

# Počátky teorie matic v Českých zemích a jejich ohlasy

---

## Weyrova teorie charakteristických čísel

In: Martina Štěpánová (author): Počátky teorie matic v Českých zemích a jejich ohlasy. (Czech). Praha: Matfyzpress, vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty UK, Praha, 2014. pp. 99–158.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/403390>

### Terms of use:

© Matfyzpress, vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty UK, Praha

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

### 3 Weyrova teorie charakteristických čísel

Tato kapitola je věnována přehlednému shrnutí základních poznatků Weyrovy teorie charakteristických čísel, která zahrnuje problematiku speciálního kanonického tvaru matice. Představena je úzká spojitost tohoto tzv. Weyrova kanonického tvaru s běžně používaným Jordanovým kanonickým tvarem a dualita mezi Weyrovou charakteristikou a mnohem známější charakteristikou Segreovou. Vše je formulováno řečí dnešní teorie matic, případně pomocí příslušných endomorfismů, což by mělo přispět k pochopením partií psaných v jiném, starším pojetí.<sup>114</sup>

Následující výklad je zde podán v ucelené podobě na jediném místě, neboť většina z reakcí na Weyrovu teorii navazuje pouze na některé její výsledky, které jsou čtenáři postupně představovány v průběhu takřka celé monografie. Z tohoto důvodu v některých pasážích připomínáme již uvedená fakta (pasáže věnované plně pochopeným pojmům tak čtenář může přeskočit či jen letmo pročíst). Předložený výklad však obsahuje i partie a výsledky, které v jiných kapitolách uvedeny nejsou. Jedná se především o vztah Weyrova a Jordanova kanonického tvaru a také o algoritmus pro výpočet tvaru Weyrova.

V následujících odstavcích nejsou (až na několik výjimek v poznámkách pod čarou) uvedeny historické souvislosti (např. data publikace výsledků, jména objevitelů pojmů apod.), které čtenář nalezne ve zbývajících kapitolách. Součástí výkladu jsou však odkazy na alternativní termíny příslušné jednotlivým pojmům, které se během řady desetiletí vyskytly. Věříme, že i tato skutečnost napomáhá k ucelenějšímu obrazu a k rychlejší orientaci.

K ilustraci pojmů a výsledků prostupuje celou touto partií jeden příklad (matice řádu 12), na němž jsou všechna tvrzení Weyrovy teorie ukázána. Nejprve je však v první podkapitole uvedeno několik poznatků z lineární algebry, které budou použity v dalším výkladu.

#### 3.1 Přípravná tvrzení

V celé této kapitole budeme symbolem  $A$  rozumět čtvercovou matici řádu  $n$  nad polem komplexních čísel  $\mathbb{C}$ . Budeme využívat vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi čtvercovými komplexními maticemi řádu  $n$  a endomorfismy prostoru  $\mathbb{C}^n$ : endomorfismu  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  přiřadíme jeho matici  $A$  vzhledem ke kanonické bázi prostoru  $\mathbb{C}^n$  (obrazy vektorů kanonické báze přitom píšeme do sloupců). Vzájemně jednoznačný vztah endomorfismu  $f$  a matice  $A$  je znázorněn schématem

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xleftarrow{f} & \mathbb{C}^n \\ \text{kan.} & A & \text{kan.} \\ \text{báze} & & \text{báze} \end{array}$$

<sup>114</sup> Důkazy vět 5, 12, 13, 16, 17 a konstrukce bází  ${}_0\mathcal{B}$ ,  $\tilde{\mathcal{B}}$ ,  $\tilde{\tilde{\mathcal{B}}}$  jsou silně inspirovány přístupem Jindřicha Bečváře v článku *Weyrova teorie charakteristických čísel* [Be3].

a vyjádřen vzorcem

$$\forall v \in \mathbb{C}^n : f(v)^T = Av^T,$$

kde symbol  $T$  značí transponování vektoru, tj. vektor  $v$  chápeme jako řádek, vektor  $v^T$  jako sloupec.

Při skládání endomorfismů vektorového prostoru  $\mathbb{C}^n$  se odpovídající matice násobí (ve stejném pořadí). Automorfismům odpovídají matice invertibilní, tj. regulární. Endomorfismům, které nejsou automorfismy, odpovídají matice singulární.

Obraz endomorfismu  $f$  bude značen  $\text{Im } f$ , jádro endomorfismu  $f$  bude zapisováno  $\text{Ker } f$ . Identita na prostoru  $\mathbb{C}^n$  bude značena  $1_{\mathbb{C}^n}$ .

**1 Definice.** Nechť  $f$  je endomorfismus vektorového prostoru  $\mathbb{C}^n$ . Podprostor  $V$  prostoru  $\mathbb{C}^n$  se nazývá *f-invariantní*, jestliže pro každý vektor  $v \in V$  platí  $f(v) \in V$ , neboli  $f(V) \subseteq V$ . Jestliže matice  $A$  je maticí endomorfismu  $f$  (viz výše) splňujícího vztah  $f(V) \subseteq V$ , můžeme též říkat, že podprostor  $V$  je *A-invariantní*. Pro každý vektor  $v \in V$  je tedy  $Av^T \in V$ .

V případě, že nemůže dojít k nejasnostem, budeme místo *f-invariantní*, resp. *A-invariantní* podprostory krátce říkat *invariantní* podprostory.

**2 Věta.** Nechť  $\mathbb{C}^n$  je direktním součtem svých podprostorů  $V_1, V_2, \dots, V_u$ , tj.  $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_u$ , a nechť  $\mathcal{B}_i$  je libovolně zvolená báze vektorového prostoru  $V_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, u$ . Potom  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_u$  je báze prostoru  $\mathbb{C}^n$ .

Důkaz věty je triviální. Stačí si uvědomit, že každý vektor  $v \in \mathbb{C}^n$  lze jednoznačně zapsat jako součet  $v = v_1 + v_2 + \dots + v_u$ , kde  $v_i \in V_i$  pro každé  $i = 1, 2, \dots, u$ , a každý vektor  $v_i \in V_i$  lze jednoznačně napsat jako lineární kombinaci vektorů množiny  $\mathcal{B}_i$ .

Vzhledem k vlastnostem matic reprezentujících endomorfismy platí následující věta.

