matice X příslušné vlastnímu číslu $\lambda = 0$, a analogicky (po obrácení pořadí matic a posunu indexů) nerovnost

$$\eta_{i-1}(AB) \geq \eta_i(BA).$$

Tohoto vztahu využil již Flanders, ale ve zcela jiné řeči, Weyrova charakteristika se v jeho poznámce vůbec nevyskytla. Naopak Lippert a Strang využili Weyrovu charakteristiku (především její duality k Segreově charakteristice) k elegantnímu důkazu změny řádu Jordanových buněk příslušných vlastnímu číslu 0.

Pohlížejme nyní – pro zjednodušení vyjádření – na Weyrovu a Segreovu charakteristiku jako na nekonečné posloupnosti, v nichž po konečném počtu přirozených čísel následují nuly. Formulujme přehledně dosud vyřčené.

Nechť $\mathcal{F}$ je algebraicky uzavřené pole. Nechť $A \in \mathcal{F}^{n\times m}$ a *$B \in \mathcal{F}^{m\times n}$ jsou matice nad tímto polem. Řády Jordanových buněk příslušných nenulovému vlastnímu číslu λ matic AB a BA jsou stejné, neboli*

$$\eta_i(AB - \lambda E) = \eta_i(BA - \lambda E) \qquad \textit{pro} \;\; \lambda \neq 0, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Pro charakteristická čísla příslušná vlastnímu číslu $\lambda = 0$ matic AB a BA platí

$$\eta_{i-1}(AB) \geq \eta_i(BA) \geq \eta_{i+1}(AB) \qquad \begin{array}{ll} \textit{pro} \;\; i = 2, 3, \ldots & \textit{v první nerovnosti,} \\ \textit{pro} \;\; i = 1, 2, \ldots & \textit{v druhé nerovnosti,} \end{array}$$

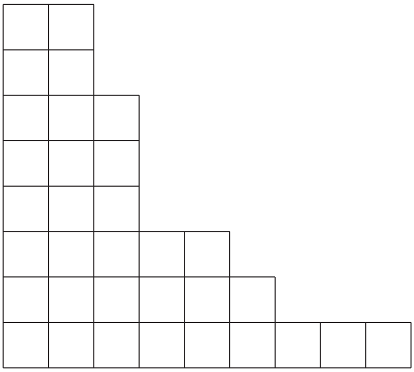
což je ekvivalentní vyjádření

$$|\xi_i(AB) - \xi_i(BA)| \leq 1 \qquad \textit{pro } i = 1, 2, \ldots,$$

kde $\xi_i(X)$ značí i-tý člen Segreovy charakteristiky matice X příslušné vlastnímu číslu $\lambda = 0$.

Ilustrujme („a dokažme“)[357] zmíněnou ekvivalenci na konkrétním příkladu pomocí Ferrersových diagramů charakteristik příslušných vlastnímu číslu 0 matic AB a BA. Toto zakreslení provedli i autoři článku, použili však Ferrersovy diagramy v mírně pozměněné podobě (prvky Segreovy charakteristiky značili do řádků, největší prvek na horní řádek, nejmenší nenulový prvek na spodní řádek).

Nechť Segreova charakteristika matice AB příslušná vlastnímu číslu 0 je $(8, 8, 6, 3, 3, 2, 1, 1, 1, 0, 0, \ldots)$. Příslušný Ferrersův diagram vypadá takto:



Odtud snadno zjistíme, že Weyrova charakteristika matice AB příslušná vlastnímu číslu 0 je $(9, 6, 5, 3, 3, 3, 2, 2, 0, 0, \ldots)$.

Meze pro charakteristická čísla matice BA příslušná vlastnímu číslu 0 jsou tedy dány nerovnostmi

$$\begin{array}{rcl} \eta_1(BA) \geq 6 & \qquad & 3 \geq \eta_7(BA) \geq 2 \\ 9 \geq \eta_2(BA) \geq 5 & & 2 \geq \eta_8(BA) \geq 0 \\ 6 \geq \eta_3(BA) \geq 3 & & 2 \geq \eta_9(BA) \geq 0 \\ 5 \geq \eta_4(BA) \geq 3 & & 0 \geq \eta_{10}(BA) \geq 0 \\ 3 \geq \eta_5(BA) \geq 3 & & 0 \geq \eta_{11}(BA) \geq 0 \\ 3 \geq \eta_6(BA) \geq 2 & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

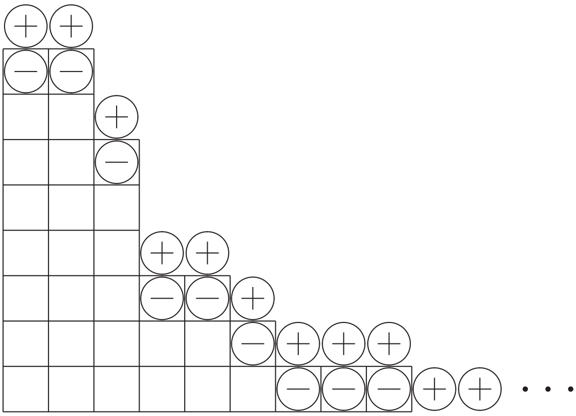
Označme tato rozmezí do Ferrersova diagramu Segreovy charakteristiky matice AB, tj. přidejme $(+)$ nebo odeberme $(-)$ příslušný počet prvků v řádcích diagramu. Získáme tak „přibližný“ tvar Ferrersova diagramu Segreovy charakteristiky matice BA.

[357] Zájemce o exaktní důkaz odkazujeme přímo na práci [LS1], str. 286, kde je uveden dokonce pro následující obecnější případ:

Nechť $(p_1, p_2, \ldots)$ *a* $(q_1, q_2, \ldots)$ *jsou dvě nerostoucí posloupnosti přirozených čísel nebo nul, nechť* $(p'_1, p'_2, \ldots)$ *a* $(q'_1, q'_2, \ldots)$ *jsou posloupnosti k nim duální a nechť* $d \in \mathbb{N}$. *Potom*

$$q'_i \geq q_{i+d} \;\text{ a }\; q_i \geq q'_{i+d}, \quad \textit{právě když} \;\left|p_i - p'_i\right| \leq d, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Pro $d = 1$ dostáváme výše uvedenou ekvivalenci.



Podívejme se však především na změny, které nastaly ve sloupcích diagramů. Vidíme, že se každý sloupec zvětšil nebo zmenšil maximálně o jeden prvek. Řády Jordanových buněk matice BA příslušných vlastnímu číslu 0 se tedy vzhledem k řádům Jordanových buněk matice AB příslušných témuž vlastnímu číslu zvětšily, nebo zmenšily maximálně o 1.

Upozorněme, že se může zvětšit, nebo zmenšit počet sloupců diagramu. Nové sloupce však nemohou mít více než jeden prvek. Mohou tedy přibýt nové Jordanovy buňky příslušné vlastnímu číslu 0. Nejedná se proto nutně jen o „přelévání“ řádů buněk mezi již existujícími, což lze dokumentovat i na konkrétním, velmi jednoduchém příkladu. Je-li

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

potom

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jordanův kanonický tvar matice AB má dvě Jordanovy buňky (řádu 2 a 1) příslušné vlastnímu číslu 0 , Jordanův kanonický tvar matice BA má tyto buňky tři (všechny řádu 1).

Ross A. Lippert publikoval roku 2010 práci

- *Fixing multiple eigenvalues by a minimal perturbation* [Li1],

jejíž hlavní náplň je, zhruba řečeno, následující: nechť je dána matice M řádu n a navzájem různá čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_u$, $u \leq n$. Hledáme „co nejmenší změnu“ $\triangle M$ matice M takovou, aby matice $(M - \triangle M)$ měla předepsaná vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_u$.

Rovněž v tomto textu je samostatná pasáž věnovaná Weyrově charakteristice:

This article proceeds with a short section of notation, followed by a review of the Weyr characteristic, which provides a compact formulation of the previous results which suggest their generalization ... ([Li1], str. 1786)

Ve zmíněné partii potom čteme:

The Weyr characteristic is a combinatorial structure for describing the canonical form of a matrix. Readers are no doubt familiar with the Jordan canonical form, where the combinatorial structure is a multiset of block orders ... for each $\lambda \in \mathbb{C}$. ([Li1], str. 1788)

The power of the Weyr characteristic is its ability to describe structured eigenvalues in a way that makes it easy to talk about the relative genericity of different structures ... ([Li1], str. 1789)

Několikrát je uveden termín *Weyrův kanonický tvar* – zřejmě po vzoru Helene Shapiro, jejíž práce z roku 1999 je zde citována. Mezi položkami literatury je i práce Charlese Loewnera *Über monotone Matrixfunktionen* [Lo2] z roku 1934.

V roce 2010 vyšla další z prací věnovaných perturbacím, která se tentokrát zabývá maticemi s pozměněnými prvky v posledních několika sloupcích. Jedná se o článek

- *The change of feedback invariants under column perturbations: particular cases* [BCHP1].

Mezi jména autorů María Asunción Beitia, Inmaculada de Hoyos a Albert Compta, která již známe, přibylo jméno nové: Marta Peña.

V práci

- *Block triangular miniversal deformations of matrices and matrix pencils* [KS1]

z roku 2010, kterou napsala ukrajinská dvojice matematiků Lena Klimenko a Vladimir Sergejčuk, opět nalézáme termín *Weyrův kanonický tvar*. Na více místech můžeme číst pasáže, které zdůrazňují důležitou vlastnost tohoto tvaru: všechny matice s ním komutující jsou blokově trojúhelníkové. Pro českou matematiku je potěšující, že i v této publikaci nalézáme citaci konkrétní Weyrovy práce, tentokrát článku *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces.*

Další článek z řady prací řeckých matematiků obsahujících Weyrovo jméno byl publikován roku 2010. Tentokrát se však autorský kolektiv značně obměnil – z dosud uvedených matematiků zůstal pouze Grigoris I. Kalogeropoulos, k němu se připojili Athanasios D. Karageorgos, Marilena Mitrouli a Athanasios A. Pantelous.[358] Napsali pojednání

- *Rank properties of a sequence of block bidiagonal Toeplitz matrices* [KKMP1].

[358] Posledně jmenovaný působí v Liverpoolu, zbývající v Aténách.

Výskyt jména českého matematika v tomto článku je poněkud překvapivý. Objevuje se totiž pouze na první straně v konstatování, že dolní bidiagonální blokové Toeplitzovy matice se také nazývají *matrices of the Weyr characteristics.* Obecná Toeplitzova matice je čtvercová matice tvaru

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_{-n+1} & a_{-n+2} & \cdots & & a_{-1} & a_0 \end{pmatrix},$$

kde $a_{-n+1}, a_{-n+2}, \ldots, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ je posloupnost $2n-1$ daných komplexních čísel (prvek a_{ij} Toeplitzovy matice $A=(a_{ij})$ je tedy roven číslu a_{j-i}). Bloková Toeplitzova matice je bloková matice, jejíž bloky vyhovují uvedené struktuře, tj. bloky na hlavní diagonále, resp. na liniích s ní rovnoběžných jsou totožné; dolní bidiagonální bloková Toeplitzova matice je bloková Toeplitzova matice, jejíž bloky ležící mimo hlavní diagonálu a mimo rovnoběžnou linii ihned pod ní jsou nulové.[359] V práci je studována nulita dolních blokových Toeplitzových matic v posloupnosti

$$T_0 = A,\ T_1 = \begin{pmatrix} A & \\ B & A \end{pmatrix},\ T_2 = \begin{pmatrix} A & & \\ B & A & \\ & B & A \end{pmatrix},\ \ldots,\ T_i = \begin{pmatrix} A & & & \\ B & A & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & B & A \end{pmatrix},$$

kde matice A a B jsou matice typu $m \times n$, $m \geq n$, a proto matice T_i je matice typu $(i+1)m \times (i+1)n$. Tyto matice tedy v sobě zahrnují případ *typického* tvaru matice, tj. originálního kanonického tvaru matice uvedeného Eduardem Weyrem v 19. století, ale pouze pro matici, která má jediné vlastní číslo λ a jejíž Weyrova charakteristika je homogenní, tj. $\eta(\lambda) = (\eta_i, \eta_i, \ldots, \eta_i)$, $\eta_i = m = n$.

Rok 2011 byl důležitým mezníkem v historii Weyrova kanonického tvaru, neboť mu byla věnována monografie *Advanced Topics in Linear Algebra: Weaving Matrix Problems through the Weyr Form* [OCV1]. O knize (a také o jiné monografii z roku 2013) je pojednáno v samostatné části (viz str. 321).

V roce 2011 vyšlo také krátké pojednání

- *Pairs of matrices, one of which commutes with their commutator* [Bg1],

v němž Gerald Bourgeois studoval zobecnění tzv. *kvazi-komutativity* matic. Pro kvazi-komutativní matice, tj. matice A, B, které obě komutují s maticí

---

[359] Někdy je v definici blokové Toeplitzovy matice požadováno, aby bloky na diagonále byly čtvercové.

V tomto konkrétním článku není v názvu pojmu *dolní bidiagonální bloková Toeplitzova matice* používán přívlastek *dolní.* Běžně se však odlišují *horní* a *dolní* (blokové bidiagonální) Toeplitzovy matice, přičemž matice A je horní (bloková bidiagonální) Toeplitzova matice, právě když matice A^T je dolní (bloková bidiagonální) Toeplitzova matice.

$AB - BA$, existuje invertibilní matice S taková, že $S^{-1}AS$ i $S^{-1}BS$ jsou horní (dolní) trojúhelníkové matice. V případě, že s maticí $AB - BA$ komutuje pouze matice A a řád matic A, B je větší nebo roven 3, již uvedené převedení na trojúhelníkové matice obecně možné není. Bourgeois použil Weyrův kanonický tvar (konkrétně nilpotentní matice řádu 4 s Weyrovou charakteristikou (2, 2) příslušnou jedinému vlastnímu číslu 0) v důkazu tvrzení existenčního charakteru jako příklad matice mající požadované vlastnosti.

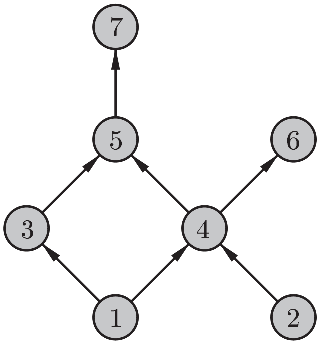
Yaokun Wu a Shizhen Zhao v práci

- *Incidence matrix and cover matrix of nested interval orders* [WZ1]

z roku 2012 úspěšně propojili více matematických disciplín. Po připomenutí pojmu konečné částečně uspořádané množiny P zavedli značení $\lessdot$ pro případ, kdy prvek y pokrývá x, tj. $x \leq y$, $x \neq y$ a neexistuje prvek $z \in P$, $z \neq x$, $z \neq y$, pro který by platilo $x \leq z \leq y$. Dále definovali incidenční algebru množiny P nad polem $\mathcal{F}$ jako algebru funkcí (matic) $f : P \times P \to \mathcal{F}$ takových, že $f(x, y) = 0$, jestliže není $x \leq y$, spolu se sčítáním funkcí (sčítáním matic) a skládáním funkcí (násobením matic)

$$(fg)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z)g(z, y).$$

Ilustrujme vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi právě zavedeným skládáním funkcí a násobením matic na konkrétním příkladu. Uvažujme konečnou množinu $P = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ s částečným uspořádáním $\leq$ definovaným takto: $x \leq y$ právě tehdy, když se v níže uvedeném grafu dostaneme z vrcholu x do vrcholu y po směru šipek nebo když $x = y$.