**3 Věta.** Nechť  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  je endomorfismus vektorového prostoru

$$\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_u,$$

kde podprostory  $V_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, u$ , jsou *f-invariantní*. Nechť  $\mathcal{B}_i$  je báze vektorového prostoru  $V_i$  a  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_u$ . Potom má matice  $B$  endomorfismu  $f$  vzhledem k bázi  $\mathcal{B}$  tvar

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & & & \\ & \boxed{B_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{B_u} \end{pmatrix},$$

kde na nevyplněných místech jsou nulové matice a kde řád matice  $B_i$  je roven  $\dim V_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, u$ .

**4 Definice.** Necht'  $A$  je komplexní čtvercová matice a  $\lambda$  její vlastní číslo. Množina  $\text{GKer}(A - \lambda E)$  všech vektorů  $v$ , pro které existuje přirozené číslo  $m$  takové, že  $(A - \lambda E)^m v^T = o^T$ , se nazývá *zobecněné jádro matice  $A$  příslušné vlastnímu číslu  $\lambda$* . Jestliže matice  $A$  odpovídá endomorfismu  $f$ , potom zobecněné jádro matice  $A$  příslušné vlastnímu číslu  $\lambda$  můžeme značit též  $\text{GKer}(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n})$ .

Protože ze vztahů  $(A - \lambda E)^{m_1} v_1^T = o^T$  a  $(A - \lambda E)^{m_2} v_2^T = o^T$  plyne rovnost  $(A - \lambda E)^m (c_1 v_1^T + c_2 v_2^T) = o^T$  pro  $m = \max\{m_1, m_2\}$  a libovolné  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ , je zobecněné jádro matice  $A$  příslušné vlastnímu číslu  $\lambda$  podprostorem prostoru  $\mathbb{C}^n$ .

Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu  $\lambda$  komplexní matice  $A$  řádu  $n$  spolu s nulovým vektorem jsou právě takové vektory  $v$ , které vyhovují rovnici  $(A - \lambda E)v^T = o^T$ . Všechna řešení této rovnice tvoří podprostor  $\text{Ker}(A - \lambda E)$  prostoru  $\mathbb{C}^n$ , tzv. *jádro matice  $A$  příslušné vlastnímu číslu  $\lambda$* . Je zřejmé, že  $\text{Ker}(A - \lambda E) \subseteq \text{GKer}(A - \lambda E) \subseteq \mathbb{C}^n$ , a proto

$$0 < \dim \text{Ker}(A - \lambda E) \leq \dim \text{GKer}(A - \lambda E) \leq n.$$

Číslo  $\dim \text{Ker}(A - \lambda E)$  je tzv. *geometrická násobnost* vlastního čísla  $\lambda$ , zatímco číslo  $\dim \text{GKer}(A - \lambda E)$  je, jak uvidíme později, násobnost vlastního čísla  $\lambda$ , která bývá někdy nazývána *násobností algebraickou*.

**5 Věta.** Necht'  $(\lambda - \lambda_1)^{s_1} (\lambda - \lambda_2)^{s_2} \cdots (\lambda - \lambda_u)^{s_u}$  je charakteristický polynom matice  $A$  řádu  $n$ , kde  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u$  jsou její navzájem různá vlastní čísla, a  $f$  odpovídající endomorfismus prostoru  $\mathbb{C}^n$ . Potom je

$$\mathbb{C}^n = \text{Ker}(A - \lambda_1 E)^{s_1} \oplus \text{Ker}(A - \lambda_2 E)^{s_2} \oplus \cdots \oplus \text{Ker}(A - \lambda_u E)^{s_u}$$

*direktní rozklad prostoru  $\mathbb{C}^n$  na  $f$ -invariantní podprostory.*

Tvrzení dokážeme nejprve pro  $u = 2$ . Protože jsou polynomy  $(\lambda - \lambda_1)^{s_1}$  a  $(\lambda - \lambda_1)^{s_2}$  nesoudělné, existují polynomy  $g_1, g_2$ , pro které je

$$g_1(\lambda)(\lambda - \lambda_1)^{s_1} + g_2(\lambda)(\lambda - \lambda_2)^{s_2} = 1.$$

Dosažením matice  $A$  získáme rovnost

$$g_1(A)(A - \lambda_1 E)^{s_1} + g_2(A)(A - \lambda_2 E)^{s_2} = E.$$

Pro každý vektor  $v \in \mathbb{C}^n$  je tedy

$$[g_1(A)(A - \lambda_1 E)^{s_1}]v^T + [g_2(A)(A - \lambda_2 E)^{s_2}]v^T = v^T. \quad (*)$$

Přitom je

$$(A - \lambda_2 E)^{s_2} g_1(A)(A - \lambda_1 E)^{s_1} v^T = o^T$$

a

$$(A - \lambda_1 E)^{s_1} g_2(A)(A - \lambda_2 E)^{s_2} v^T = o^T,$$

neboť  $(\lambda - \lambda_1)^{s_1}(\lambda - \lambda_2)^{s_2}$  je charakteristický (a tedy anulující) polynom matice  $A$ . Proto

$$g_1(A)(A - \lambda_1 E)^{s_1} v^T \in \text{Ker}(A - \lambda_2 E)^{s_2}$$

a

$$g_2(A)(A - \lambda_2 E)^{s_2} v^T \in \text{Ker}(A - \lambda_1 E)^{s_1}.$$

Tedy každý vektor  $v \in \mathbb{C}^n$  lze podle (\*) psát jako součet vektoru z prostoru  $\text{Ker}(A - \lambda_1 E)^{s_1}$  a vektoru z prostoru  $\text{Ker}(A - \lambda_2 E)^{s_2}$ , tj.

$$\mathbb{C}^n = \text{Ker}(A - \lambda_1 E)^{s_1} + \text{Ker}(A - \lambda_2 E)^{s_2}.$$

Pokud by  $v \in \text{Ker}(A - \lambda_1 E)^{s_1} \cap \text{Ker}(A - \lambda_2 E)^{s_2}$ , bylo by podle (\*)  $v = o$ .

Tedy

$$\mathbb{C}^n = \text{Ker}(A - \lambda_1 E)^{s_1} \oplus \text{Ker}(A - \lambda_2 E)^{s_2}.$$

Protože pro vektor  $v \in \text{Ker}(A - \lambda_1 E)^{s_1}$  je

$$(A - \lambda_1 E)^{s_1} A v^T = A(A - \lambda_1 E)^{s_1} v^T = o^T,$$

je  $\text{Ker}(A - \lambda_1 E)^{s_1}$   $f$ -invariantní. Podobně je pro vektor  $v \in \text{Ker}(A - \lambda_2 E)^{s_2}$

$$(A - \lambda_2 E)^{s_2} A v^T = A(A - \lambda_2 E)^{s_2} v^T = o^T,$$

proto je  $\text{Ker}(A - \lambda_2 E)^{s_2}$  rovněž  $f$ -invariantní.