Uvažujme incidenční algebru množiny P nad polem $\mathbb{C}$ a její dva prvky f, g. Označme $f(i, j) = f_{ij}$ a $g(i, j) = g_{ij}$. Vypočítejme (nejprve v symbolice funkcí) například funkční hodnotu $(fg)(1, 7)$. Dle výše uvedeného vzorce je

$$(fg)(1, 7) = f(1, 1)g(1, 7) + f(1, 3)g(3, 7) + f(1, 4)g(4, 7)+$$
$$+f(1, 5)g(5, 7) + f(1, 7)g(7, 7),$$

neboli

$$(fg)(1,\,7) = f_{11}g_{17} + f_{13}g_{37} + f_{14}g_{47} + f_{15}g_{57} + f_{17}g_{77}.$$

Nyní určeme funkční hodnotu pomocí symboliky matic. Z definice incidenční algebry a zavedení konkrétního částečného uspořádání získáme matice

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & 0 & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} & f_{17} \\ 0 & f_{22} & 0 & f_{24} & f_{25} & f_{26} & f_{27} \\ 0 & 0 & f_{33} & 0 & f_{35} & 0 & f_{37} \\ 0 & 0 & 0 & f_{44} & f_{45} & f_{46} & f_{47} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{55} & 0 & f_{57} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{77} \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & g_{13} & g_{14} & g_{15} & g_{16} & g_{17} \\ 0 & g_{22} & 0 & g_{24} & g_{25} & g_{26} & g_{27} \\ 0 & 0 & g_{33} & 0 & g_{35} & 0 & g_{37} \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} & g_{45} & g_{46} & g_{47} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{55} & 0 & g_{57} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{77} \end{pmatrix},$$

kde blíže nespecifikované prvky jsou libovolná komplexní čísla. Určení funkční hodnoty $(fg)(1,\,7)$ odpovídá násobení prvního řádku matice F a sedmého sloupce matice G, tj.

$$\sum_{k=1}^{7} a_{1k}b_{k7} = a_{11}b_{17} + 0 + a_{13}b_{37} + a_{14}b_{47} + a_{15}b_{57} + 0 + a_{17}b_{77},$$

což koresponduje s výpočtem v symbolice funkcí.

Na incidenční algebře autoři studovali vztahy mezi funkcemi (maticemi), a to především mezi *funkcí* (*maticí*) *incidence* n_P a *funkcí* (*maticí*) *pokrývání* c_P, které zavedli vztahy

$$n_P(x,\,y) = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } x < y, \\ 0, & \text{v ostatních případech,} \end{cases}$$

resp.

$$c_P(x,\,y) = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } x \lessdot y, \\ 0, & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

V otázkách spojených s problematikou podobnosti matic[360] uvedli, že dle *Weyrovy věty*[361] mají nilpotentní matice n_P a c_P stejnou Segreovu charakteristiku,

[360] Zde se přiklonili k terminologii teorie matic.
[361] Weyrovy práce však nezmiňují, referují článek Helene Shapiro *The Weyr characteristic* [Sh2].

právě když $r(n_P^k) = r(c_P^k)$ pro všechna k, a že by bylo zajímavé ověřit, pro která l je $r(n_P^k) = r(c_P^k)$ pro každé $k \leq l$. Dále definovali graf matice[362], k-cestu[363] apod. a na základě tvrzení zvaného Index Theorem[364] dospěli například k závěru, že řády největších Jordanových buněk matic n_P a c_P jsou stejné, tj. i počty prvků Weyrových charakteristik příslušných vlastnímu číslu 0 jsou u obou matic totožné.

Prostor pro publikaci výsledků spojených s Eduardem Weyrem poskytl svazek číslo 436 časopisu Linear Algebra and its Applications z roku 2012. V něm vyšly tři články zmiňující Eduarda Weyra, jejichž autoři působí ve zcela odlišných destinacích. Povědomí o Weyrových výsledcích z 19. století se tak v současné době šíří po celém světě.

První ze zmíněných prací,

- *On commuting matrices in max algebra and in classical nonnegative algebra* [KSS1],

napsali Richardo D. Katz, Hans Schneider a Sergej Sergejev.[365] Weyrovo pojednání *Zur Theorie der bilinearen Formen* citovali v přehledu historie studia komutativity komplexních matic, a to opět díky blízkému vztahu Weyrova kanonického tvaru a množiny navzájem komutujících matic.

S novým termínem *Weyr array* se setkáme v druhém článku nazvaném

- *A parametrization of matrix conjugacy orbit sets as unions of affine planes* [Dg1],

který napsal litevský matematik Peteris Daugulis. Nejedná se však o nic jiného než o Weyrovu charakteristiku matice.

Poslední z příspěvků má název

- *Remarks on the classification of a pair of commuting semilinear operators* [OHKS1].

Vznikl ve spolupráci matematiků z Brazílie, USA a Ukrajiny, jejími autory jsou Debora Duarte de Oliveira, Roger Alan Horn, Tatjana Klimčuk a Vladimir V. Sergejčuk.

Roku 2013 vyšlo ve stejném časopisu pojednání

- *Spectral analysis of inexact constraint preconditioning for symmetric saddle point matrices* [SSi1],

které napsali Debora Sesana a Valeria Simoncini (nar. 1966). Ač se jedná o práci vydanou v období, kdy se monografie [OCV1][366] o Weyrově tvaru již dostala mezi širší matematickou komunitu, obsahuje tuto pasáž:

[362] Definice viz str. 222 této monografie.
[363] Definice viz str. 243 této monografie.
[364] Viz str. 239 této monografie.
[365] Zde se například jedná o spolupráci matematiků, kteří v té době působili po řadě na univerzitách v Argentině, USA a Spojeném království.
[366] Monografie z roku 2011 (stejně jako známý článek [Sh2] Helene Shapiro) je uvedena v seznamu litratury.

Finally, we shall make great use of a variant of the Jordan canonical form, which is called the Weyr canonical form (...). As opposed to the well known Jordan form, the Weyr decomposition is not widely known. ([SSi1], str. 2685)

Po uvedených slovech autorky navíc zdůraznily, že preference Jordanova tvaru před Weyrovým tvarem není vždy žádoucí:

In spite of this, the Weyr form may be simpler to derive for matrices already in block form, as in this context, ant it may provide better structural insight than the usual Jordan form. ([SSi1], str. 2685)

Poznamenejme, že Weyrův kanonický tvar se objevil již v disertační práci

- *Spectral distributions of structured matrix-sequences: tools and applications* [Se1],

kterou Debora Sesana obhájila roku 2011.

Následující svazek časopisu Linear Algebra and its Applications obsahuje další dva články, jejichž autoři si byli vědomi výhod znovuobjevených Weyrových výsledků či postupů. První z textů se nazývá

- *Triangularizing matrix polynomials* [TTZ1].

Jeho autory jsou Leo Taslaman, Françoise Tisseur a Ion Zaballa. V práci nejprve porovnali Segreovu a Weyrovu charakteristiku. Při výkladu řešeného problému, konkrétně triangularizace polynomů $P(\lambda)$, jejichž koeficienty jsou obecně obdélníkové matice nad algebraicky uzavřeným polem $\mathcal{F}$, tj. polynomů

$$P(\lambda) = \lambda^k A_k + \ldots + \lambda A_1 + A_0, \quad A_j \in \mathcal{F}^{n\times m}, \quad j = 0, 1, \ldots, k,$$

autoři používali terminologii související se Segreovou charakteristikou a v závěru práce dosažený výsledek zformulovali v řeči charakteristiky Weyrovy. Přepis do jiné terminologie uvedli následujícími slovy:

That this condition is equivalent to (...) for quadratic matrix polynomials is better visualized if the Weyr characteristic rather than the Segre characteristics is used (...). ([TTZ1], str. 1696)

Druhý text,

- *Determinant of a matrix that commutes with a Jordan matrix* [FMM1],

napsali Josep Ferrer, David Mingueza a María Eulàlia Montoro. Vyjádřili v něm explicitní vzorec pro determinant libovolné matice T nad polem $\mathcal{F}$, která komutuje s danou Jordanovou maticí J, tj. matice T patřící tzv. *centralizátoru* $\mathcal{C}(J)$ matice J. Ihned v úvodu pojednání však upozornili, že dosažený výsledek lze rozšířit i na matici komutující s libovolnou maticí A nad algebraicky uzavřeným polem. Pro takovou matici A existuje regulární matice S splňující vztah $J = S^{-1}AS$, kde J je Jordanův kanonický tvar matice A. Jelikož pro matici $T' \in \mathcal{C}(A)$ platí

$$T'A = AT',$$

je rovněž

$$S^{-1}T'SS^{-1}AS = S^{-1}ASS^{-1}T'S.$$

Odtud dostáváme

$$S^{-1}T'SJ = JS^{-1}T'S,$$

a proto $T = S^{-1}T'S \in \mathcal{C}(J)$. Jelikož pro matici S, přesněji řečeno pro libovolnou invertibilní matici platí $\det S^{-1} = (\det S)^{-1}$, je zřejmě $\det T' = \det T$.

Uveďme hlavní myšlenkové postupy autorů a výsledky práce. Uvažujme Jordanovu matici s jedničkami pod hlavní diagonálou[367] s jediným vlastním číslem a jemu příslušnou Segreovu charakteristiku $\xi(J)$. K této Segreově posloupnosti přiřaďme nové posloupnosti

$$\begin{aligned} N(\xi(J)) &= (n_1, n_2, \dots, n_\tau), \\ S(\xi(J)) &= (s_1, s_2, \dots, s_\tau), \\ D(\xi(J)) &= (d_1, d_2, \dots, d_\tau), \end{aligned}$$

kde $n_1 > n_2 > \dots > n_\tau$ značí navzájem různá čísla vyskytující se v Segreově charakteristice $\xi(J)$, $s_i,\ i = 1, 2, \dots, \tau$, je počet opakování čísla n_i v posloupnosti $\xi(J)$, $d_i = n_i - n_{i+1},\ 1 \le i \le \tau - 1$ a $d_\tau = n_\tau$.

Je-li tedy například $\xi(J) = (6, 6, 3, 3, 2)$, je

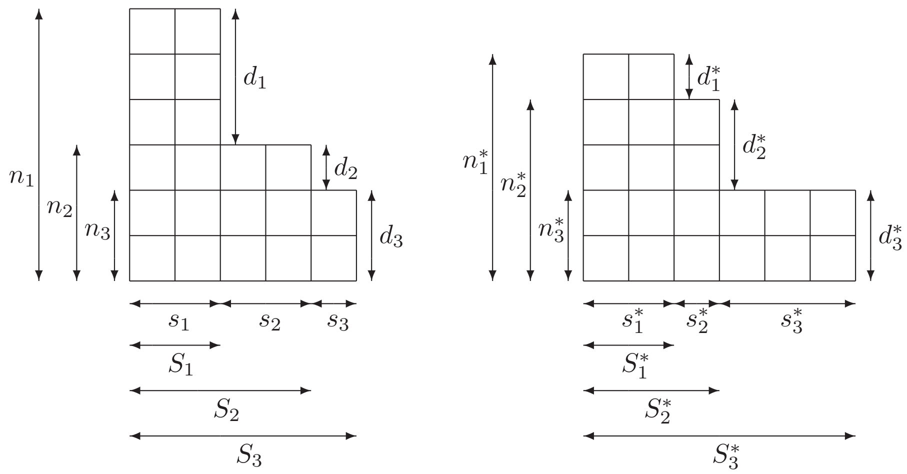
$$\tau = 3, \quad N(\xi(J)) = (6, 3, 2), \quad S(\xi(J)) = (2, 2, 1) \quad \text{a} \quad D(\xi(J)) = (3, 1, 2).$$

Z níže zakreslených Ferrersových diagramů Segreovy charakteristiky $\xi(J) = (6, 6, 3, 3, 2)$ a duální posloupnosti $\xi(J)^*$ k Segreově charakteristice, tj. Weyrovy charakteristiky $\eta(J) = (5, 5, 4, 2, 2, 2)$, je zřejmé, že

$$\begin{aligned} N(\eta(J)) &= N(\xi(J)^*) = (S_\tau, S_{\tau-1}, \dots, S_1), \\ S(\eta(J)) &= S(\xi(J)^*) = (d_\tau, d_{\tau-1}, \dots, d_1), \\ D(\eta(J)) &= D(\xi(J)^*) = (s_\tau, s_{\tau-1}, \dots, s_1), \end{aligned}$$

kde $S_i = \sum_{j=1}^{i} s_j$. V našem příkladu je tedy $S_1 = 2$, $S_2 = 4$, $S_3 = 5$.

[367] Přidržme se zde značení autorů. Při odvozování výsledku pro případ kanonického tvaru s jedničkami v linii ihned nad hlavní diagonálou bychom pracovali analogicky, ale s maticemi transponovanými (místo dolní trojúhelníkové Toeplitzovy matice bychom použili horní Toeplitzovu trojúhelníkovou matici apod.) a využili bychom vztahu pro determinant matice a determinant matice k ní transponované.



Jelikož chceme vypočítat determinant každé matice $T \in \mathcal{C}(J)$, je nutné si uvědomit, jak matice komutující s J vypadají. V této problematice hrají podstatnou roli Toeplitzovy matice: u čtvercových matic se jedná o dolní trojúhelníkové Toeplitzovy matice, pro obdélníkové matice typu $i \times j$, $i > j$, o tzv. dolní Toeplitzovy matice, tj. matice, které mají prvních $i - j$ řádků nulových a na následujících j řádcích je dolní trojúhelníková Toeplitzova matice, a pro obdélníkové matice typu $i \times j$, $i < j$, o tzv. levé Toeplitzovy matice, tj. matice, jejichž prvních i sloupců tvoří dolní trojúhelníková Toeplitzova matice a zbývajících $j - i$ sloupců je nulových. Po zavedení těchto pojmů můžeme popsat již dlouho známý tvar všech matic $T \in \mathcal{C}(J)$:

Každá matice T komutující s danou Jordanovou maticí J s jedním vlastním číslem a Segreovou charakteristikou $\xi(J)$, pro níž $N(\xi(J)) = (n_1, n_2, \ldots, n_\tau)$ a $S(\xi(J)) = (s_1, s_2, \ldots, s_\tau)$, má tvar

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1\tau} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{2\tau} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{\tau 1} & T_{\tau 2} & \cdots & T_{\tau\tau} \end{pmatrix},$$

kde bloky T_{ij} jsou typu $n_i s_i \times n_j s_j, 1 \leq i, j \leq \tau$, a jsou dále děleny na bloky dle následujících pravidel:

- *jestliže $i = j$, potom T_{ii} je rozdělen na $s_i \times s_i$ dolních trojúhelníkových Toeplitzových matic,*
- *jestliže $i < j$, potom T_{ij} je rozdělen na $s_i \times s_j$ dolních Toeplitzových matic,*
- *jestliže $i > j$, potom T_{ij} je rozdělen na $s_i \times s_j$ levých Toeplitzových matic.*

Pro bloky T_{kk} na zobecněné diagonále matice T zaveďme značení

$$T_{kk} = \begin{pmatrix} T^{11}_{n_k} & \cdots & T^{1s_k}_{n_k} \\ T^{21}_{n_k} & \cdots & T^{2s_k}_{n_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T^{s_k1}_{n_k} & \cdots & T^{s_ks_k}_{n_k} \end{pmatrix}, \quad \text{kde } T^{ij}_{n_k} = \begin{pmatrix} x^{ij}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ x^{ij}_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x^{ij}_{n_k-1} & \cdots & x^{ij}_1 & 0 \\ x^{ij}_{n_k} & x^{ij}_{n_k-1} & \cdot & x^{ij}_1 \end{pmatrix},$$

$1 \le i,\ j \le s_k$. Použijeme-li při výpočtu determinantu bloku T_{kk} opakovaně Laplaceův rozvoj, dostaneme první z výsledků obsažených v článku:

$$\det T_{kk} = \left(\det \begin{pmatrix} x^{11}_1 & x^{12}_1 & \cdots & x^{1s_k}_1 \\ x^{21}_1 & x^{22}_1 & \cdots & x^{2s_k}_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{s_k-1,\,1}_1 & x^{s_k-1,\,2}_1 & \cdots & x^{s_k-1,\,s_k}_1 \\ x^{s_k1}_1 & x^{s_k2}_1 & \cdots & x^{s_ks_k}_1 \end{pmatrix} \right)^{n_k} \qquad (*)$$

Determinant matice T_{kk} tedy závisí pouze na prvcích x^{ij}_1 bloků $T^{ij}_{n_k}$, tj. na prvcích v levém horním rohu (a tedy i na hlavní diagonále) zmíněných bloků. Z toho plyne, že determinant bloku T_{kk} závisí jen na s_k^2 prvcích.