Tím je věta pro  $u = 2$  dokázána. Indukcí zobecníme její platnost pro libovolné přirozené číslo  $u > 2$ .

**6 Věta.** *Nechť  $A$  je čtvercová komplexní matice. Je-li  $\lambda_0$  jejím  $s$ -násobným vlastním číslem, je  $0$   $s$ -násobným vlastním číslem matice  $(A - \lambda_0 E)$ .*

Jestliže má matice  $A$   $s$ -násobné vlastní číslo  $\lambda_0$ , je možno její charakteristický polynom  $\det(A - \lambda E)$  napsat ve tvaru

$$\det(A - \lambda E) = (\lambda - \lambda_0)^s \cdot g(\lambda),$$

kde  $g(\lambda_0) \neq 0$ . Charakteristický polynom matice  $A - \lambda_0 E$  má tedy tvar

$$\begin{aligned} \det((A - \lambda_0 E) - \lambda E) &= \det(A - (\lambda + \lambda_0)E) = \\ &= ((\lambda + \lambda_0) - \lambda_0)^s \cdot g(\lambda + \lambda_0) = \lambda^s \cdot \bar{g}(\lambda), \end{aligned}$$

kde  $\bar{g}(0) = g(\lambda_0) \neq 0$ . Matice  $A - \lambda_0 E$  má tedy  $s$ -násobné vlastní číslo  $0$ .

K tomuto poznatku lze dospět i jiným způsobem. Rovnosti  $J = B^{-1}AB$  a  $J - \lambda_0 E = B^{-1}(A - \lambda_0 E)B$  jsou zřejmě ekvivalentní. Z toho plyne, že  $J$  je Jordanův kanonický tvar matice  $A$  právě tehdy, je-li  $J - \lambda_0 E$  Jordanův kanonický tvar matice  $A - \lambda_0 E$ . Tedy  $\lambda_0$  je  $s$ -násobným vlastním číslem matice  $A$  právě tehdy, je-li  $\lambda_0$  právě  $s$ -krát na diagonále matice  $J$ . To nastane právě

tehdy, je-li 0 právě  $s$ -krát na diagonále matice  $J - \lambda_0 E$ , tj. právě tehdy, je-li 0  $s$ -násobným vlastním číslem matice  $A - \lambda_0 E$ . Matice  $A$ , resp.  $A - \lambda_0 E$  se na Jordanův kanonický tvar  $J$ , resp.  $J - \lambda_0 E$  transformují stejnou maticí  $B$ .<sup>115</sup>

**7 Věta.** Čtvercová komplexní matice  $A$  řádu  $n$  je nilpotentní (tj. existuje takové přirozené číslo  $t$ , že  $A^t = O$ ) právě tehdy, když má jediné vlastní číslo 0.

Vztah  $A^t = O$  platí právě tehdy, když je  $\lambda^t$  anulujícím polynomem matice  $A$ , tj. právě tehdy, když je 0 jediným vlastním číslem matice  $A$ .

**8 Věta.** Čtvercová matice, která má jediné vlastní číslo  $\lambda_0$ , je součtem skalární matice  $\lambda_0 E$  a nilpotentní matice.

Jestliže jediné vlastní číslo matice  $A$  je  $\lambda_0$ , potom je 0 jediným vlastním číslem matice  $A - \lambda_0 E$ , která je dle předchozí věty nilpotentní. Protože  $A = \lambda_0 E + (A - \lambda_0 E)$ , je důkaz hotov.

## 3.2 Nulita matice, Weyrova charakteristika

**9 Definice.** Rozdíl řádu  $n$  a hodnosti  $r(A)$  čtvercové matice  $A$  nazýváme *nulita matice*  $A$  a značíme ji  $\text{nul } A$ , tj.

$$\text{nul } A = n - r(A).$$

Uvažujme konkrétní vlastní číslo  $\lambda$  matice  $A$ . Protože je matice  $(A - \lambda E)$  singulární, je její nulita větší než 0. Pro libovolné  $k = 0, 1, \dots$  je

$$\text{nul } (A - \lambda E)^k \leq \text{nul } (A - \lambda E)^{k+1},$$

a existuje přirozené číslo  $t$ , pro které

$$0 < \text{nul } (A - \lambda E) < \text{nul } (A - \lambda E)^2 < \dots < \text{nul } (A - \lambda E)^t = \text{nul } (A - \lambda E)^{t+1} = \dots$$

Tyto relace umožňují definovat dva následující pojmy.

**10 Definice.** Nechť  $A$  je komplexní čtvercová matice a  $\lambda$  její vlastní číslo. Potom nejmenší přirozené číslo  $t$ , pro které

$$\text{nul } (A - \lambda E)^t = \text{nul } (A - \lambda E)^{t+1},$$

se nazývá *index matice*  $A$  příslušný vlastnímu číslu  $\lambda$ .

Z dosud uvedeného je zřejmé, že

$$\text{GKer } (A - \lambda E) = \text{Ker } (A - \lambda E)^t \quad (= \text{Ker } (f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n})^t),$$

<sup>115</sup> Více o tomto přechodu od obecného vlastního čísla  $\lambda$  k vlastnímu číslu 0 viz podkapitola 3.7 začínající na straně 140.

kde  $t$  je index matice  $A$  příslušný vlastnímu číslu  $\lambda$  (a  $f$  odpovídající endomorfismus prostoru  $\mathbb{C}^n$ ).

**11 Definice.** Nechť  $A$  je komplexní čtvercová matice,  $\lambda$  její vlastní číslo a  $t$  index matice  $A$  příslušný vlastnímu číslu  $\lambda$ . Potom se přirozená čísla

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \text{nul}(A - \lambda E), \\ \eta_2 &= \text{nul}(A - \lambda E)^2 - \text{nul}(A - \lambda E), \\ &\dots\dots\dots \\ \eta_t &= \text{nul}(A - \lambda E)^t - \text{nul}(A - \lambda E)^{t-1} \end{aligned}$$

nazývají *charakteristická čísla matice  $A$  příslušná vlastnímu číslu  $\lambda$* . Posloupnost  $\eta(\lambda) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t)$  se nazývá *Weyrova charakteristika matice  $A$  příslušná vlastnímu číslu  $\lambda$* .

Je tedy  $\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_t = \text{nul}(A - \lambda E)^t$  a charakteristická čísla příslušná vlastnímu číslu  $\lambda$  matice  $A$  jsou rovna přírůstkům nulit matic

$$E, \quad A - \lambda E, \quad (A - \lambda E)^2, \quad \dots, \quad (A - \lambda E)^t,$$

resp. rozdílům hodnotí dvou po sobě jdoucích matic v posloupnosti

$$E, \quad A - \lambda E, \quad (A - \lambda E)^2, \quad \dots, \quad (A - \lambda E)^t.$$

Je-li  $f$  endomorfismus vektorového prostoru  $\mathbb{C}^n$ , jehož maticí vzhledem ke kanonické bázi tohoto prostoru je matice  $A$ , jsou charakteristická čísla rovna také přírůstkům dimenzí jader endomorfismů

$$\text{Ker } 1_{\mathbb{C}^n}, \quad \text{Ker}(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n}), \quad \text{Ker}(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n})^2, \quad \dots, \quad \text{Ker}(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n})^t,$$

resp. rozdílům dimenzí dvou po sobě jdoucích obrazů endomorfismů v posloupnosti

$$\text{Im } 1_{\mathbb{C}^n}, \quad \text{Im}(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n}), \quad \text{Im}(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n})^2, \quad \dots, \quad \text{Im}(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n})^t.$$

Raději znovu zdůrazněme, že

$$\dim \text{GKer}(A - \lambda E) = \dim \text{Ker}(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n})^t = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_t.$$

**12 Věta.** Nechť  $A$  je komplexní čtvercová matice,  $\lambda$  její  $s$ -násobné vlastní číslo a  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$  příslušná charakteristická čísla. Potom platí:

$$\eta_1 \geq \eta_2 \geq \dots \geq \eta_t > 0.$$

Z předchozího plyne, že pro  $i = 1, 2, \dots, t$  je

$$\eta_i = \dim \text{Im}(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n})^{i-1} - \dim \text{Im}(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n})^i.$$

Zúžení endomorfismu  $(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n})$  zobrazuje podprostor  $\text{Im}(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n})^{i-1}$  na podprostor  $\text{Im}(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n})^i$ . Podle věty o hodnotě a defektu je

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Im}(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n})^{i-1} &= \\ &= \dim \operatorname{Im}(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n})^i + \dim [\operatorname{Ker}(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n}) \cap \operatorname{Im}(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n})^{i-1}], \end{aligned}$$

tj.

$$\eta_i = \dim [\operatorname{Ker}(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n}) \cap \operatorname{Im}(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n})^{i-1}].$$

Protože je zřejmě

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n}) \supseteq \operatorname{Ker}(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n}) \cap \operatorname{Im}(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n}) &\supseteq \dots \\ \dots \supseteq \operatorname{Ker}(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n}) \cap \operatorname{Im}(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n})^{t-1} &\supseteq O, \end{aligned}$$

je

$$\eta_1 \geq \eta_2 \geq \dots \geq \eta_t.$$

Na posledních řádcích předcházejícího důkazu jsme si vhodně pomohli podprostory  $\operatorname{Ker}(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n}) \cap \operatorname{Im}(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n})^i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, t-1$ . Využijme je nyní efektivně znovu (tentokrát vše zapisujeme v maticové symbolice) ke konstrukci báze podprostoru  $\operatorname{Ker}(A - \lambda E)$  prostoru  $\mathbb{C}^n$ . Sestrojme nejprve bázi podprostoru  $\operatorname{Ker}(A - \lambda E) \cap \operatorname{Im}(A - \lambda E)^{t-1}$ , poté ji rozšířme na bázi podprostoru  $\operatorname{Ker}(A - \lambda E) \cap \operatorname{Im}(A - \lambda E)^{t-2}$ , tu rozšířme na bázi podprostoru  $\operatorname{Ker}(A - \lambda E) \cap \operatorname{Im}(A - \lambda E)^{t-3}$  a takto postupujeme dále, až obdržíme bázi podprostoru  $\operatorname{Ker}(A - \lambda E)$ .

Konstrukci sledujme na následující obrázku, v němž  $X$  značí (pro úsporu místa) matici  $A - \lambda E$  a symbol  $v$  (ze stejného důvodu) sloupcový vektor  $v^T$ . V doprovodném textu však používáme plného zápisu.

Postupně získáme následující báze:

$${}_{t-1}\mathcal{B} = \{(A - \lambda E)^{t-1}v_1^T, (A - \lambda E)^{t-1}v_2^T, \dots, (A - \lambda E)^{t-1}v_{\eta_t}^T\}$$

$${}_{t-2}\mathcal{B} = {}_{t-1}\mathcal{B} \cup {}_{t-2}\mathcal{C}, \text{ kde}$$

$${}_{t-2}\mathcal{C} = \{(A - \lambda E)^{t-2}v_{\eta_{t+1}}^T, (A - \lambda E)^{t-2}v_{\eta_{t+2}}^T, \dots, (A - \lambda E)^{t-2}v_{\eta_{t-1}}^T\},$$

$${}_{t-3}\mathcal{B} = {}_{t-2}\mathcal{B} \cup {}_{t-3}\mathcal{C}, \text{ kde}$$

$${}_{t-3}\mathcal{C} = \{(A - \lambda E)^{t-3}v_{\eta_{t+1}}^T, (A - \lambda E)^{t-3}v_{\eta_{t+2}}^T, \dots, (A - \lambda E)^{t-3}v_{\eta_{t-2}}^T\},$$