Odvoďme nyní vztah pro determinant matice $K \in \mathcal{C}(W)$, kde W je Weyrův blok. Je známo, jak vypají matice K komutující s daným Weyrovým blokem s příslušnou Weyrovou charakteristikou $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t)$ (viz str. 283). Při výše zavedeném značení je $t = n_1$, a proto matice komutující s daným Weyrovým blokem lze rozdělit na horní trojúhelníkovou blokovou matici tvaru

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n_1} \\ 0 & K_{22} & \cdots & K_{2n_1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & K_{n_1n_1} \end{pmatrix}.$$

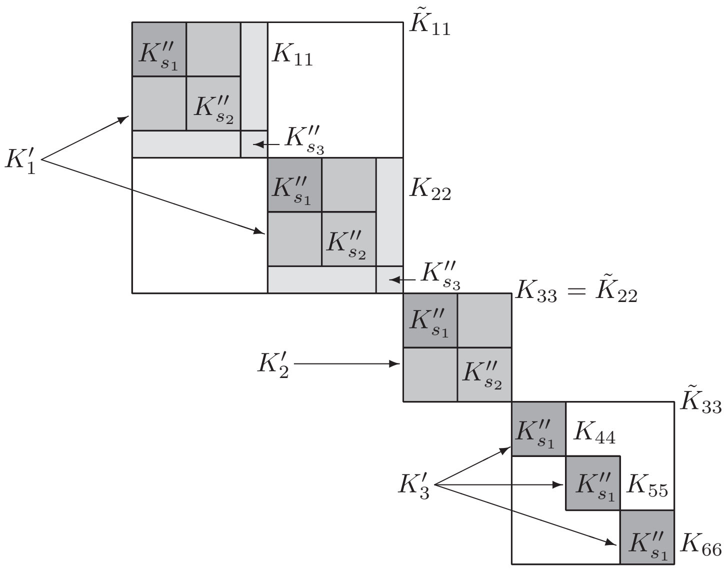
Tuto matici však lze s využitím zavedených posloupností přerozdělit do tvaru

$$K = \begin{pmatrix} \tilde{K}_{11} & \tilde{K}_{12} & \cdots & \tilde{K}_{1\tau} \\ 0 & \tilde{K}_{22} & \cdots & \tilde{K}_{2\tau} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{K}_{\tau\tau} \end{pmatrix},$$

kde každý blok $\tilde{K}_{jj}$ lze rozdělit tak, že na jeho diagonále je $d_{\tau-j+1}$-krát tatáž čtvercová matice K'_j řádu $S_{\tau-j+1}$. (V našem konkrétním příkladu tedy na diagonále matice $\tilde{K}_{11}$ je $(d_3 =)$2-krát matice K'_1 řádu $(S_3 =)$5, na diagonále matice $\tilde{K}_{22}$ je $(d_2 =)$1-krát matice K'_2 řádu $(S_2 =)$4 a na diagonále matice $\tilde{K}_{33}$ je $(d_1 =)$3-krát matice K'_3 řádu $(S_2 =)$2.) Vzhledem k vlastnostem zavedených posloupností, vztahu $S_{\tau-1+1} = \sum_{i=1}^{\tau-1+1} s_i$ a postupu, kterým vzniká matice K'_j z matice K'_{j+1}, lze matici K'_j řádu $S_{\tau-j+1}$ dále rozdělit na bloky a pohlížet na ni jako na horní trojúhelníkovou blokovou matici, jejíž bloky K''_{s_j} na zobecněné diagonále jsou čtvercovými maticemi řádu s_j, tj.

$$K'_j = \begin{pmatrix} K''_{s_1} & \cdots & \cdots & \\ 0 & K''_{s_2} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & K''_{s_{\tau-j+1}} \end{pmatrix}, \qquad s_j \in \mathcal{F}^{s_j \times s_j}.$$

Toto postupné přerozdělení bloků na zobecněné diagonále matice K lze pro náš konkrétní příklad schematicky zachytit následujícím obrázkem:



Pomocí velmi známého vztahu pro determinant horní (dolní) blokově trojúhelníkové matice tedy postupně dostáváme

$$\det K = \det \tilde{K}_{11} \det \tilde{K}_{22} \cdots \det \tilde{K}_{\tau\tau} = (\det K'_1)^{d_\tau} (\det K'_2)^{d_{\tau-1}} \cdots (\det K'_\tau)^{d_1} =$$

$$= (\det K''_{s_1} \det K''_{s_2} \cdots \det K''_{s_\tau})^{d_\tau} (\det K''_{s_1} \det K''_{s_2} \cdots \det K''_{s_{\tau-1}})^{d_{\tau-1}} \cdots$$

$$\cdots (\det K''_{s_1})^{d_1} =$$

$$= (\det K''_{s_1})^{n_1} (\det K''_{s_2})^{n_2} \cdots (\det K''_{s_\tau})^{n_\tau}.$$

Platí proto další z výsledků článku:

Pro každou matici K komutující s daným Weyrovým blokem s příslušnou Weyrovou charakteristikou platí

$$\det K = (\det K''_{s_1})^{n_1} (\det K''_{s_2})^{n_2} \cdots (\det K''_{s_\tau})^{n_\tau}.$$

Determinant $\det K$ *závisí na* $s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_\tau^2$ *prvcích.*

Tento vztah hraje klíčovou roli k odvození explicitní formule pro výpočet $\det T,\ T \in \mathcal{C}(J)$.

Pro každou matici T komutující s danou Jordanovou maticí J s jediným vlastním číslem a s příslušnou Segreovou charakteristikou platí

$$\det T = \det T_{11} \det T_{22} \cdots \det T_{\tau\tau}, \qquad (**)$$

přičemž každý z determinantů $\det T_{kk},\ 1 \le k \le \tau$, *lze vypočítat pomocí výše uvedeného vztahu* $(*)$.

Pro zorientování se v množství indexů reprodukujme ještě konkrétní, v článku uvedený[368] příklad výpočtu determinantu matice T komutující s maticí, která má jediné vlastní číslo a jejíž Segreova charakteristika příslušná k tomuto vlastnímu číslu je $\xi(J) = (3, 3, 2, 2, 2, 1)$. Tedy $N(\xi(J)) = (3, 2, 1)$, $S(\xi(J)) = (2, 3, 1)$ a determinant závisí na $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 2^2 + 3^2 + 1^2 = 14$ prvcích. Matice T má tvar

T_{11} $\qquad\qquad$ T_{22}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|cc|cc|cc|c}
x_1 & 0 & 0 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_{15} & x_1 & 0 & x_{17} & x_2 & 0 & x_{49} & 0 & x_{51} & 0 & x_{53} & 0 & 0 \\
x_{16} & x_{15} & x_1 & x_{18} & x_{17} & x_2 & x_{50} & x_{49} & x_{52} & x_{51} & x_{54} & x_{53} & x_{55} \\
\hline
x_3 & 0 & 0 & x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x_{19} & x_3 & 0 & x_{21} & x_4 & 0 & x_{56} & 0 & x_{58} & 0 & x_{60} & 0 & 0 \\
x_{20} & x_{19} & x_3 & x_{22} & x_{21} & x_4 & x_{57} & x_{56} & x_{59} & x_{58} & x_{61} & x_{60} & x_{62} \\
\hline
x_{32} & 0 & 0 & x_{34} & 0 & 0 & x_5 & 0 & x_6 & 0 & x_7 & 0 & 0 \\
x_{33} & x_{32} & 0 & x_{35} & x_{34} & 0 & x_{23} & x_5 & x_{24} & x_6 & x_{25} & x_7 & x_{63} \\
\hline
x_{36} & 0 & 0 & x_{38} & 0 & 0 & x_8 & 0 & x_9 & 0 & x_{10} & 0 & 0 \\
x_{37} & x_{36} & 0 & x_{39} & x_{38} & 0 & x_{26} & x_8 & x_{27} & x_9 & x_{28} & x_{10} & x_{64} \\
\hline
x_{40} & 0 & 0 & x_{42} & 0 & 0 & x_{11} & 0 & x_{12} & 0 & x_{13} & 0 & 0 \\
x_{41} & x_{40} & 0 & x_{43} & x_{42} & 0 & x_{29} & x_{11} & x_{30} & x_{12} & x_{31} & x_{13} & x_{65} \\
\hline
x_{44} & 0 & 0 & x_{45} & 0 & 0 & x_{46} & 0 & x_{47} & 0 & x_{48} & 0 & x_{14}
\end{array}\right)$$

T_{33}

a pro její determinant platí

$$\det T = \left(\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\right)^3 \cdot \left(\det \begin{pmatrix} x_5 & x_6 & x_7 \\ x_8 & x_9 & x_{10} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} \end{pmatrix}\right)^2 \cdot \det (x_{14}).$$

---

[368] Viz [FMM1], Example 5.2, str. 3953.

Poznamenejme, že matice $\bar{T}$ komutuje s obecnou Jordanovou maticí s různými vlastními čísly λ_i, $i = 1, 2, \ldots, u$, právě tehdy, když je blokovou diagonální maticí, jejíž každý blok $\bar{T}_{ii}$, $i = 1, 2, \ldots, u$, na diagonále komutuje s Jordanovým blokem příslušným k jedinému vlastnímu číslu λ_i. Proto

$$\det \bar{T} = \det \bar{T}_{11} \det \bar{T}_{22} \cdots \det \bar{T}_{uu},$$

kde každý z determinantů $\det \bar{T}_{ii}$, $i = 1, 2, \ldots, u$, lze vypočítat pomocí výše uvedeného vzorce $(**)$.

Weyrovu charakteristiku zmínila Françoise Chatelin (nar. 1941) v druhém, přepracovaném[369] vydání knihy

- *Eigenvalues of Matrices* [Cha],

které bylo publikováno v roce 2013. Charakteristická čísla matice autorka nazvala jednoduše *Weyrova čísla*.

Přibližně na jedné stránce vysvětlil Weyrův kanonický tvar Carl Wilhelm Reinhold de Boor ve své e-knize

- *Linear Algebra* [Bp1]

datované rokem 2013. K definici Weyrova tvaru použil přímo jednotlivá charakteristická čísla příslušná k obecnému vlastnímu číslu matice, Weyrovu charakteristiku však nedefinoval. Tato posloupnost se naopak spolu se Segreovou charakteristikou stala vhodným prostředkem k důkazu jisté věty, kterou téhož roku zformulovali v práci

- *Jordan forms of real and complex matrices under rank one perturbations* [MMRR1]

Christian Mehl, Volker Ludwig Mehrmann (nar. 1955), André C. M. Ran a Leiba Rodman (nar. 1949).

Weyrův kanonický tvar a Weyrova charakteristika tvoří hlavní náplň přibližně dvoustránkového paragrafu *Weyr Canonical Form*, který je součástí šesté kapitoly

- *Canonical Forms* [Hb1]

druhého vydání (2013) obsáhlé publikace *Handbook of Linear Algebra*. Jednotlivé kapitoly knihy dodali různí autoři, část o kanonických tvarech napsala Leslie Hogben, která byla i editorkou celého díla. V literatuře k šesté kapitole uvedla monografii *Advanced Topics in Linear Algebra: Weaving Matrix Problems through the Weyr Form* [OCV1] i druhé vydání knihy *Matrix Analysis* [HJ1], připojila také poděkování Rogeru Hornovi za pomoc především s paragrafem *Weyr Canonical Form*. Je tedy zřejmé, odkud autorka poznatky o Weyrových výsledcích čerpala.

V roce 2014 vzešel ze spolupráce již zmíněné ukrajinské dvojice Lena Klimenko a Vladimir V. Sergejčuk další text obsahující Weyrův kanonický tvar. Jedná se o práci

[369] První vydání je z roku 1993. Jedná se o překlad původní práce z francouzštiny, která byla publikována ve dvou svazcích (1988 a 1989).

- *An informal introduction to perturbations of matrices determined up to similarity or congruence* [KS2]

úzce spojenou s problematikou „ranců“ matic, jejich uspořádáním a vizualizací této relace pomocí grafu. Na rozdíl od výše uvedeného textu *Block triangular miniversal deformations of matrices and matrix pencils* [KS1] však tentokrát autoři v seznamu literatury žádnou Weyrovu práci neuvedli.

Poznamenejme ještě, že na konci roku 2013 byl do časopisu Linear Algebra and Its Applications předložen Johnem Holbrookem a Kevinem C. O'Mearou článek

- *Some thoughts on Gerstenhaber's theorem* [HO1],

který pouze s drobnými připomínkami prošel recenzním řízením a v létě roku 2014 byl akceptován. Publikován v elektronické podobě byl na podzim téhož roku, v tištěné verzi vyjde v lednu 2015. Cílem článku je propagace výsledků spojených s Gerstenhaberovou větou.[370] Weyrův kanonický tvar je pro výklad klíčovým pojmem. I zde se projevuje jeho výhoda v porovnání s tvarem Jordanovým: poměrně složité výpočty zformulované v „řeči“ Weyrova tvaru netrvají v programu Matlab příliš dlouho, v případě Jordanova tvaru by však byl algoritmus těžko zvládnutelný.[371]

6.8 Historické články

Výsledky Eduarda Weyra nalezly odezvu nejen v odborných matematických časopisech, jeho pracemi se zabývali i historikové matematiky.

V průběhu sedmdesátých let publikoval několik článků týkajících se historie algebry Thomas Hawkins. Práce

- *Hypercomplex numbers, Lie groups, and the creation of group representation theory* [Hw1]

z roku 1972 již byla zmíněna v druhé kapitole, neboť v ní jsou odkazy na Weyrovu práci o teorii determinantů a na jeden z Weyrových článků věnovaný lineárním asociativním algebrám. Hawkinsův článek však obsahuje i ohlasy na Weyrovy krátké, francouzsky psané texty *Sur la théorie des matrices* a *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* z roku 1885, které mají charakter předběžného oznámení výsledků Weyrovy teorie. Oba jsou citovány i v Hawkinsových pracích z roku 1977 nazvaných

- *Another look at Cayley and the theory of matrices* [Hw4],

resp.

- *Weierstrass and the theory of matrices* [Hw5],

[370] Viz strana 331 této monografie.

[371] Kevin C. O'Meara je spoluautorem monografie *Advanced Topics in Linear Algebra: Weaving Matrix Problems through the Weyr Form* [OCV1] o Weyrově tvaru (rozbor knihy viz dále). Její 5. kapitola se nazývá *Gerstenhaber's Theorem*.

Děkujeme tímto Kevinu C. O'Mearovi za veškeré informace, které o připravovaném článku poskytl v emailové korespondenci.

v nichž jsou dále referovány i Weyrovy rozsáhlé práce přinášející podrobný výklad jeho teorie charakteristických čísel – *Zur Theorie der bilinearen Formen* (v [Hw4]) a *O theorii forem bilinearných* i *Zur Theorie der bilinearen Formen* (v [Hw5]). Z prvního Hawkinsova článku z roku 1977 je převzata následující citace, jejíž závěr poodkrývá skutečnost, jaké výsledky mohly českému matematikovi posloužit jako inspirace při budování jeho teorie. Jak však již víme, Eduard Weyr se o výsledky svých současníků příliš neopíral a vydal se svou vlastní originální cestou:

Some of the defects in the papers of Cayley and Sylvester, including their treatment of Cayley's theorem on commuting matrices, were remedied by E. Weyr [1885a, 1885b, 1890], A. Buchheim [...] and H. Taber [...], all of whom employed theorems on canonical matrix forms. Buchheim and Taber used the Jordan canonical form, which Buchheim learned from his study of Jordan's Traité des substitutions [...] and Taber learned through Buchheim's papers. Weyr devised his own theory of canonical matrix forms based upon Sylvester's concept of the nullity of a matrix. When Weyr wrote [1890] he was acquainted with Weierstrass' theory of elementary divisors and Frobenius' paper [1878], but it is unclear whether he was acquainted with them when he wrote his notes of 1885. ([Hw4], str. 107)

Na Weyrovo pojednání *Zur Theorie der bilinearen Formen* reagoval i nizozemský matematik Bartel Leendert van der Waerden (1903–1996) v knize

- *A history of algebra. From al-Khwārizmī to Emmy Noether* [Wn1],

kterou publikoval roku 1985.

V roce 2006 absolvoval v Paříži svá doktorská studia Frédéric Brechenmacher (nar. 1971) disertační prací

- *Histoire du théorème de Jordan de la décomposition matricielle (1870–1930). Formes de représentation et méthodes de décomposition* [Bm1].