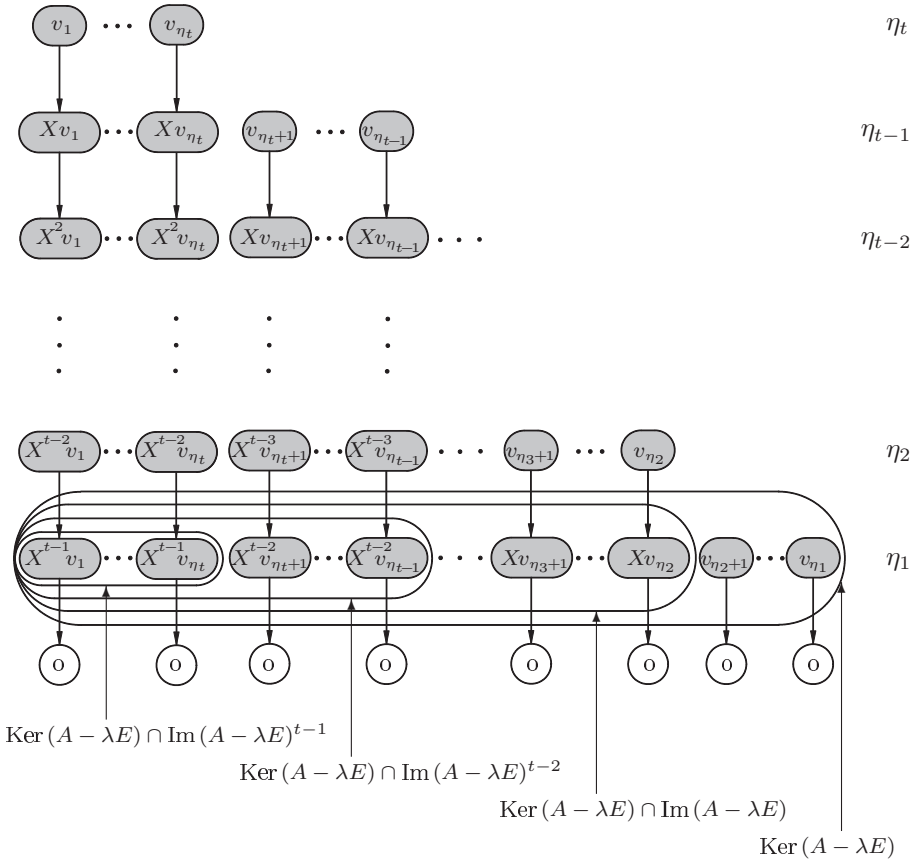
.....

$${}_1\mathcal{B} = {}_2\mathcal{B} \cup {}_1\mathcal{C}, \text{ kde}$$

$${}_1\mathcal{C} = \{(A - \lambda E)v_{\eta_3+1}^T, (A - \lambda E)v_{\eta_3+2}^T, \dots, (A - \lambda E)v_{\eta_2}^T\},$$

$${}_0\mathcal{B} = {}_1\mathcal{B} \cup {}_0\mathcal{C}, \text{ kde } {}_0\mathcal{C} = \{v_{\eta_2+1}^T, v_{\eta_2+2}^T, \dots, v_{\eta_1}^T\}.$$





Poznamenejme, že vektory báze  ${}_{t-1}\mathcal{B}$  musí mít tvar  $(A - \lambda E)^{t-1}v_i^T$ ,  $i = 1, 2, \dots, \eta_t$ , neboť se jedná o bázi prostoru  $\text{Ker}(A - \lambda E) \cap \text{Im}(A - \lambda E)^{t-1}$ . Obdobně musí mít vektory ležící v rozšíření báze  ${}_{t-1}\mathcal{B}$  na bázi  ${}_{t-2}\mathcal{B}$ , tj. v množině  ${}_{t-2}C$ , tvar  $(A - \lambda E)^{t-2}v_i^T$ ,  $i = \eta_t + 1, \eta_t + 2, \dots, \eta_{t-1}$ , atd. Konečné vektory ležící v rozšíření báze  ${}_{2}\mathcal{B}$  na bázi  ${}_{1}\mathcal{B}$ , tj. v množině  ${}_{1}C$ , musí mít tvar  $(A - \lambda E)v_i^T$ ,  $i = \eta_3 + 1, \eta_3 + 2, \dots, \eta_2$ .

Bázi  ${}_0\mathcal{B}$  prostoru  $\text{Ker}(A - \lambda E)$  nyní rozšíříme na bázi  $\bar{\mathcal{B}}$  prostoru  $\text{GKer}(A - \lambda E)$ : k vektorům  $v_1, v_2, \dots, v_{\eta_1}$  přiřadíme všechny nenulové vektory tvaru  $(A - \lambda E)^j v_i^T$ . Bázi  $\bar{\mathcal{B}}$  budeme konstruovat jako uspořádanou množinu (její uspořádání lze nahlédnout na předcházejícím obrázku):



matice endomorfismu  $f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n}$  má vzhledem k bázi  $\tilde{B}$  tvar

$$\begin{pmatrix} J & K \\ O & L \end{pmatrix},$$

kde  $J$  je Jordanova matice řádu  $\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_t$  s nulami na diagonále a s  $\eta_1$  Jordanovými buňkami. (Každému sloupci z předchozího obrázku odpovídá jedna buňka.)<sup>116</sup> Matice endomorfismu  $f$  má tedy vzhledem k bázi  $\tilde{B}$  tvar

$$\begin{pmatrix} J + \lambda E & K \\ O & L + \lambda E \end{pmatrix},$$

kde  $J + \lambda E$  je Jordanova matice stejného řádu a se stejným počtem buněk jako matice  $J$ , ale na diagonále má vlastní číslo  $\lambda$ . Vzhledem k řádu matice  $J + \lambda E$ , je násobnost  $s$  vlastního čísla  $\lambda$  matice  $A$  alespoň  $\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_t$ , což je přiřazené číslo větší nebo rovno  $t$ , tj.

$$t \leq \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_t \leq s.$$

Z nerovnosti  $t \leq s$  a z definice indexu matice příslušného vlastnímu číslu  $\lambda$  vyplývá, že

$$\text{Ker}(A - \lambda E)^s = \text{Ker}(A - \lambda E)^t = \text{GKer}(A - \lambda E).$$

Dosud jsme pracovali s jedním vlastním číslem matice  $A$ . Stejně můžeme postupovat pro každé vlastní číslo  $\lambda_i$  násobnosti  $s_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, u$ . V dalším textu necht'  $i\eta_1, i\eta_2, \dots, i\eta_{t_i}$  značí charakteristická čísla matice  $A$  příslušná vlastnímu číslu  $\lambda_i$ , kde  $t_i$  je index matice  $A$  příslušný tomuto vlastnímu číslu, a necht'  $\mathcal{B}_i$  značí uspořádanou bázi prostoru  $\text{GKer}(A - \lambda_i E)$  utvořenou výše uvedeným postupem.