Vzhledem k názvu, a tedy i náplni práce není překvapivé, že byl obeznámen s Weyrovými výsledky, k čemuž zřejmě pomohla i skutečnost, že některé Weyrovy práce byly psány francouzsky.

Brechenmacherovy historické články jsou často charakterizovány značným rozsahem, velkým množstvím citací původních děl, vloženými grafy, schématy a tabulkami, které jsou většinou umístěny na konci práce.

V roce obhajoby Brechenmacher publikoval sedmdesátistránkovou práci

- *Les matrices: formes de représentation et pratiques opératoires (1850–1930)* [Bm2].

Ihned v jejím úvodu jsou pro srovnání uvedeny originální definice z prací Sylvestera, Cayleyho a Weyra. Text práce je dělen do tří větších celků, ty dále do dvou či tří sekcí. Z celkem osmi sekcí jsou výsledkům Eduarda Weyra věnovány dvě. První z nich (přibližně třístránková) je nazvána *La formation des "espèces de matrices" d'Eduard Weyr*. Věnována je oběma Weyrovým francouzsky psaným statím z roku 1885 a je psána formou citací úryvků z těchto prací a jejich komentářů. V úvodu je zdůrazněno Weyrovo ojedinělé přijetí teorie matic a jeho vztah k výsledkům Jamese Josepha Sylvestera:

Sur le continent, le premier mathématicien à employer la notion de matrice en référence à Cayley est un géomètre de Prague dénommé Eduard Weyr ... Les premiers travaux de Weyr sur les matrices sont inspirés des publications faites par Sylvester ... entre 1882 et 1885 ...

... c'est surtout la notion de matrice dérogatoire de Sylvester qui va inspirer les travaux du géomètre de Prague par un rapprochement avec le problème de la caractérisation des substitutions semblables. ([Bm2], online verze, str. 29)

Druhá z uvažovaných částí (přibližně čtyřstránková) má název *La rencontre de la théorie des formes bilinéaires et de la théorie des matrices.* Je věnována Weyrově práci *Zur Theorie der bilinearen Formen* z roku 1890, česká verze zmíněna není. Citace z německé práce jsou Brechenmacherem interpretovány v jeho francouzském překladu. Citujme opět část úvodu této partie:[372]

Le mémoire intitulé "Sur les formes bilinéaires", publié par Weyr dans le premier numéro des Monasberichte für Mathematik und Physik, a pour objet de réorganiser la théorie des formes bilinéaires par la notion "plus abstraite" de matrice ... ([Bm2], online verze, str. 33)

V seznamu literatury je uvedeno šest Weyrových publikací.[373] Teprve po uvedení bibliografických informací je do práce vloženo 15 samostatných listů, z nichž každý shrnuje formou tabulek, grafů apod. určitou problematiku. Tři z nich mají úzkou spojitost s Eduardem Weyrem. V pořadí osmý list, nazvaný *Quelques éléments biographiques sur Eduard Weyr*, je věnován stručnému představení jeho života, v pořadí jedenáctý a dvanáctý list, nazvané *Comparaison du calcul des matrices de Weyr et de la théorie des matrices de Cayley* a *Comparaisons entre Weyr et Cayley*, se zabývají porovnáním Weyrova a Cayleyova přístupu k definici matice a k maticovým operacím. To vše je zachyceno ve dvou sloupcích, levý je věnovaný Cayleymu a pravý Weyrovi.

Na základě Brechenmacherovy disertační práce bylo roku 2008 publikováno pojednání

- *Histoire du théorème de Jordan de la décomposition matricielle (1870–1930)* [Bm3].

Zde není Weyrovi věnováno příliš prostoru, citována je pouze Weyrova práce *Zur Theorie der bilinearen Formen.* Obdobně je tomu u Brechenmacherova anglicky psaného textu z roku 2011 nazvaného

- *Algebraic generality vs arithmetic generality in the controversy between C. Jordan and L. Kronecker (1874)* [Bm5].

Poslední z prací Frédérica Brechenmachera, kterou zmíníme, je

- *Une histoire de l'universalité des matrices mathématiques* [Bm4]

z roku 2010. V ní je popsán vývoj komunity zabývající se teorií matic od jejích izolovaných výsledků až k jednotné symbolice. Součástí tohoto pojednání jsou opět dodatky. Upozorněme, že jsou zde uvedeny zajímavé sloupcové diagramy

[372] Ukázka je přepsána doslovně, včetně nedoklepu a nesprávně uvedeného zdroje. Uvažovaná publikace vyšla v časopisu Monatshefte für Mathematik und Physik.
[373] Konkrétně se jedná o práce [We3], [We5], [We6], [We9], [We10] a [We13].

(každý sloupec pro období pěti let v celkovém časovém rozmezí od roku 1871 do roku 2000), které znázorňují počet publikací, v nichž se vyskytuje termín matice, počet publikací s termínem matice v názvu apod. V seznamu literatury je obsažena Weyrova práce *Zur Theorie der bilinearen Formen* a rovněž monografie Jindřicha Bečváře (a kol.) *Eduard Weyr (1852–1903)* – viz další kapitola.

6.9 Monografie z let 2011 a 2013

V roce 2011 vyšla monografie, která je věnována Weyrovu kanonickému tvaru a která má Weyrovo jméno přímo v názvu. Jmenuje se

- *Advanced Topics in Linear Algebra: Weaving Matrix Problems through the Weyr Form* [OCV1].

Původně zamýšlený název knihy mající čtyři sta stran, *The Weyr Form: A Useful Alternative to the Jordan Canonical Form*, upozorňoval na českého matematika ještě více. Změněn byl na návrh dvou recenzentů, kteří doporučili modifikovat titul tak, aby lépe vyjadřoval širší náplň knihy. Nahlédneme-li do její verze před oponentským řízením[374] a současně do publikovaného provedení, zjistíme, že názvy kapitol a podkapitol zůstaly nezměněny, kniha byla (vedle změny názvu) pouze nově rozdělena na dvě části.

Než se dostaneme k rozboru knihy, nemůžeme opomenout její autory. Monografii napsali Kevin C. O'Meara, John Clark a Charles Irvin Vinsonhaler. Připomeňme, že O'Meara a Vinsonhaler jsou autoři článku, v němž Weyrův kanonický tvar nazývali *H-form*. V názvu knihy, k radosti české matematiky, však použili pro tento kanonický tvar termín odkazující na Eduarda Weyra.[375]

Kniha je psána uvolněným stylem, z něhož je znát potěšení autorů z tématu. Výklad je však veden zcela exaktně, je použita přesná matematická terminologie. Monografii zlidšťují poznámky nejrůznějšího druhu uvedené v předmluvě knihy, v úvodech k jednotlivým kapitolám či v poznámkách pod čarou.[376]

---

[374] Děkujeme panu profesoru Miroslavu Fiedlerovi za laskavé zapůjčení předběžné verze knihy z roku 2010, která ještě nese původní název.

[375] I v letech, v nichž monografie vznikala, byli autoři spojeni s University of Connecticut, se školou mající za maskota huskyho. O jejich působišti je těžké rozhodnout. O tom svědčí i skutečnost, že v pracovní verzi z roku 2010 je u O'Mearyho uvedeno místo *Brisbane, Australia*, u Clarka *University of Otago, New Zealand* a u Vinsonhalera *University of Connecticut, Storrs, USA*, zatímco na obalu knihy je údaj následující: *Kevin C. O'Meara … based mostly at the University of Canterbury, New Zealand, but with many visits to the University of Connecticut, USA.* Z poděkování uvnitř monografie je zřejmé, že se matematikové velmi často setkávali a pobývali na více univerzitách po světě. (Pro zajímavost podotkněme, že na jedné z těchto univerzit, konkrétně na University of Otago, studoval A. C. Aitken.)

Toto nelehké setkávání bylo potvrzeno i v osobní korespondenci s Kevinem O'Mearou, který sepsal milý osobní vzpomínkový text *My recollections of rediscovering the Weyr form* (viz str. 341) na období, v němž monografie [OCV1] vznikala.

Je zajímavé, že se trojice autorů během psaní knihy nikdy nesetkala v kompletní sestavě. Jejich zřejmě jediná společná fotografie byla pořízena roku 1987 v Hobartu (Tasmanie, Austrálie) na konferenci věnované teorii okruhů. Ač se tehdy více znali pouze Kevin O'Meara a Charles Vinsonhaler, je překvapující, že se při focení všichni tři spoluautoři náhodně postavili vedle sebe (viz fotografie na str. 383).

[376] Na začátku knihy je přibližně dvoustránková pasáž nazvaná *Our style*, v níž autoři „obhajují“ volbu svého slohu.

Uveďme například věty z poděkování autorů:

First and foremost, I'm most grateful to Kevin and Chuck for inviting me on board the good ship Weyr form. ([OCV1], str. xxii, J. Clark)

The biggest thanks goes to my family … They happily adopted a new member into the family, "the book". ([OCV1], str. xxii, K. O'Meara)

Autoři se nevyhýbali ani použití rčení, aforismů, idiomů. Předmluva knihy začíná následujícími slovy, která vyjadřují jakýsi dluh vůči výsledkům Eduarda Weyra:

"Old habits die hard." This maxim may help explain why the Weyr form has been almost completely overshadowed by its cousin, the Jordan canonical form. Most have never even heard of the Weyr form, a matrix canonical form discovered by the Czech mathematician Eduard Weyr in 1885. In the 2007 edition of the Handbook of Linear Algebra, a 1,400-page, authoritative reference on linear algebra matters, there is not a single mention of the Weyr form (or its associated Weyr characteristic). But this canonical form is as useful as the Jordan form, … Our book is in part an attempt to remedy this unfortunate situation of a grossly underutilized mathematical tool, by making the Weyr form more accessible to those who use linear algebra at its higher level. Of course, that class includes most mathematicians, and many others as well in the sciences, biosciences, and engineering. And we hope our book also helps popularize the Weyr form by demonstrating its topical relevance, to both "pure" and "applied" mathematics. We believe the applications to be interesting and surprising.
([OCV1], str. xi)

Ukázka zároveň nastínila obsah monografie. Přesnější představu umožňují následující odstavce uvedené na zadní straně desek, které velmi výstižně náplň knihy popisují.

… Discovered by Eduard Weyr in 1885, the Weyr form outperforms the Jordan form in a number of mathematical situations, yet it remains somewhat of a mystery, even to many who are skilled in linear algebra.

Written in an engaging style, this book presents various advanced topics in linear algebra linked through the Weyr form. Kevin O'Meara, John Clark, and Charles Vinsonhaler develop the Weyr form from scratch and include an algorithm for computing it. A fascinating duality exists between the Weyr form and the Jordan form. Developing an understanding of both forms will allow students and researchers to exploit the mathematical capabilities of each in varying situations.

Weaving together ideas and applications from various mathematical disciplines, Advanced Topics in Linear Algebra is much more than a derivation of the Weyr form. It presents novel applications of linear algebra, such as matrix commutativity problems, approximate simultaneous diagonalization, and algebraic geometry, with the latter two having topical connections to phylogenetic invariants in biomathematics and multivariate interpolation. Among the related mathematical disciplines from which the book draws ideas are commutative and noncommutative ring theory, module theory, field theory, topology, and *algebraic geometry. Numerous examples and current open problems are included, increasing the book's utility as a graduate text or as a reference for mathematicians and researches in linear algebra.*

Práce je rozdělená na dvě části srovnatelné rozsahem. První se nazývá *The Weyr Form and Its Properties*, druhá *Applications of the Weyr Form*. První část obsahuje čtyři kapitoly, jejichž názvy jsou

1 Background Linear Algebra,
2 The Weyr Form,
3 Centralizers,
4 The Module Setting.

Druhá část obsahuje tři kapitoly nesoucí názvy

5 Gerstenhaber's Theorem,
6 Approximate Simultaneous Diagonalization,
7 Algebraic Varieties.

V závěru každé ze sedmi kapitol je partie věnovaná životu některého z matematiků nebo dvojice matematiků, kteří hráli podstatnou roli v dané problematice. Jedná se o následující biografické poznámky:

Biographical Notes on Jordan and Sylvester,
Biographical Note on Weyr,
Biographical Note on Frobenius,
Biographical Note on Von Neumann,
Biographical Notes on Cayley and Hamilton,
Biographical Notes on Motzkin and Taussky,
Biographical Notes on Hilbert and Noether.

Další historické poznámky jsou občas vloženy i uvnitř kapitol. K historii matematiky autoři napsali:

It is easy to forget that mathematics has been, and continues to be, developed by real people, each generation building on the work of the previous – not tearing it down to start again, as happens in many others disciplines. ([OCV1], str. xiv)

Vraťme se k jednotlivým kapitolám první části, která obsahuje především představení Weyrova tvaru a jeho vlastností, zejména ke kapitole druhé, věnované takřka výhradně Weyrovu kanonickému tvaru.

První kapitola sumarizuje některé důležité pojmy lineární algebry, které budou v textu používány, a představuje symboliku a terminologii používanou v knize. Začíná u triviálních pojmů (algebraicky uzavřené pole, hodnost, nulita a jádro lineární transformace), pokračuje přes pojmy spjaté se spektrálními vlastnostmi matice (vlastní číslo, vlastní vektor, charakteristická rovnice, Cayleyova-Hamiltonova věta apod.). Dále je věnována pozornost blokovým maticím, blokově trojúhelníkovým maticím, podobnosti matic, diagonalizovatelnosti matice či nilpotentním maticím. Další strany jsou o známém Jordanově kanonickém tvaru; upozorněme, že Jordanova buňka je nazývána *basic Jordan matrix*, Segreova charakteristika *Jordan structure*.

Druhá kapitola je plně věnována Weyrovu kanonickému tvaru.

Here enters the principal actor ... the form has been rediscovered periodically, under various names ... authors attempted to convey their enthusiasm for the form to others, but the Weyr form has never really caught on. ([OCV1], str. 44)

V úvodu kapitoly se autoři zamýšlejí nad tím, proč byl Weyrův tvar dosud přehlížen a proč je mnohem méně známý než Jordanův kanonický tvar. Uvádějí i banální důvod: Jordanův tvar je „hezčí". Domnívají se rovněž, že matematikové, kteří přišli do styku s Weyrovým kanonickým tvarem pouze povrchně, mohli usoudit, že se jedná až na simultánní permutace řádků a sloupců o Jordanův kanonický tvar, takže se není nutné nový tvar učit. Autoři však upozorňují, že se při bližším studiu ukáže, že pro řešení některých problémů má Weyrův tvar vhodnější vlastnosti než tvar Jordanův.

Autoři ukázali, že Jordanův kanonický tvar a Weyrův kanonický tvar (který prozatím exaktně nedefinovali) jsou maticemi téhož endomorfismu, ale vzhledem k různě uspořádaným bázím. Poté zavedli Weyrův blok příslušný vlastnímu číslu λ, který nazvali *basic Weyr matrix with eigenvalue* λ. Nerostoucí posloupnost řádů bloků na diagonále této matice, tj. Weyrovu charakteristiku matice příslušnou vlastnímu číslu λ, pojmenovali *Weyr structure of a matrix associated with* λ.

Teprve po definici Weyrova kanonického tvaru, který nazvali zkráceně *Weyr form* nebo též *Weyr matrix*, a také po partii věnované jednoznačnosti Weyrova kanonického tvaru, překvapivě zavedli i pojem *Weyr characteristic of A associated with the eigenvalue* λ jako nekonečnou posloupnost $(\eta_1, \eta_2, \ldots)$, kde

$$\eta_i = \operatorname{nul}(A - \lambda E)^i - \operatorname{nul}(A - \lambda E)^{i-1}, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Poté napsali, že v jejich terminologii je posloupnost počátečních nenulových prvků Weyrovy charakteristiky dané matice příslušná vlastnímu číslu λ totožná s Weyrovou strukturou této matice příslušnou stejnému vlastnímu číslu. Ke zvolené terminologii (v poznámce pod čarou) poznamenali:

The corresponding Jordan form term is historically referred to as the Segre characteristic, with no mention of Jordan. For the sake of consistency, we choose "Jordan structure" over "Segre characteristic," and "Weyr structure" over "Weyr characteristic." ([OCV1], str. 61)

V textu jsou občas používány obě varianty, převažuje však posloupnost konečná, tedy Weyrova struktura. Příkladem zdvojení formulace je tvrzení, že dvě matice nad algebraicky uzavřeným polem jsou podobné právě tehdy, když mají stejná vlastní čísla a stejnou Weyrovu charakteristiku – nebo v závorce Weyrovu strukturu – příslušnou těmto vlastním číslům.

Další stránky knihy jsou věnovány půvabné vlastnosti Jordanova a Weyrova kanonického tvaru nilpotentní matice, která se týká násobení obecnou maticí. V textu se s nilpotentní maticí pracuje velmi často, využívá se rozklad aritmetického vektorového prostoru dimenze n na invariantní podprostory a „posunů“ od nenulových vlastních čísel na nulové vlastní číslo.

Uvědomme si, že nilpotentní matice má jediné vlastní číslo 0.[377] Vynásobme matici B zprava Jordanovým kanonickým tvarem J nilpotentní matice A, který má jedinou buňku příslušnou vlastnímu číslu 0 (matici B volíme v následujícím příkladu libovolně, řád matic nechť je například čtyři):[378]

$$BJ = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & e & f & g \\ 0 & i & j & k \\ 0 & m & n & o \end{pmatrix}.$$

Jestliže výslednou matici opět vynásobíme maticí J zprava, dostaneme matici

$$BJ^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & e & f & g \\ 0 & i & j & k \\ 0 & m & n & o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & i & j \\ 0 & 0 & m & n \end{pmatrix},$$

atd. až konečně

$$BJ^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Násobení Jordanovou buňkou příslušnou vlastnímu číslu 0 zprava tedy posouvá sloupce matice B doprava, v jednotlivých součinech přibude jeden, a to první nulový sloupec a současně je poslední sloupec „smazán“.

Zcela analogicky funguje násobení uvedenou maticí zleva, tentokrát se posouvají řádky odspodu nahoru, přibude poslední nulový řádek a vymizí první řádek:

$$JB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[377] Viz Věta 7 na str. 103 této monografie.

[378] Poznamenejme, že čtvercová matice řádu n tvaru

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

se v současné odborné literatuře nazývá *backward shift matrix*. Tento název odráží „posun vektorů“ kanonické báze $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ při endomorfismu $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, jehož maticí vzhledem ke kanonické bázi je uvedená matice: $e_n \to e_{n-1} \to \cdots \to e_2 \to e_1$.

Opětovným násobením výsledného součinu maticí J zleva dojde ke stejným změnám, matice $J^4B = J^5B = \ldots$ budou nulové.

Uvážíme-li případ $B = J$, budou mít matice J, J^2 a J^3 tvary

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a matice $J^4 = J^5 = \ldots$ budou nulové. Dochází tedy k „vysouvání nenulové diagonální linie“ k pravému hornímu rohu schématu.

Je přirozené se dále ptát, zda obdoba těchto jednoduchých a efektních vlastností platí i pro Weyrův kanonický tvar příslušný nilpotentní matici.

Nechť W je Weyrův kanonický tvar příslušný nilpotentní matici A, jejíž Weyrova charakteristika je $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t)$, a B je bloková matice téhož řádu, jejíž bloky na diagonále jsou čtvercové matice řádu $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$ (tj. B je rozdělena na bloky stejně jako Weyrův kanonický tvar W matice A). Vynásobme matici B maticí W zprava (prvky matice B jsou v následujícím příkladu opět libovolné, řády matic B a W jsou sedm, Weyrova charakteristika matice A je $(4, 2, 1)$):

$$BW = \left(\begin{array}{cccc|cc|c} a & b & c & d & \bar{a} & \bar{b} & \breve{a} \\ e & f & g & h & \bar{c} & \bar{d} & \breve{b} \\ k & l & m & n & \bar{e} & \bar{f} & \breve{c} \\ o & p & q & r & \bar{g} & \bar{h} & \breve{d} \\ \hline \tilde{a} & \tilde{b} & \tilde{c} & \tilde{d} & s & t & \bar{k} \\ \tilde{e} & \tilde{f} & \tilde{g} & \tilde{h} & u & v & \bar{l} \\ \hline \hat{a} & \hat{b} & \hat{c} & \hat{d} & \tilde{k} & \tilde{l} & w \end{array}\right) \left(\begin{array}{cccc|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & \bar{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e & f & \bar{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k & l & \bar{e} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & o & p & \bar{g} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{a} & \tilde{b} & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{e} & \tilde{f} & u \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{a} & \hat{b} & \tilde{k} \end{array}\right).$$

Dalším násobení maticí W zprava vypočítáme, že

$$BW^2 = \left(\begin{array}{cccc|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & o \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{e} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{a} \end{array}\right)$$

a že BW^3 je nulová matice.

Při násobení maticí W zprava dochází opět k vysouvání sloupců, tentokrát o celé bloky (tj. postupně o η_1, η_2, … sloupců). Vynuluje se postupně prvních η_1, $\eta_1 + \eta_2$, … sloupců, stejný počet sloupců matice B „zmizí“ – nejedná se však nutně o poslední sloupce celé matice, ale o poslední sloupce jednotlivých bloků (při $\eta_i > \eta_{i+1}$ je z bloků B_{ki}, $k = 1, 2, \ldots, t$, kde t je index matice B příslušný vlastnímu číslu 0, smazáno posledních $\eta_i - \eta_{i+1}$ sloupců).

Analogicky funguje násobení Weyrovým tvarem zleva, dochází k posunu celých řad bloků vzhůru (jelikož přesouváme bloky o nižším či stejném počtu řádků do bloků s vyšším či stejným počtem řádků, dochází k doplňování nulových řádků do jednotlivých řad bloků):

$$WB = \left(\begin{array}{cccc|cc|c} 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&0&0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cccc|cc|c} a&b&c&d&\bar{a}&\bar{b}&\breve{a}\\ e&f&g&h&\bar{c}&\bar{d}&\breve{b}\\ k&l&m&n&\bar{e}&\bar{f}&\check{c}\\ o&p&q&r&\bar{g}&\bar{h}&\check{d}\\ \hline \tilde{a}&\tilde{b}&\tilde{c}&\tilde{d}&s&t&\bar{k}\\ \tilde{e}&\tilde{f}&\tilde{g}&\tilde{h}&u&v&\bar{l}\\ \hline \hat{a}&\hat{b}&\hat{c}&\hat{d}&\tilde{k}&\tilde{l}&w \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|cc|c} \tilde{a}&\tilde{b}&\tilde{c}&\tilde{d}&s&t&\bar{k}\\ \tilde{e}&\tilde{f}&\tilde{g}&\tilde{h}&u&v&\bar{l}\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ \hline \hat{a}&\hat{b}&\hat{c}&\hat{d}&\tilde{k}&\tilde{l}&w\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&0&0 \end{array}\right),$$

$$W^2B = \left(\begin{array}{cccc|cc|c} \hat{a}&\hat{b}&\hat{c}&\hat{d}&\tilde{k}&\tilde{l}&w\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&0&0 \end{array}\right),$$

matice W^3B je nulová. Pro $B = W$ je

$$W^2 = \left(\begin{array}{cccc|cc|c} 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&0&0 \end{array}\right),$$

matice W^3 je nulová. Při zvyšování mocnin Weyrova kanonického tvaru W se posunuje „diagonála nenulových bloků“ k pravému hornímu rohu schématu.

Zdá se, že Weyrův kanonický tvar je jakousi „blokovou variantou“ Jordanova kanonického tvaru. Dalším příkladem vlastnosti, která platí pro Jordanův kanonický tvar a současně „v blokové verzi“ pro Weyrův kanonický tvar, je tvar matic, které komutují s těmito kanonickými tvary. Připomeňme, že množina všech matic B, které komutují s danou maticí A, se nazývá *centralizátor* matice A; v monografii je jí věnována samostatná třetí kapitola. Již ve druhé kapitole jsou čtenáři představeny její základní vlastnosti, především pro případ, kdy je danou maticí Jordanova buňka nebo Weyrův blok.

Množina všech matic, které komutují s danou Jordanovou buňkou řádu n, je množina horních trojúhelníkových matic příslušného řádu, jejichž prvky ležící v téže linii rovnoběžné s hlavní diagonálou jsou shodné, tj. množina matic tvaru

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & \cdots & \\ 0 & a & b & c & \cdots & \\ 0 & 0 & a & b & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a & b \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Jedná se tedy o množinu všech horních trojúhelníkových Toeplitzových matic příslušného řádu.

Již dříve (u výsledků, které publikoval G. R. Belitskij) jsme představili tvar matic, které komutují s Weyrovým blokem příslušným k jistému vlastnímu číslu. Připomeňme, že se jedná o horní trojúhelníkové blokové matice, jejichž nenulové bloky A_{ij} jsou tvaru

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} A_{i+1,\,j+1} & * \\ O & * \end{pmatrix}, \qquad \text{pro} \quad 1 \le i \le j \le t-1,$$

kde na místě $*$ jsou matice o libovolných prvcích. Pokud by charakteristická čísla příslušná k témuž vlastnímu číslu byla shodná, bylo by $A_{ij} = A_{i+1,\,j+1}$, $1 \le i \le j \le t-1$, tedy bloky v téže linii rovnoběžné s hlavní diagonálou bloků jsou shodné.

Následující strany knihy jsou věnovány souvislostem mezi komutativitou konečné množiny matic a jejich současným převedením na trojúhelníkový tvar. Nejprve je uvedeno obecnější tvrzení, že pro množinu A_1, A_2, …, A_k navzájem komutujících matic nad algebraicky uzavřeným polem existuje matice C taková, že matice $C^{-1}A_iC$, $i = 1, 2, \ldots, k$, jsou horní trojúhelníkové. Poté je formulována věta, kterou jsme již zmínili, že existuje taková matice C, že matice $C^{-1}A_1C$ má Weyrův kanonický tvar a matice $C^{-1}A_iC$, $i = 2, 3, \ldots, k$, jsou horní trojúhelníkové. Skutečnost, že tuto vlastnost nemá Jordanův kanonický tvar, je doložena konkrétním příkladem (na dvojici komutujících matic).

Další partie pojednává o dualitě mezi Jordanovým a Weyrovým kanonickým tvarem.

The duality enables one to mentally flip back and forth between the two forms and decide which form may be the better in a particular circumstance (e.g., notationally or computationally). ([OCV1] str. 74)

Po jejím skončení se v monografii nachází přibližně dvoustránková pasáž věnovaná historii Weyrova kanonického tvaru (zmíněny jsou jména Weyr, Belitskij, Shapiro, Sergejčuk, v souvislosti s použitím jiného termínu opět Belitskij a Sergejčuk a dále O'Meara, Vinsonhaler, Watanabe a Harima).

V posledním paragrafu druhé kapitoly je představen algoritmus pro výpočet Weyrova kanonického tvaru pro nilpotentní matici (bez znalosti Jordanova kanonického tvaru) a ten je demonstrován na dvou konkrétních příkladech.

Poslední částí druhé, z hlediska české matematiky zřejmě nejzajímavější kapitoly je již zmíněná bibliografická poznámka. V kapitole nazvané *The Weyr Form* byla volba matematika, kterému bude věnována pozornost, zřejmá. Jedná se o stručný životopis Eduarda Weyra (str. 94–95). Je uvedeno místo a den jeho narození, zmíněn jeho bratr Emil, pobyty v Göttingen a v Paříži, originalita jeho přístupu k maticovému aparátu na evropském kontinentu, jeho další odborné zaměření (projektivní a diferenciální geometrie) a v závěru místo a datum jeho úmrtí. Z konkrétních Weyrových prací, v nichž se objevil Weyrův kanonický tvar, jsou uvedeny práce *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* a *Zur Theorie der bilinearen Formen.*

The latter paper is a wonderful piece of mathematics for its time, modern and clear even by today's standards. It is arguably the first paper in linear algebra, as distinct from matrix theory. It is interesting that Weyr cites the work of Frobenius, Sylvester, Cauchy, and Hermite in canonical forms but never mentions Jordan in this context! ... So, was Weyr aware of the Jordan form? ... Jordan's result appeared in the ... language of permutation group theory and did not evolve into the canonical matrix form of choice until the 1930s. In the meantime, Weyr's form sank into obscurity. It would appear that Weyr himself never really appreciated the utility of his own form in commutativity problems, ... ([OCV1], str. 95)

Rovněž v bibliografii knihy jsou, poněkud překvapivě, uvedeny pouze tyto dvě práce. K ospravedlnění autorů však uveďme, že kniha je věnována především Weyrovu kanonickému tvaru, nikoliv obecně rozpracování Weyrovy teorie charakteristických čísel. V druhém Weyrově francouzsky psaném článku z roku 1885 Weyrův *typický tvar* uveden nebyl. Proč nebyl zmíněn český spis *O theorii forem bilinearných* se můžeme jen domnívat. Zřejmě nás napadne, že důvodem je jazyková bariéra.

Třetí kapitola, nazvaná *Centralizers*, se do hloubky věnuje množině všech matic komutujících s Jordanovým a především s Weyrovým kanonickým tvarem. Začíná studiem vlastností množiny $\mathcal{C}(A)$ všech matic komutujících s libovolnou danou čtvercovou maticí A řádu n nad algebraicky uzavřeným polem.

Tato množina tvoří podalgebru prostoru všech čtvercových matic řádu n. Dimenze tohoto podprostoru lze vyjádřit, jak již bylo řečeno, jako součet čtverců všech charakteristických čísel, která přísluší ke všem vlastním číslům matice A. Monografie pracuje opět pouze s nilpotentní maticí. Dimenze prostoru všech matic komutujících s danou nilpotentní maticí A je tedy

$$\dim \mathcal{C}(A) = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \ldots + \eta_t^2,$$

kde $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t)$ je Weyrova charakteristika matice A (příslušná jedinému vlastnímu číslu 0). Monografie uvádí také výpočet této dimenze s pomocí prvků Segreovy charakteristiky $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q)$, neboli tzv. Frobeniovu formuli:

$$\dim \mathcal{C}(A) = \xi_1 + 3\xi_2 + 5\xi_3 + \ldots + (2k-1)\xi_k + \ldots + (2q-1)\xi_q.$$

Rovnost

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 + \ldots + \eta_t^2 = \xi_1 + 3\xi_2 + 5\xi_3 + \ldots + (2k-1)\xi_k + \ldots + (2q-1)\xi_q$$

platí obecně pro jakékoli duální posloupnosti $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q)$ a $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t)$.

Je-li tedy například Weyrova charakteristika dané matice příslušná nulovému vlastnímu číslu (5, 2, 2, 1), je odpovídající Segreova charakteristika (4, 3, 1, 1, 1) a[379]

$$\dim \mathcal{C} = 5^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 = 4 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 7 \cdot 1 + 9 \cdot 1 = 34.$$

Při studiu prostoru $\mathcal{C}(W)$ a $\mathcal{C}(J)$, kde W, resp. J značí Weyrův, resp. Jordanův kanonický tvar matice, jsou opět vyzdvihovány některé kvalitnější vlastnosti prvně jmenovaného tvaru.

The Weyr form is superior to the Jordan form when it comes to centralizers. ([OCV1], str. 96)

Již v druhé kapitole přitom bylo k této otázce napsáno:[380]

If the authors had to pick out just one feature of the Weyr form that makes it so useful for our later applications, better than the Jordan form, they would go for the description of the centralizer of a nilpotent Weyr matrix.
([OCV1], str. 66)

Čtvrtá kapitola *The Module Setting* je z velké části věnována teorií modulů, která je zde vybudována od svých základů. V její poslední třetině je dán Weyrův kanonický tvar do souvislosti s tzv. von Neumannovými regulárními okruhy. Okruh $\mathcal{R}$ se nazývá *von Neumannův regulární*, jestliže ke každému jeho prvku $a \in \mathcal{R}$ existuje prvek $b \in \mathcal{R}$ takový, že $a = aba$.

[379] Vzhledem k vzájemné dualitě posloupností platí i rovnost

$$4^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 28 = 5 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 1.$$

Nevyjadřuje již však dimenzi $\mathcal{C}(A)$.

[380] V recenzi knihy v Zentralblattu (Zbl 1235.15013, John D. Dixon) je rovněž stručně napsáno:

Part I of this book is an elementary introduction to the Weyr form, its elementary properties, and advocacy for the benefits of this form vis-à-vis the Jordan form.