**14 Věta (o rozkladu prostoru  $\mathbb{C}^n$  na zobecněná jádra).** *Necht'  $A$  je čtvercová matice,  $t_1, t_2, \dots, t_u$  indexy matice  $A$  příslušné jejím navzájem různým vlastním číslům  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u$  a  $f$  odpovídající endomorfismus prostoru  $\mathbb{C}^n$ . Potom je*

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n &= \text{Ker}(A - \lambda_1 E)^{t_1} \oplus \text{Ker}(A - \lambda_2 E)^{t_2} \oplus \dots \oplus \text{Ker}(A - \lambda_u E)^{t_u} = \\ &= \text{GKer}(A - \lambda_1 E) \oplus \text{GKer}(A - \lambda_2 E) \oplus \dots \oplus \text{GKer}(A - \lambda_u E) \end{aligned}$$

*direktní rozklad prostoru  $\mathbb{C}^n$  na  $f$ -invariantní podprostory.*

Věta je přímým důsledkem Věty 5 a rovností

$$\text{Ker}(A - \lambda_i E)^{s_i} = \text{Ker}(A - \lambda_i E)^{t_i} = \text{GKer}(A - \lambda_i E).$$

<sup>116</sup> V další podkapitole zavedeme pro uspořádanou množinu vektorů z jednotlivých sloupců schématu název *Jordanův řetízek* a také v ní podrobněji vysvětlíme souvislost mezi Jordanovými řetízky, Jordanovými buňkami a bázi zobecněného jádra.

**15 Věta.** *Nechť  $A$  je komplexní čtvercová matice s navzájem různými vlastními čísly  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u$ . Dále nechť  $\mathcal{B}_i$  jsou báze prostorů  $\text{GKer}(A - \lambda_i E)$ ,  $i = 1, 2, \dots, u$ , zkonstruované výše uvedeným postupem. Potom je množina  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_u$  bází prostoru  $\mathbb{C}^n$ .*

Věta plyne z Věty 2 a z Věty 14 o rozkladu prostoru  $\mathbb{C}^n$  na zobecněná jádra.

**16 Věta.** *Nechť  $A$  je komplexní čtvercová matice,  $\lambda$  její  $s$ -násobné vlastní číslo a  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$  příslušná charakteristická čísla. Potom platí:*

$$\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_t = s.$$

Ve výše uvedených úvahách jsme dospěli k poznatku, že násobnost  $s_i$  vlastního čísla  $\lambda_i$  je rovna nebo převyšuje součet všech charakteristických čísel příslušných k  $\lambda_i$ . Tento součet je dle definice charakteristických čísel roven dimenzi prostoru  $\text{GKer}(A - \lambda_i E)$ . Aplikujeme-li tato tvrzení na všechna vlastní čísla matice  $A$ , získáme pomocí věty o rozkladu prostoru  $\mathbb{C}^n$  na zobecněná jádra následující vztahy:

$$n = \sum_{i=1}^u \dim \text{GKer}(A - \lambda_i E) = \sum_{i=1}^u ({}^i\eta_1 + {}^i\eta_2 + \dots + {}^i\eta_{t_i}) \leq \sum_{i=1}^u s_i = n,$$

tedy i

$$\sum_{i=1}^u ({}^i\eta_1 + {}^i\eta_2 + \dots + {}^i\eta_{t_i}) = \sum_{i=1}^u s_i,$$

neboli pro každé vlastní číslo  $\lambda_i$  je

$${}^i\eta_1 + {}^i\eta_2 + \dots + {}^i\eta_{t_i} = s_i.$$

**17 Věta.** *Nechť  $A$  je komplexní čtvercová matice řádu  $n$  s navzájem různými vlastními čísly  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, u$ , nechť  $\mathcal{B}_i$  jsou báze prostorů  $\text{GKer}(A - \lambda_i E)$ ,  $i = 1, 2, \dots, u$ , zkonstruované výše uvedeným postupem a  $f$  je endomorfismus prostoru  $\mathbb{C}^n$ , jehož maticí vzhledem ke kanonické bázi je matice  $A$ . Potom endomorfismus  $f$  má vzhledem k uspořádané bázi  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_u$  matici*

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_u} \end{pmatrix},$$

kde  $J_i$  jsou Jordanovy matice. Jinými slovy,  $J$  je Jordanův kanonický tvar matice  $A$ .

Důkaz věty je triviální. Uvědomme si, že vektory báze  $\mathcal{B}_1$ , tj. prvních  $s_1$  vektorů báze  $\bigcup_{i=1}^u \mathcal{B}_i$ , určují Jordanovu matici  $J_1$  řádu  $s_1$  s vlastním číslem  $\lambda_1$  na diagonále, jejíž strukturu jednoznačně udávají charakteristická čísla matice  $A$  příslušná vlastnímu číslu  $\lambda_1$ , vektory báze  $\mathcal{B}_2$ , určují Jordanovu matici  $J_2$  řádu  $s_2$  s vlastním číslem  $\lambda_2$  na diagonále, jejíž strukturu jednoznačně udávají charakteristická čísla matice  $A$  příslušná vlastnímu číslu  $\lambda_2$  atd. Konečně vektory báze  $\mathcal{B}_u$ , tj. posledních  $s_u$  vektorů báze  $\bigcup_{i=1}^u \mathcal{B}_i$ , určují Jordanovu matici  $J_u$  řádu  $s_u$  s vlastním číslem  $\lambda_u$  na diagonále, jejíž strukturu jednoznačně udávají charakteristická čísla matice  $A$  příslušná vlastnímu číslu  $\lambda_u$ . Vzhledem k direktnímu rozkladu na zobecněná jádra jsou na pozicích vně diagonálních bloků nulové matice.

**18 Věta.** *Nechť  $A$  je komplexní čtvercová matice a nechť  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u$  jsou její navzájem různá vlastní čísla, jejichž násobnosti jsou po řadě  $s_1, s_2, \dots, s_u$ . Potom je matice  $A$  podobná matici*

$$\left( \begin{array}{cccc} \boxed{\lambda_1 E + N_1} & & & \\ & \boxed{\lambda_2 E + N_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\lambda_u E + N_u} \end{array} \right),$$

kde na nevyplněných místech jsou nulové matice a pro každé  $i = 1, 2, \dots, u$  je  $N_i$  nilpotentní matice řádu  $s_i$ .

Věta je přímým důsledkem Věty 17. Lze ji však také považovat za důsledek Věty 3, Věty 8 a Věty 14.