Druhá část knihy je věnována aplikacím Weyrova kanonického tvaru. Na jejím počátku je napsáno:

The time has come to put the Weyr form to work. ([OCV1], str. 201)

V páté kapitole knihy, nazvané *Gerstenhaber's Theorem*, je využit Weyrův kanonický tvar k důkazu tzv. Gerstenhaberovy věty. Uvažujme pole $\mathcal{F}$ a prostor všech čtvercových matic řádu n nad tímto polem. Z Cayleyovy-Hamiltonovy věty plyne, že podalgebra $\mathcal{F}[A]$ generovaná jedinou maticí A může mít dimenzi nejvýše n. Podprostor $\mathcal{F}[A, B]$ generovaný dvěma maticemi A, B může mít při vhodné volbě matic A a B dimenzi n^2. Murray Gerstenhaber roku 1961 v článku *On dominance and varieties of commuting matrices* [Gh2] napsal, že pokud požadujeme, aby matice A a B byly komutující, potom tato dimenze opět nepřevýší n. Gerstenhaber (následován dalšími matematiky) dokázal uvedené tvrzení prostředky algebraické geometrie. Začátkem devadesátých let 20. století byl tento poznatek potvrzen v řeči lineární algebry v článku *Vector bases for two commuting matrices* [BH1], který napsali José Barría a Paul Richard Halmos (1916–2006), a v pojednání *Two-generated commutative matrix subalgebras* [LL1], které publikovali Thomas J. Laffey a Susan Lazarus. Autoři monografie zjednodušili důkaz dvojice Barría-Halmos, který využíval Jordanův kanonický tvar, tím, že vedle tohoto tvaru využili i Weyrův kanonický tvar.

V šesté kapitole se autoři věnují přibližně současně diagonalizovatelným maticím. Rozpracovali zde výsledky, které O'Meara a Vinsonhaler předložili v roce 2006 v článku *On approximately simultaneously diagonalizable matrices* (viz výše). V úvodu kapitoly popisují, jak se k problematice Weyrova kanonického tvaru dostali. Překvapivým počátečním impulsem byl problém řešený fylogenetiky. Při studiu tzv. fylogenetických invariantů v biomatematice, konkrétně v práci *Phylogenetic invariants for the general Markov model of sequence mutation* [AR1][381] z roku 2003, jejímiž autory jsou Elizabeth S. Allman a John A. Rhodes, bylo nutné řešit otázku, kdy je konečná skupina komutujících matic přibližně současně diagonalizovatelná. Na základě studia tohoto problému zavedli O'Meara a Vinsonhaler pojem *H-form* a sepsali jmenovaný článek z roku 2006, v němž „znovuobjevili" Weyrův kanonický tvar. Po pěti letech mu věnovali uvažovanou monografii.

Součástí této kapitoly je také osmistránková pasáž pojednávající o fylogenetice. S jejím napsáním pomohla Elizabeth Allman.

Poslední kapitola propojuje studovanou problematiku s algebraickou geometrií.

But what has algebraic geometry got to do with our linear algebra problems? Quite a lot, as it turns out, because the ASD (approximate simultaneous diagonalization) question for k commuting $n \times n$ *matrices over* $\mathbb{C}$ *.... is equivalent to the irreducibility of a certain affine variety of matrices over* $\mathbb{C}$.
([OCV1], str. 309)

[381] K autorům se tato problematika dostala s pomocí význačného fylogenetika Mika Steela (nar. 1960).

Monografie *Advanced Topics in Linear Algebra: Weaving Matrix Problems through the Weyr Form* se nestala pouze jednou v řadě mnoha knih věnovaných lineární algebře. Evidentně nezůstala bez povšimnutí, povědomí o její existenci se rychle rozšířilo mezi algebraickou komunitou.[382]

Připojme hodnocení monografie Rogera Horna, kterému je v práci věnováno poděkování za cenné připomínky během vzniku publikace:[383]

That book is the best publicity for Weyr's ideas that has ever been published.

Na počátku roku 2013 bylo publikováno druhé vydání monografie

- *Matrix Analysis* [HJ1],

kterou napsali Roger A. Horn a Charles R. Johnson. Jedná se o značně přepracovanou verzi prvního vydání z roku 1985.[384]

Nahlédneme-li do prvního vydání, s Weyrovou charakteristikou či Weyrovým kanonickým tvarem se v něm nesetkáme. Roger Horn, hlavní autor práce, totiž tehdy Weyrovy výsledky neznal:[385]

I did not know about Weyr or his characteristic in the early 1980s, when I worked on the first edition of Matrix Analysis. I had learned nothing about him or his work as a student. I think I first became aware of Weyr and his work through correspondence with Vladimir Sergeichuk in Kiev, starting in the early 1990's. I shared my version of the history of the Weyr form with Kevin O'Meara, who incorporated them into historical remarks on pp. 80–82 of his new book ...

V druhém vydání však je situace zcela odlišná:

When I rewrote the sections of Chapter 3 dealing with the canonical forms for similarity, I recast the exposition in terms of the Weyr characteristic. This is a big change from the first edition, and I hope that readers will find it a clearer way to understand the basic similarity invariants of complex matrices.

Jedná se o přeformulování výsledků o kanonických tvarech s využitím poznatků Weyrovy teorie charakteristických čísel. Sami autoři v předmluvě k druhému vydání uvádějí, že 3. kapitola obsahuje z šedesáti procent novou látku. Uveďme pro srovnání název 3. kapitoly a jejích podkapitol v prvním vydání a v druhém, takřka o třicet let mladším vydání:

3 Canonical forms
  3.0 Introduction
  3.1 The Jordan canonical form: a proof
  3.2 The Jordan canonical form: some observations and applications

[382] Soudíme tak na základě emailové korespondence, která proběhla přibližně rok po zveřejnění monografie a v níž řada matematiků tuto publikaci zmínila. V následujícím roce ji již nacházíme v seznamech pramenů nejnovějších odborných článků.

[383] Z emailové korespondence s autorkou této monografie (říjen 2012).

[384] Kniha byla roku 1989 publikována v ruštině pod názvem *Matričnyj analiz.*

Děkujeme Rogeru Hornovi, který autorce této monografie poskytl již v říjnu roku 2012 kopii třetí, z hlediska Weyrových výsledků stěžejní kapitoly připravovaného druhého vydání.

[385] Z emailové korespondence s autorkou této monografie (říjen 2012). Totéž platí i pro úryvek následující.

3.3 Polynomials and matrices: the minimal polynomial
3.4 Other canonical forms and factorizations
3.5 Triangular factorizations

3 Canonical Forms for Similarity and Triangular Factorizations
3.0 Introduction
3.1 The Jordan canonical form theorem
3.2 Consequences for the Jordan canonical form
3.3 The minimal polynomial and the companion matrix
3.4 The real Jordan and Weyr canonical forms
3.5 Triangular factorizations and canonical forms

Weyrova charakteristika je přitom zavedena již v podkapitole 3.1, a to pomocí rozdílu hodností (nikoli nulit) matic $(A-\lambda E)^k$ a $(A-\lambda E)^{k-1}$. K terminologii poznamenejme, že monografie používá v podstatě „naše" termíny: *Weyr characteristic*, *Weyr block* či *Weyr canonical form*.

Zdůrazněny jsou opět dvě specifické vlastnosti Weyrova kanonického tvaru: jednak jednoduchý tvar matic, které s ním komutují, a dále existence invertibilní matice, která převádí podobnou transformací konečnou množinu navzájem komutujících matic na horní blokově trojúhelníkové matice, z nichž jedna je ve Weyrově kanonickém tvaru.

Součástí 3. kapitoly je i doporučená literatura pro další četbu. Zmíněny jsou opět nám známá jména: Weyr, Shapiro, O'Meara, Clark, Vinsonhaler, Belitskij, Sergejčuk. V souvislosti s větou o převodu matice na horní trojúhelníkovou matici pomocí podobné transformace je zmíněn článek *On unitary equivalence* [Lt2], který napsal britský matematik Dudley Ernest Littlewood (1903–1979). Z Weyrových prací jsou opět zmíněny pouze *Répartition des matrices en espèces et formation de toutes les espèces* a *Zur Theorie der bilinearen Formen*, v seznamu literatury na konci knihy dokonce žádná Weyrova práce uvedena není.

Roger Horn je však s existencí českého spisu i druhého francouzsky psaného článku z roku 1885 obeznámen.[386]

Yes, I knew about the Czech language predecessor of the famous German Weyr paper, but of course I could not read it. I have copies of the two Comptes Rendus Paris announcements in my files ...

Podotkněme, že kniha obsahuje řadu otázek určených k zamyšlení nad tématem a že se Weyrova charakteristika vyskytuje i mimo třetí kapitolu.

Již první vydání knihy řadíme mezi význačné publikace lineární algebry. Patří mezi často citované monografie, je používána na školách. Totéž se očekává i od nové verze publikace. V této souvislosti citujme slova, jejichž autorem je Zhongshan Li z Georgia State University a která jsou uvedena na deskách monografie:

[386] Z emailové korespondence s autorkou této monografie (říjen 2012).

The second edition of Matrix Analysis *by Horn and Johnson is a significant enhancement (featuring a large number of recent research results, new and illuminating approaches, a comprehensive summary of basic linear algebra and matrix theory, hints on some problems, and a highly detailed index) of the hugely successful and widely used first edition. It is a monumental contribution on the theory and applications of matrices. I had the honor of using some chapters of the draft of the second edition in my Advanced Matrix Analysis class at Georgia State University. I am certain that the second edition of* Matrix Analysis *will be the standard graduate textbook and an indispensable reference book on matrix theory for many years to come.*

Obdobný názor na roli knihy mezi studenty vyslovil i Frank Jerry Hall. Uveďme jeho odpověď na otázku, zda je Weyrova charakteristika vyučována na univerzitách v Americe.[387]

Ne, ne … nyní však máme druhé vydání Hornovy a Johnsonovy knihy, která je používána v mnoha školách, takže nyní vyučována bude.

Dá se tedy očekávat další prohloubení povědomí o Weyrových výsledcích mezi studenty a následkem toho i v širší matematické komunitě.

Na závěr uveďme pro českého čtenáře milou skutečnost. Monografie *Matrix Analysis* má „české kořeny“, oba autoři jsou doktorandy v českých zemích narozených matematiků. Školitelem Rogera Horna byl Charles Loewner, školitelkou Charlese Johnsona byla Olga Taussky-Todd.[388]

6.10 Z korespondence se zahraničím

Nechme nyní vyprávět hlavní aktéry příběhu, kteří šíří Weyrovu teorii charakteristických čísel v zahraničí. Jejich slovy připomeňme některé mezníky v její dosavadní historii. Následující úryvky pocházejí z emailové korespondence s autorkou této monografie, a to, není-li uvedeno jinak, z přelomu let 2012 a 2013.[389] Jsou ponechány v originálním znění (s případnými jazykovými prohřešky); u autorů, jejichž rodný jazyk není angličtina, prosíme o přihlédnutí k této skutečnosti.[390]

Následující citace dokládají, že Weyrovy výsledky byly po více než sto let opomíjeny, někde takřka zapomenuty. Dokonce i autoři, kteří s nimi pracovali,

[387] Z osobního rozhovoru s autorkou této monografie (prosinec 2012); citát je uveden v autorčině překladu z angličtiny. Děkujeme F. J. Hallovi za upozornění na připravované nové vydání uvažované monografie a zprostředkování kontaktu s jejím autorem R. Hornem.

[388] Charles Johnson na svou bývalou školitelku zavzpomínal slovy, která byla otištěna v článku *In memoriam: Olga Taussky-Todd* [LM1], jehož autorkami jsou Edith Hirsch Luchins (1921–2002) a její studentka Mary Ann McLoughlin.

… she had rather particular ideas about mathematical writing. No pictures or diagrams were allowed, and, much as I wanted to write “$n \times n$” to describe the dimensions of a matrix in my thesis, it had to be "n-by-n". I, and my students, still write “n-by-n”. ([LM1], str. 840)

Můžeme potvrdit, že matice řádu n jsou v monografii *Matrix Analysis* z roku 2013 skutečně značeny „*n-by-n*“ matice.

[389] Některé citace byly později s několikaměsíčním nadhledem mírně modifikovány.

[390] Připomeňme, že krátké pasáže z dopisů od některých autorů (Hans Schneider, Roger A. Horn, Helene Shapiro, Judith J. McDonald, Lindsay N. Childs, Frank J. Hall) již byly citovány v předcházejících částech 6. kapitoly.

nepřišli do styku s Weyrovými originálními texty a nezískali alespoň základní povědomí o historii příslušných pojmů. Pouze někteří z níže uvedených matematiků se o Weyrově teorii dozvěděli během kurzů na univerzitách, znalost této problematiky byla většinou předávána ústně mezi jednotlivci nebo studována z několika málo prací, které Weyrovy výsledky obsahují. Bude proto zajímavé sledovat, jaký osud je čeká v dalších letech, v období následujícím po vydání významných monografií *Advanced Topics in Linear Algebra: Weaving Matrix Problems through the Weyr Form* a *Matrix Analysis*, které Weyrovy výsledky propagují.

Víme, že podstatným zlomem pro šíření Weyrovy charakteristiky bylo zveřejnění článku *The Weyr characteristic* v roce 1999, který napsala Helene Shapiro a za jehož zrodem stál Roger Horn:

After I learned about Weyr from Sergeichuk, I became editor of the American Mathematical Monthly. One of my editorial projects was to find someone to write a paper about the Weyr form, and eventually Helene Shapiro took on the task. Her expository paper appeared in the Monthly in 1999, and I think it was widely read and appreciated.

* * *

Roger Horn však rovněž podnítil vznik dřívější práce Helene Shapiro, jak lze vyčíst z jejích vzpomínek na odbornou práci v problematice Weyrovy teorie:

The linear algebra courses I took as an undergraduate and graduate student included the Jordan canonical form and the Segre characteristic, but not the Weyr form. I first learned of the Weyr form and Weyr characteristic from Hans Schneider, when I spent the 1979–80 year at the University of Wisconsin, and I think he mentioned the book by Turnbull and Aitken (published in 1932).

About a decade later, Roger Horn invited me to write a survey article on canonical forms under unitary similarity for a special canonical forms issue he was organizing for LAA (Linear Algebra and Its Applications). We were at a SIAM conference, and I asked several people for information and references– and each person referred me to work by different authors. When I read these papers, I found that some of the central ideas had been re-discovered several times. In particular, the starting point for these canonical forms under unitary similarity was to use the dimensions of null spaces of increasing powers of a nilpotent matrix (or, equivalently, dimensions of the range spaces). I then remembered learning about this approach from Hans Schneider, and that he had called it the Weyr characteristic. As best I can recall, I think I then looked this up in Turnbull and Aitken, or perhaps also in MacDuffee's book, and then obtained copies of the two Weyr papers listed as References 131, 132 in my 1991 survey article.

Later in the 1990's I again saw Roger Horn at a conference – at the time, he was the editor of the American Mathematical Monthly and asked me if I was interested in submitting something. I wanted to write an expository article on the Weyr characteristic and the Weyr form. I knew that it was not included in *typical linear algebra texts, but I had seen it used for algorithms in numerical linear algebra. However, I had not seen it named as the "Weyr characteristic". I wanted to make these ideas, and the attribution to Weyr, better known to the general mathematical audience. Since I had never learned about the Weyr approach in my undergraduate or graduate courses, I figured it would be new information for most readers of the Monthly, and yet the mathematical level was accessible to an undergraduate audience.*

I did not know that Eduard Weyr was Czech. The two Weyr papers I had were in French and German. In fact I am not even certain how to correctly pronounce the name "Weyr" – I once asked Hans Schneider and, at the time, he said he wasn't sure either.

I suspect the reason the Weyr characteristic has become better known in the past 25 years is because of its role in computational linear algebra. It is calculated from the dimensions of the null spaces of powers of a matrix; this can be computed directly in a numerically stable way. Once you have the Weyr characteristic, the Segre characteristic is easily found from the conjugate partition.

The Segre characteristic, which gives the sizes of the blocks of the Jordan canonical form, comes from the dimensions of the cyclic sub-modules in the structure theorem for modules over Euclidean domains. So the Jordan normal form and Segre characteristic fit naturally into an abstract algebra course, as an application of the structure theorem for finitely generated modules over a Euclidean domain.