**19 Definice.** Nechť  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u$  jsou navzájem různá vlastní čísla čtvercové komplexní matice  $A$ , nechť  $({}^1\eta_1, {}^1\eta_2, \dots, {}^1\eta_{t_1})$  je Weyrova charakteristika matice  $A$  příslušná vlastnímu číslu  $\lambda_1$ ,  $({}^2\eta_1, {}^2\eta_2, \dots, {}^2\eta_{t_2})$  je Weyrova charakteristika matice  $A$  příslušná vlastnímu číslu  $\lambda_2$  atd. až  $({}^u\eta_1, {}^u\eta_2, \dots, {}^u\eta_{t_u})$  je Weyrova charakteristika matice  $A$  příslušná vlastnímu číslu  $\lambda_u$ . Potom soustavu přirozených čísel

$$\eta(A) = [({}^1\eta_1, {}^1\eta_2, \dots, {}^1\eta_{t_1}), ({}^2\eta_1, {}^2\eta_2, \dots, {}^2\eta_{t_2}), \dots, ({}^u\eta_1, {}^u\eta_2, \dots, {}^u\eta_{t_u})]$$

nazýváme *Weyrova charakteristika matice  $A$* .

**20 Věta.** *Nechť  $A$  je čtvercová komplexní matice řádu  $n$ , nechť  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u$  jsou její navzájem různá vlastní čísla a*

$$\eta(A) = [({}^1\eta_1, {}^1\eta_2, \dots, {}^1\eta_{t_1}), ({}^2\eta_1, {}^2\eta_2, \dots, {}^2\eta_{t_2}), \dots, ({}^u\eta_1, {}^u\eta_2, \dots, {}^u\eta_{t_u})]$$

*je Weyrova charakteristika matice  $A$ . Potom součet všech charakteristických čísel Weyrovy charakteristiky matice  $A$  je roven řádu  $n$  matice  $A$ .*

Důkaz této věty byl v podstatě proveden již v důkazu Věty 16. Stačí si pouze uvědomit, že součet charakteristických čísel příslušných vlastnímu číslu  $\lambda_i$  je roven násobnosti  $s_i$  tohoto vlastního čísla  $\lambda_i$  a součet násobností všech navzájem různých vlastních čísel je roven řádu  $n$  matice  $A$ , tj.

$$n = \sum_{i=1}^u s_i,$$

kde

$$s_1 = \sum_{i=1}^{t_1} 1 \eta_i, \quad s_2 = \sum_{i=1}^{t_2} 2 \eta_i, \quad \dots, \quad s_u = \sum_{i=1}^{t_u} u \eta_i.$$

Hluboké výsledky jsou zachyceny ve dvou následujících větách.

**21 Věta.** *Dvě matice jsou podobné právě tehdy, když mají stejná vlastní čísla a jim příslušné Weyrovy charakteristiky. Vlastní čísla a charakteristická čísla vytvářejí úplný systém invariantů podobnosti matic.*

Tvrzení věty je důsledkem postupu, který byl uveden v důkazu Věty 17, a skutečnosti, že dvě matice jsou podobné právě tehdy, když mají stejný Jordanův kanonický tvar.

**22 Věta.** *Nechť  $A$  je čtvercová komplexní matice,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u$  její navzájem různá vlastní čísla a  $t_1, t_2, \dots, t_u$  po řadě indexy matice  $A$  příslušné vlastním číslům  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u$ . Potom polynom*

$$(\lambda - \lambda_1)^{t_1} (\lambda - \lambda_2)^{t_2} \dots (\lambda - \lambda_u)^{t_u}$$

*je minimálním polynomem matice  $A$ .*

Musíme dokázat, že matice

$$M = (A - \lambda_1 E)^{t_1} (A - \lambda_2 E)^{t_2} \dots (A - \lambda_u E)^{t_u}$$

je nulová. K tomu stačí zjistit, že  $Mv^T = o^T$  pro každý vektor  $v \in \mathbb{C}^n$ . Vektor  $v$  lze vyjádřit (viz Věta 14) ve tvaru  $v = v_1 + v_2 + \dots + v_u$ , kde  $v_i \in \text{Ker}(A - \lambda_i E)^{t_i}$  pro každé  $i = 1, 2, \dots, u$ . Protože matice  $(A - \lambda_i E)^{t_i}$  navzájem komutují, je  $Mv_i^T = o^T$ , a tedy  $Mv^T = o^T$ . Polynom

$$(\lambda - \lambda_1)^{t_1} (\lambda - \lambda_2)^{t_2} \dots (\lambda - \lambda_u)^{t_u}$$

je tedy anulujícím polynomem matice  $A$ .

Nyní dokažme, že je to anulující polynom nejmenšího stupně. Pokud by měl minimální polynom stupeň menší než  $t_1 + t_2 + \dots + t_u$ , obsahoval by např. faktor  $(\lambda - \lambda_1)^c$ , kde  $c < t_1$ . Zvolíme-li vektor  $v \in \text{Ker}(A - \lambda_1 E)^{t_1} \setminus \text{Ker}(A - \lambda_1 E)^c$ , je  $Mv^T \neq o^T$ , a tedy  $M$  není nulová matice.

Demonstrujeme uvedené poznatky na konkrétním příkladu. Uvažujeme matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 4 & -4 & -1 & 1 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 4 & -4 & -1 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & 6 & -6 & 5 & 6 & -5 & -6 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Její charakteristická rovnice je  $(\lambda - 2)^7(\lambda + 3)^5 = 0$ , matice  $A$  tedy má sedmínásobné vlastní číslo 2 a pětinasobné vlastní číslo  $-3$ . Výpočtem zjistíme, že

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 4 & -4 & -1 & -1 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 4 & -4 & -1 & -1 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & 6 & -6 & 5 & 6 & -5 & -6 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -6 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix},$$

hodnost této matice je 9, a proto je její nulita  $\text{nul}(A - 2E) = 12 - 9 = 3$ . Dále vypočítáme matice  $(A - \lambda E)^2$ ,  $(A - \lambda E)^3$ , ... a jejich hodnosti, resp. nulity. Dostaneme tyto výsledky:

$$\begin{array}{ll} r(A - 2E) & = 9, & \text{nul}(A - 2E) & = 3, \\ r(A - 2E)^2 & = 7, & \text{nul}(A - 2E)^2 & = 5, \\ r(A - 2E)^3 & = 6, & \text{nul}(A - 2E)^3 & = 6, \\ r(A - 2E)^4 & = 5, & \text{nul}(A - 2E)^4 & = 7, \\ r(A - 2E)^5 & = 5, & \text{nul}(A - 2E)^5 & = 7. \end{array}$$