Most introductory linear algebra courses in this country do not get far enough to present either of these canonical forms, and most undergraduate math majors do not take a second course in linear algebra. However, the undergraduate math major usually includes some abstract algebra courses, and the Jordan canonical form may be included there.

* * *

Skutečnost, že Weyrova charakteristika není běžnou součástí kurzů lineární algebry a že se k ní matematikové většinou dostávají samostudiem, potvrdil také Lindsay N. Childs. Rovněž on napsal svůj názor na rozšíření Weyrových výsledků.

I learned the terminology of Weyr characteristic from books on matrix theory by C. C. MacDuffee (The Theory of Matrices, 1933, Vectors and Matrices, 1943) ... which I read as an undergraduate student in 1962 at Wesleyan University in Connecticut, USA. Wesleyan was a small college (800 students) and didn't have a course in linear algebra and matrix theory that covered the Jordan and rational canonical forms. So I learned it on my own from those books and from H. Schwerdtfeger, Introduction to Linear Algebra and the Theory of Matrices, 1950 (in which Weyr's name does not appear).

When I went Cornell Univ. for my Ph. D., I relearned the theory out of Hoffman and Kunze, Linear Algebra (1961),[391] *which also does not mention*

[391] Jedná se o knihu [HK1].

Weyr. Hoffman and Kunze's book remains the standard textbook in many US universities for linear algebra courses that present the Jordan and rational canonical form theory. I've taught that course from Hoffman and Kunze maybe ten times …

No one else I knew at Wesleyan knew, or at least talked about, canonical forms for matrices, and mathematicians and students of mathematics who learned their linear algebra from Hoffman and Kunze would not have heard of Weyr …

I just browsed through my collection of books on linear algebra and couldn't find a reference to Weyr in any of them … If he had a hand in the development of the rational canonical form for matrices, then his work was important. But I can't find any reference to Weyr in comprehensive books in English on history of mathematics. They seem to credit Cauchy …, Jordan … and especially Frobenius … for the development of the the canonical form theory of matrices.

* * *

V obdobném duchu se vyjádřil i Ross Lippert, autor článků *The Jordan forms of AB and BA* a *Fixing multiple eigenvalues by a minimal perturbation.*

First, let me say that I did not know that Weyr was Czech or any of the history of the characteristic, although I had judged that it was a 19th century result … I did not receive any training in the Weyr characteristic. Unfortunately it is not taught. On the other hand, the Jordan form, which is taught, is something most people do not pay much attention to. The term "Segre characteristic" is not even mentioned.

I, for one, did not pay much attention to non-diagonalizable systems until my advisor (Alan Edelman) got me onto them in graduate school, as he was working with Bo Kagstrom and Eric Elmroth on such problems. I thought at the time, as I do now, that the Weyr characteristic was somewhat easier to understand, as it can be described purely in the context of the ranks (or nullities, equivalently) of powers of matrices. It is quite easy to deduce its properties by considering such things. I recall receiving this description from Alan and thinking "oh, this is what all that Jordan stuff was about". As you see in my AB∼BA paper, the theorems are all based on deductions from powers of AB and BA, which result in assertions about the Weyr characteristic, which I then translate, via auxiliary lemmas into more familiar Jordan/Segre terms. An earlier paper by Flanders, who originally solved the problem, also reasons it out by matrix powers, but Flanders has to struggle somewhat more because his lack of Weyr characteristic knowledge forces him to have to take bigger steps in reasoning …

I didn't read the original paper until much later (mostly out of curiosity). Helene Shapiro's article is really a very nice introduction to it. …

… mathematicians who aren't working in my area … certainly do not know anything about Weyr. … my co-author on the AB∼BA paper, Gil Strang … posed the problem to me, and I think, learned something about how useful the Weyr characteristic was in the process of writing the paper. I believe he did

know the Weyr characteristic before we started working on the paper, but had never seen it in action, and he's a leading expert in linear algebra.

* * *

Alan Edelman, zmíněný v poslední ukázce, je další z těch, které ovlivnila Helene Shapiro:

I admit that I was using the concept for a little while before I stumbled on Helene Shapiro's very nice paper, and that is when I started to use the term Weyr characteristic in my own work. In fact, I think years ago I heard Helene Shapiro speak — and that was when I learned the term.

... I was delighted to find out that these numbers associated with matrices did indeed have a name!

* * *

Rovněž Erik Elmroth, zástupce švédské školy, používal Weyrovu charakteristiku aniž by s ní byl hlouběji seznámen.[392]

I must admit that I have not studied Weyr's work in much detail although the Weyr characteristics was very central to our work. I'm not sure how I was first introduced to the Weyr characteristics, but it may have been through the collaboration with Alan Edelman [1] ... but it may also have been through literature before that, when the Weyr characteristics was really a good complement to the geometric characteristics we studied in [2]. I know that I normally cited C. C. Mac Duffee "The theory of matrices", 1956, when referring to the Weyr characteristics but this is probably not where I first found them. (Are they mentioned in the Gantmacher books? If so, this is probably where I first learned about them as this was very close to my starting point for this problem ...)

* * *

Daniel L. Boley, jenž v článku *The algebraic structure of pencils and block Toeplitz matrices* (1998) porovnával několik různých posloupností (Weyrovu a Segreovu charakteristiku, posloupnost Kroneckerových indexů atd.), napsal:

When I was studying those algebraic indices, my interest was in attempting to expose the relationship between those different indices as special cases of algebraic objects in their own right.

I was also interested in how the indices changes upon small perturbations to the matrices, leading to the interest in majorization of sequences. It is interesting that these different indices were developed independently by different mathematicians and that it took a long while to see their relationships.

* * *

[392] V textu referovanými publikacemi [1] a [2] jsou myšleny články

[1]: Edelman A., Elmroth E., Kågström B., *A geometric approach to perturbation theory of matrices and matrix pencils. Part II: A stratification-enhanced staircase algorithm* [EEK1];

[2]: Elmroth E., Kågström B., *The set of 2-by-3 matrix pencils – Kronecker structures and their transitions under perturbations* [EK1].

Navzájem podobné, avšak oproti zprávám z jiných zemí odlišné odpovědi napsali španělští matematikové (M. A. Beitia, A. Compta, J.-M. Gracia, I. de Hoyos, F. E. Velasco). Vesměs se shodli, že Weyrova charakteristika je v jejich pracovní skupině Linear Algebra Group tvořené nejen jmenovanými matematiky běžně používána, někteří znali i matematiky obeznámené s touto posloupností pracující mimo uvažovaný kolektiv. Někteří rovněž věděli, po kom je Weyrova charakteristika pojmenována.

Stěžejními osobnostmi Linear Algebra Group jsou Juan-Miguel Gracia, zakladatel skupiny, a jeho žák Ion Zaballa. Sám Gracia, který Weyrovu charakteristiku poprvé studoval v roce 1972 ze španělského vydání *Fundamentos de Algebra Lineal* Mal'cevovy knihy *Osnovy linejnoj algebry*, napsal, že vděčí svému studentovi za osvětlení důležitosti Weyrovy charakteristiky. Inmaculada de Hoyos byla s touto charakteristikou obeznámena v roce 1984, kdy započala pod vedením dvou zmíněných profesorů svá doktorská studia. Rovněž Alberta Comptu do problematiky zasvětil Ion Zaballa. Mariá A. Beitia uvedla, že se poprvé o Weyrově charakteristice dozvěděla z článku Wolfganga Brandenbusche, i ona zmiňuje svůj výzkum v rámci Linear Algebra Group.

* * *

Svou cestu profesním životem, která vyústila, mimo jiné, v zájem o Weyrovu charakteristiku pro svazky matic, popsal Nicos Karcanias (City University London) v následujícím vzpomínkovém textu, který nazval *Weyr Characteristic and Matrix Pencil Theory*:[393]

I have completed my PhD in 1976 and towards the end of my studies I have developed a strong interest in the classical Matrix Pencil Theory [1] and its applications to Linear Systems. The algebraic work of Rosenbrock [2] and the geometric way of thinking of my PhD thesis supervisor Alistair MacFarlane [3] have motivated me to develop an approach for the characterization of the fundamental concepts of invariant spaces of the Geometric Theory [4], [5] using

[393] Tyto vzpomínky pocházejí z května 2014.

V textu referované publikace [1], [2], . . . , [11] jsou po řadě následující práce:

[1]: Gantmacher F. R., *Teorija matric* [Gn1] (anglický překlad z roku 1959);

[2]: Rosenbrock H. H., *State Space and Multivariable Theory* [Rs1];

[3]: MacFarlane, A. G. J., *Multivariable feedback: a personal reminiscence* [Mf1];

[4]: Wonham W. M., *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach* [Wo1] (2. vydání);

[5]: Willems J. C., *Almost invariant subspaces: An approach to high gain feedback design – Part I: Almost controlled invariant subspaces* [Wi1], resp. Willems J. C., *Almost invariant subspaces: An approach to high gain feedback design – Part II: Almost conditionally invariant subspaces* [Wi2];

[6]: Karcanias N., *Matrix pencil approach to geometric system theory* [Ka1];

[7]: Jaffe S., Karcanias N., *Matrix pencil characterization of almost* (A, B)*-invariant subspaces: A classification of geometric concepts* [JK1];

[8]: Turnbull H. W., Aitken A. C., *An Introduction to the Theory of Canonical Matrices* [TA1];

[9]: Karcanias N., Kalogeropoulos G., *On the Segré, Weyr characteristics of right (left) regular pencils* [KK1];

[10]: Karcanias N., Kalogeropoulos G., *Right (left) characteristic sequences and column (row) minimal indices of a singular pencil* [KK2];

[11]: Karcanias N., *On the characteristic, Weyr sequences, the Kronecker invariants and canonical form of a singular pencil* [Ka2].

matrix pencils [6], [7]. During 1976–1980 period I was a Research Fellow in the Control Group of University of Cambridge and it was then I have developed a strong interest on the further development of the classical Matrix Pencil Theory. The book of Turnbull and Aitken [8]: "An introduction to the theory of canonical matrices" (1932) has been one of the classical sources where I have seen references to the Weyr characteristic in the context of the computation of the Segre characteristic defining the degrees of the elementary divisors and thus also of the Jordan form of a square matrix A.

The definition of the Weyr characteristic of A as the partition of the successive differences in nullity (rank) in the matrix powers $(A - \lambda I)^p$, $p = 0, 1, 2, \ldots$ *of the total multiplicity of the eigenvalue and then the characterization of the Segre characteristic as its conjugate partition, has motivated me to extend such results to the case of general regular and singular matrix pencils* $\lambda F - G$. *These generalizations were published in a series of 3 papers and dealt with regular pencils and characterization of elementary divisors (extension of the results for the standard eigenvalue problem) [9], generalization of the theory to the case of column and row minimal indices [10] and then the characterization of Kronecker canonical form [11]. Central to this analysis in both elementary divisors and minimal indices was the use of sequences defined by the nullities of Toeplitz matrices based on the pair* (F, G). *It was shown that such sequences are piecewise arithmetic progressions, that is arithmetic progression in intervals and with discontinuity points characterizing the values of respective discrete invariants. The analysis of properties of such sequences has then provided an extension of Weyr-Segre characteristic classical result to the general case of matrix pencils and has unified the characterization of two different types of discrete algebraic invariants in tems of an analysis of singular points of piecewise arithmetic progression sequences.*

* * *

Podstatnou roli pro rozšíření Weyrova kanonického tvaru hrál Genrich Belitskij, který jej použil při převodu konečné množiny matic na kanonický tvar.

The Weyr normal form is very important for the construction of the algorithm. Indeed nobody introduced me to the Weyr theory. I rediscovered it as understood properties I needed (the Jordan n. f. does not satisfy them).

* * *

Ideje Genricha Belitskiho úspěšně rozšířil Vladimir Sergejčuk, který jako jeden z prvních matematiků použil v termínu označujícím uvažovaný kanonický tvar Weyrovo jméno.

Genrich Belitskii constructed an algorithm that reduces a pair of matrices to canonical form. He used a matrix (which I later called "Weyr's matrix") that is permutationaly similar to a Jordan matrix and such that all matrices *commuting with it are block triangular. My first paper about Belitskii's algorithm is Classification of pairs of linear operators in a four-dimensional vector space (with D. V. Galinskii) ..., 1993, in which I used Weyr's matrices of size* 4×4 *but I did not call them "Weyr's matrices".*

In later versions I used the term "Weyr's matrices". (I decided to call the matrices from Belitskii's algorithm by Weyr's matrix since they can be defined via the Weyr characteristic. I did not know that they appeared in Weyr's papers. I read about the Weyr characteristic in one of the books on matrix theory) ... When I introduced the term "Weyr's matrices" I did not know anything about Weyr; I knew only Weyr's characteristic.

* * *

Když jsme požádali o informace o Weyrově kanonickém tvaru Junza Watanabeho, který jej spolu se spoluautorem Harimou označoval termínem *second Jordan canonical form*, neuvědomili jsme si, že by zmínění autoři ani dnes, kdy jsou jejich práce citovány v monografii věnované Weyrovu kanonickému tvaru, nemuseli své ideje s českým matematikem spojit. Odpověď potvrdila příslovečnou japonskou zdvořilost.

Thank you for your interest in our paper. I am afraid ... you have confused Hermann Weyl with Eduard Weyr. H. Weyl was ... Perhaps I could tell something about H. Weyl's work but I did not know the name Weyr upto now. I am sorry about that.

Po omluvě a vysvětlení nedorozumění přišla tato odpověď.

I was very much surprised to read your second mail. It is a very pleasant surprise. I did not realized you were talking about the "second Jordan canonical form". I "discovered" it myself, but I am not surprised if someone had discovered or used it before.

* * *

Velmi mile zavzpomínal na vznik monografie o Weyrovu kanonickém tvaru *Advanced Topics in Linear Algebra: Weaving Matrix Problems through the Weyr Form* Kevin C. O'Meara, jeden z jejích autorů. Popsal postupné seznamování autorů, jejich vleklé potíže při tvorbě, místa jejich setkávání atd. To vše „okořenil" řadou osobních pocitů. Své paměti pojmenoval *My recollections of rediscovering the Weyr form*:[394]

In Mathematics, as in life, chance meetings can determine important outcomes. It was largely by chance that Chuck Vinsonhaler and I met in late 1974. At that time, for reasons unrelated to mathematics, Chuck wished to put a great distance between himself and the U.S.A. He chose New Zealand because a friend of his in the U.S. was from New Zealand. Chuck and I had no prior contact. Officially, of course, Chuck's mission was mathematics. He had worked out

[394] Vzpomínky pocházejí z března 2014.

that I was based in Christchurch, New Zealand and we had a common interest in ring theory (how he found out I don't know because I was a fairly obscure ring theorist then). I don't think he and I did much of mathematical significance during his five month visit to the University of Canterbury, Christchurch, but we got on very well socially. At that time, I was a part-owner of a pretty smart young racehorse "Ho Ho King". So Chuck and I did spend quite a bit of time at bars and racetracks! This was the beginning of a lifelong friendship and led to several fruitful joint mathematical projects. Chuck was a faculty member of the University of Connecticut in Storrs, U.S.A., where I spent part of my sabbatical leave in 1978, and also my full sabbatical leave in 1986. (My younger daughter, Nathania, was born in Connecticut that year.) Chuck and I had a close working relationship and a shared sense of humour. I have fond memories of our wine tours in Sonoma (California), Marlborough (NZ), and the Hunter Valley (Australia), during which we would continue to work on our joint mathematics research (any "happy hour" always included discussing our current mathematics project). Being close friends is an advantage when doing joint research. One is less reluctant to suggest a possible argument or to ask one's co-worker to explain a point more fully. Chuck and I would even laugh at each other's lapses.

The story of how Chuck and I got involved with the Weyr form begins in 2003. I took early retirement from the University of Canterbury in February 2003 (I had been a faculty member in the mathematics department for 31 years). Chuck, who by now was Head of Department in Mathematics at UConn, arranged an attractive package for me at UConn (teaching plus research) for the second half of that year. We had been working (fairly successfully) on various separative cancellation problems in abelian groups and rings. It was our intention to continue this work at UConn in 2003. But serendipity again played her hand. In March 2003, Mike Steel in the mathematics department at Canterbury sent an e-mail to four of us asking a question about approximating a collection of commuting matrices by simultaneously diagonalizable matrices. This was connected to a paper on phylogenetics he was currently refereeing. I knew any question Mike Steel was thinking about had to be important. I had taught Mike algebra when he was an honours mathematics student in the early 1980's. He was the smartest undergraduate I have ever taught. (In his final honours exam, which covered topics such as Galois Theory and Group Representation Theory, Mike scored 99/100. I took 1 point off because he had misspelt "algebra"!) If I had still been a full-time faculty member in 2003, I probably would not have had time to think very much about Mike's question. Now that I had more time on my hands, I began thinking more about the question. I suggested to Chuck that we should look at this problem of approximate simultaneous diagonalization (ASD) as a little "warm-up" exercise when I visited UConn later in 2003.

Neither of us knew any thing about this area of approximate simultaneous diagonalization. But we soon became fascinated by the problem. It became our principal research topic for the rest of 2003. In commuting matrix problems, the standard reduction is to put (under similarity) the matrices in upper triangular *form. Wouldn't it be nice if we could also have the first matrix in canonical form (then one could perturb that matrix to get more than one eigenvalue and attempt to match this with commuting perturbations of the remaining matrices)? We quickly realized that this was not possible using the Jordan form. We would need a new canonical form. The path to our rediscovery of the Weyr form had begun. But none of this would have happened without Chuck's mathematical contributions and his generous support of me.*

By the end of 2003, we had found our new canonical form. We were excited about this and got a colleague, Jeff Tollefson, to take a photo of us standing in front of a blackboard on which was drawn our sparkling matrix form (in the test case of a nilpotent matrix of nullity 2). Chuck suggested the form be called the "H-form". The "H" was for "Husky". For Americans, the "Huskies" are almost synonymous with the University of Connecticut because of the success of its college sporting teams named the Huskies, particularly the women's basketball team which regularly would finish top of the college competition in the U.S. (In turn, so much of the billion dollar developments on campus were connected with this sporting success.) However, it took until April 2004 before we finally got the form exactly right. Chuck and I therefore know first-hand that, although the Weyr form may seem fairly obvious when you see it, discovering it is entirely another matter. Added to that, Weyr himself seemingly did not know of the Jordan form. At least we had that advantage. It annoys me to hear some speak of the Weyr form as "a mere permutation of the Jordan form". It is conceptually quite different.

Chuck and I wrote the paper "On approximately simultaneously diagonalizable matrices" *for the Journal of Linear Algebra and Its Applications 412 (2006), 39–74 in October 2004. This included our description of the H-form and the fact that given any family $A_1, A_2, \ldots, A_k$ of commuting matrices over an algebraically closed field, there is a similarity transformation that simultaneously puts A_1 in H-form and makes the other A_i upper triangular. This was apparently new, even when interpreted for the Weyr form (the result fails for the Jordan form). The paper was well received. In fact, it made number 7 on a list of the hottest 25 papers for the journal over a three month period. Despite this, prior to 2007, no one ever told us that our H-form was the same as Weyr's form! Chuck and I would regularly ask the steady stream of knowledgable linear algebra visitors to UConn about these questions. (UConn at that time was very strong in linear algebra with the likes of Miki Neumann and Vadim Olshevsky in the department.) I gave talks on ASD and the H-form at the University of California, Santa Barbara in 2004, and the University of Calgary in Canada in 2005. Despite the attendance of knowledgable people in linear algebra, no one raised the connection with Weyr's work.*

So how and when did we eventually find out that our H-form had already been discovered by Weyr in 1885? In early 2005, I moved from New Zealand to Brisbane, Australia to be closer to the rest of my family. In the second half of 2005, I returned to UConn to teach and research under a similar package to the one in 2003, but this time arranged by the new Head of Department, Miki Neumann. Chuck and I were still interested in ASD but in relation to *extending Gerstenhaber's 1961 Theorem to 3 commuting* $n \times n$ *matrices* A, B, C *over say the complex field* $\mathbb{C}$*: must the subalgebra* $\mathbb{C}[A, B, C]$ *generated by* A, B, C *have vector space dimension at most* n*? Our approach depended heavily on the H-form. Progress was made (we strongly suspected the answer is "no") but nothing earth-shattering. I returned to Australia. In 2006, Chuck suggested we write an article on the H-form for the American Mathematical Monthly. He thought it would be good exposure and reach a wide audience, not just specialists in linear algebra. I was lukewarm about the idea. I felt it would be better to write a short monograph instead because of the difficulty of getting across the ideas and applications of the H-form to a non-specialist audience in a short space. Chuck thought that writing a book would be a bit daunting, particularly if we were to include the algebraic geometry connections to the ASD problem. He then suggested writing the AMM paper first to test the waters. I reluctantly agreed. In October 2007, we submitted our paper* "A sometimes useful alternative to the Jordan form" *to the AMM.*

The report on our paper from the AMM editor, Daniel Velleman, arrived in November 2007. He told us our H-form was already known (Weyr) and referred us to the paper "The Weyr characteristic" *by H. Shapiro that had appeared in Amer. Math. Monthly 106 (1999), 919–929. We were downhearted and even considered giving up on the project (including the book) – maybe we should return to other areas in which we had more expertise. The referee suggested we re-submit the paper, putting the emphasis on our applications of the Weyr form (Shapiro had not attempted any applications of the form). Chuck and I worked hard on the revised version and submitted* "Applications of the Weyr canonical form for matrices" *(24 pages) to AMM in March 2008. Daniel Velleman replied in June 2008 saying* "Based on the reports from the referees, I think this paper has the potential to become a good Monthly paper, but the exposition needs to be improved." *He included the four referee reports. Three of the reports were positive and helpful. The fourth was quite negative. The editor was very helpful (saying the one negative report* "was unfortunately not very explicit about how the exposition should be improved"*) and made detailed suggestions himself for improvements. I then realized that even the editor was overlooking the real difficulty, and perhaps the historical stumbling block in Weyr's work becoming popular. Our exposition was not the problem, it was the overly ambitious goal of getting Weyr's ideas across in such a forum. Chuck and I sat down and thoroughly analyzed all four reports, including their phraseology and the names and results they cited. We were confident we had worked out the identities of all four referees, including the negative one. The positive reports had come from highly qualified people.* Maybe we weren't so bad after all!

I wrote to the editor saying that I did not think it was a good idea to publish our work in this forum. But the decision would rest with Chuck. I argued to Chuck that publishing the AMM paper may do more harm than good in the promotion of the Weyr form and our book. Why watch the full movie if you didn't like the trailer (short version)? I also drew a horse racing analogy. My brother Brian was quite a famous horse trainer (one of his horses "Christian Cullen" regularly featured in the national news). One ongoing problem Brian *had was with owners wanting to race a horse when the horse was not ready (this can seriously impair the horse's later racing and risks injury) or when the stakes were not big enough* – "let me set him for this $1,000,000 race" *he would say. I felt our exposition of the Weyr form needed more time and space, and an even bigger audience (a bigger stakes race). The paper was not re-submitted, much to Chuck's disappointment (to him there would be a lot of prestige with a publication of this sort in AMM). Work on the book would continue (we had already started late 2007). In retrospect, Chuck's suggestion to publish in the AMM was a good one because we learnt so much in the process about the history of the Weyr form and the need to be very careful with its description.* Why doesn't this Weyr form catch on even after 120 years?, *we asked.*

In late 2007, Chuck was having some health problems and suggested we recruit a third co-author for our book "Advanced Topics in Linear Algebra: weaving matrix problems through the Weyr form" *(although that was not the proposed title then). I was also being hampered by no longer being affiliated with a university mathematics department (and the associated access to libraries etc). For various reasons, we asked John Clark from the University of Otago, Dunedin, New Zealand to join us. It was a good decision. Neither Chuck nor I had ever worked with John, and didn't know him all that well. I had corresponded with John over the years. But although our universities in NZ were only some 200 miles apart, we met only twice between 1970 and 2000; once at a conference in Tasmania, Australia (1987) and once at a conference in Colorado, U.S.A. (1995)! John was, however, very well-known within the international ring theory community – he had traveled widely and had a "nice guy" reputation. Moreover, John was already a co-author of two books, one in graph theory and one in ring theory. He knew the ropes. John happily agreed to join us in October 2007.*

By this time, most of the mathematics that was to be included in our book had already been done by Chuck and me over the previous five years. However, there was much work to be done on the exposition. John and I have similar writing styles. But John's great strength was his ability to ferret out related results in the literature and to uncover the relevant linear algebra history. He did a nice job. (Most of the bibliographical notes in the book are due to John.) He would print off this matter and post it to me in Australia. John had never worked in linear algebra and so had to catch up with the work that Chuck and I and others had done in topics such as ASD, the Weyr form, Gerstenhaber's theorem, algebraic geometry etc. On top of that, he was still a full-time, very active, faculty member whereas by this time both Chuck and I were semi-retired. If this was not enough, 2008 saw the onset of quite serious health problems for John.

As part of his dispatches to Australia, John sent me copies of the two Weyr papers concerning his canonical form, the shorter version in 1885 and the much longer one in 1890. My knowledge of French and German is very minimal, although I can usually get the gist of a mathematical argument. And I could see that Weyr had done a remarkable job for those times.

During the writing of our book, we three authors never actually met up as *a trio. But I did meet with Chuck and John individually. I made many trips from Brisbane to see John, usually at his office at the University of Otago and a couple of times at his holiday home in Arrowtown (close to the very scenic lakes and mountains of the lower South Island). John and Chuck visited me in Brisbane in 2008. It was in such an unlikely setting to be writing a book on advanced mathematics for Oxford University Press. My wife was a property developer (she had one street in a development named "O'Meara" and I have a photo of John standing in front of the sign). One of the properties she had bought for development was a 4 acre (once) market garden about 20 miles out from Brisbane centre (Marsden). There sat a traditional Australian brick bungalow with wide verandas (great for relaxing over a barbeque), surrounded by long grass and snakes, but with some lovely trees and beautiful bird-life, and almost guaranteed great weather (sunny 22C even in winter). This is where John and Chuck stayed with me. Most of the actual writing and typesetting of the book was done there between 2007 and 2010. Now that area is all in high-density housing – our famous bungalow was demolished! It was a fairly wild area, crime-wise (all our windows were iron-barred). Before Chuck's visit I had a fairway and one green mowed, because Chuck is very keen on golf. Shortly after Chuck 's arrival, the local police turned up and asked why we had mown that strange strip and was it used in connection with a burglary of one of the neighbours! Who said academics live in ivory towers.*

* * *

Poznatky Weyrovy teorie charakteristických čísel vyučují, či alespoň zmiňují ve svých kurzech vedených na vysokých školách pouze výjimky z oslovených matematiků. Situace se však začíná pomalu měnit po publikování druhého, upraveného vydání monografie Rogera Horna a Charlese Johnsona *Matrix Analysis* [HJ1] v roce 2013. Kniha, jejíž přepracované vydání bylo blíže představeno v části 6.9 této kapitoly, je totiž na mnohých školách používána při výuce. To by potvrzovalo naděje na propagaci Weyrových výsledků mezi studenty, které do zmíněné knihy vkládal Frank Jerry Hall (viz jeho citát na str. 334).

Zřejmě jediný z korespondujících matematiků, kdo dříve – řekněme do přelomu tisíciletí – běžně učil Weyrovu (výškovou) charakteristiku mezi širší studentskou komunitou, jež zahrnuje nejen studenty doktorského programu, ale i nižšího stupně vzdělávání, je Daniel Hershkowitz působící v Izraeli (po několik desítek let učil na tzv. Technionu – Izraelském technologickém institutu, nyní je přibližně rok prezidentem Bar Ilan University).[395]

[395] Ukázka pochází z korespondence z února 2014.

Weyrova charakteristika je také poměrně často obsažena v učebním textu Joela W. Robbina *Linear Algebra for Math 542* [Rb1], který je umístěn na autorových internetových stránkách mezi materiály určené pro již nekonané přednášky. Jedná se o text pro výuku na University of Wisconsin v roce 2001, což je na tehdejší dobu velmi neobvyklé. Bohužel se nám nepodařilo s autorem navázat kontakt, abychom mohli posoudit, zda se jednalo o výjimečné či po dlouhá léta vyučované přednášky, či zjistit, proč Weyrovu charakteristiku Joel W. Robbin do výuky zařadil. Upozorněme, že se jedná o univerzitu, na níž od roku 1959 po dlouhá desetiletí působil Hans Schneider a lze tedy předpokládat, že jím byl Robbin ovlivněn.

Of course, I taught the height characteristic to my students many times, and I also had Masters and doctorate students working on the subject. I delivered many lectures on the subject in international conferences.

* * *

Ve výjimečných případech učitelé pouze zmiňovali či zmiňují Weyrovu charakteristiku, Weyrův tvar ve 20. století neučili. Charakteristiku zmiňuje například Judith J. McDonald (Washington State University, USA). Ani ona ji však neprobírá detailně.

I only teach it informally to my graduate students who work in nonnegative matrix theory.

* * *

Typickým příkladem matematika, který učí některé partie Weyrovy teorie (konkrétně Weyrův kanonický tvar) až po publikování knihy *Matrix Analysis*, je švédský matematik Göran Bergqvist (Linköpings universitet, Švédsko):[396]

I decided to teach it because of its appearance in the new edition of Horn and Johnson. Besides being a beautiful form, I also think it gives a better understanding of other canonical forms such as the Jordan form, as well as of generalized eigenvectors.

There were 25 students following my course, mainly Ph.D. students of mathematics and of engineering, and some master's students of mathematics.

* * *

Velmi obdobně se vyjádřil i Zhongshan Li (Georgia State University, USA), který se o Weyrově teorii poprvé dozvěděl, když recenzoval druhé vydání Hornovy a Johnsonovy monografie. O Weyrově charakteristice přednášel ve svém kurzu pokročilé maticové analýzy pro relativně malý kolektiv studentů doktorského, ale i magisterského studia.

* * *

Pouze čas tedy ukáže, zda se pro českou matematiku příznivá prognóza Franka J. Halla, že Weyrova teorie bude v zámoří vyučována, naplní. Citujme rovněž jeho slova o současné situaci v Americe:

Unfortunately, it seems that the Weyr characteristic has not been in many books on linear algebra in America.

… I think that Hans Schneider has promoted Weyr here … also … Helene Shapiro … I agree that it should become more common place here.

Není jediným, kdo si myslí, že by se uvažovaná problematika měla více rozšířit mezi matematickou komunitou. Zmiňme ještě jeho odpověď na otázku, která mu byla položena během rozhovoru (prosinec 2012) a která mířila na jeho osobní názor na Weyrovy výsledky. Frank J. Hall vzal mlčky do ruky tužku a na papír napsal velkými tiskacími písmeny *GREAT!!*.

[396] Citát pochází ze srpna 2014.

Tím se přirozeně dostáváme k názorům matematiků na odbornou práci Eduarda Weyra. Zde je několik z nich:

I surely consider Weyr's paper a very important event in matrix theory.[397]

(Hans Schneider)

He was a pioneer in the modern theory of matrices, whose work is not as well known in our textbooks as it should be ...

Weyr's 1890 paper in vol. 1 of Monatshefte Math. Physik ... is astonishingly modern in its notation and spirit. It could be read and understood by any (German-speaking) student today who has had a first course in linear algebra. In contrast, the 1870 book of C. Jordan ... that contains his eponymous canonical form is unintelligible to a modern reader; no one thinks of linear algebra in terms of "substitutions" any more. I hope that the second edition of Matrix Analysis will help many students and researchers to learn a little about this great man's contributions to mathematics.

(Roger A. Horn)

I am glad to hear that the Weyr characteristic is trending up. It should.

(Ross Lippert)

Having tried to do research mathematics for 50 years now, I sometimes wonder how good, or lucky, a mathematician has to be to be remembered years after his research years are over. Part of "lucky" is to have a theorem, or a concept, named after you, like "Weyr characteristic", or "Grothendieck group", or "Hilbert-Speiser Theorem". If you are extraordinarily lucky (and good!), your name might become an adjective that is written without a capital letter, like "noetherian", or "abelian". Weyr seems to have had some luck. With you writing about him, he seems to have even more good fortune!

(Lindsay N. Childs)

[397] Tento citát pochází již ze srpna 2011.