Protože  $\text{nul}(A - 2E)^4 = \text{nul}(A - 2E)^5$ , je zbytečné počítat vyšší mocniny; index  $t_1$  matice  $A$  příslušný vlastnímu číslu 2 je 4. Vypočítáme přírůstky nulit mocnin matice  $A - 2E$ , čímž získáme charakteristická čísla matice  $A$  příslušná

vlastnímu číslu 2:

$$\begin{aligned} {}^1\eta_1 &= \text{nul}(A - 2E) = 3, \\ {}^1\eta_2 &= \text{nul}(A - 2E)^2 - \text{nul}(A - 2E) = 5 - 3 = 2, \\ {}^1\eta_3 &= \text{nul}(A - 2E)^3 - \text{nul}(A - 2E)^2 = 6 - 5 = 1, \\ {}^1\eta_4 &= \text{nul}(A - 2E)^4 - \text{nul}(A - 2E)^3 = 7 - 6 = 1. \end{aligned}$$

Skutečně  $3 \geq 2 \geq 1 \geq 1$ ,  $s_1 = {}^1\eta_1 + {}^1\eta_2 + {}^1\eta_3 + {}^1\eta_4 = 7$ . Weyrova charakteristika matice  $A$  příslušná vlastnímu číslu 2 je  $(3, 2, 1, 1)$ . Zcela analogicky postupujeme u vlastního čísla  $-3$ :

$$A + 3E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 5 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 4 & -4 & -1 & 4 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 4 & -4 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & 6 & -6 & 5 & 6 & -5 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} r(A + 3E) &= 9, & \text{nul}(A + 3E) &= 3, \\ r(A + 3E)^2 &= 7, & \text{nul}(A + 3E)^2 &= 5, \\ r(A + 3E)^3 &= 7, & \text{nul}(A + 3E)^3 &= 5. \end{aligned}$$

Tedy  $t_2 = 2$  a charakteristická čísla matice  $A$  příslušná vlastnímu číslu  $-3$  jsou:

$$\begin{aligned} {}^2\eta_1 &= \text{nul}(A + 3E) = 3, \\ {}^2\eta_2 &= \text{nul}(A + 3E)^2 - \text{nul}(A + 3E) = 5 - 3 = 2. \end{aligned}$$

Opět platí:  $3 \geq 2$ ,  $s_2 = {}^2\eta_1 + {}^2\eta_2 = 5$ . Weyrova charakteristika matice  $A$  příslušná vlastnímu číslu  $-3$  je  $(3, 2)$ .

Weyrova charakteristika matice  $A$  je  $[(3, 2, 1, 1), (3, 2)]$  a je splněna i rovnost mezi součtem všech jejích charakteristických čísel a řádem matice  $A$ :  $3+2+1+1+3+2=12$ .

Minimální polynom matice  $A$  je  $(\lambda - 2)^4(\lambda + 3)^2$ .

### 3.3 Jordanova báze, Jordanovy řetízky

V předcházející podkapitole 3.2 jsme sestrojili bázi  $\bigcup_{i=1}^u \mathcal{B}_i$  prostoru  $\mathbb{C}^n$ , která byla složena z určitých „řetízků“ vektorů (v jednotlivých disjunktních podmnožinách). Popíšme nyní vztahy mezi vektory této báze podrobněji a zavedme příslušnou terminologii.

Připomeňme, že jsme komplexní matici  $A$  řádu  $n$  přiřadili odpovídající endomorfismus  $f$  vektorového prostoru  $\mathbb{C}^n$ , matice  $A$  je tedy maticí endomorfismu  $f$  vzhledem ke kanonické bázi prostoru  $\mathbb{C}^n$ . Uvažujme Jordanův





tj.

$$\begin{array}{ll}
 (f - 2 \cdot 1_{\mathbb{C}^n})(v_1) = o, & (f + 3 \cdot 1_{\mathbb{C}^n})(v_8) = o, \\
 (f - 2 \cdot 1_{\mathbb{C}^n})(v_2) = v_1, & (f + 3 \cdot 1_{\mathbb{C}^n})(v_9) = v_8, \\
 (f - 2 \cdot 1_{\mathbb{C}^n})(v_3) = v_2, & (f + 3 \cdot 1_{\mathbb{C}^n})(v_{10}) = o, \\
 (f - 2 \cdot 1_{\mathbb{C}^n})(v_4) = v_3, & (f + 3 \cdot 1_{\mathbb{C}^n})(v_{11}) = v_{10}, \\
 (f - 2 \cdot 1_{\mathbb{C}^n})(v_5) = o, & (f + 3 \cdot 1_{\mathbb{C}^n})(v_{12}) = o. \\
 (f - 2 \cdot 1_{\mathbb{C}^n})(v_6) = v_5, & \\
 (f - 2 \cdot 1_{\mathbb{C}^n})(v_7) = o, &
 \end{array}$$

Vektory  $v_1, v_5$  a  $v_7$  jsou vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 2, vektory  $v_8, v_{10}$  a  $v_{12}$  jsou vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu  $-3$ . Vyjádříme-li vztahy v maticové symbolice, získáme soustavy rovnic, z nichž lze vektory  $v_1, v_2, \dots, v_{12}$  postupně vypočítat:

$$\begin{array}{ll}
 (A - 2E)v_1^T = o^T, & (A + 3E)v_8^T = o^T, \\
 (A - 2E)v_2^T = v_1^T, & (A + 3E)v_9^T = v_8^T, \\
 (A - 2E)v_3^T = v_2^T, & (A + 3E)v_{10}^T = o^T, \\
 (A - 2E)v_4^T = v_3^T, & (A + 3E)v_{11}^T = v_{10}^T, \\
 (A - 2E)v_5^T = o^T, & (A + 3E)v_{12}^T = o^T. \\
 (A - 2E)v_6^T = v_5^T, & \\
 (A - 2E)v_7^T = o^T, &
 \end{array}$$

Vlastní vektory  $v_1, v_5, v_7, v_8, v_{10}$  a  $v_{12}$  získáme řešením homogenních soustav, vektor  $v_2$  řešením nehomogenní soustavy s maticí  $A - 2E$  a pravou stranou  $v_1^T$ , vektor  $v_3$  řešením nehomogenní soustavy s maticí  $A - 2E$  a pravou stranou  $v_2^T$  atd.

V našem konkrétním příkladu dostáváme:

$$\begin{array}{ll}
 v_1 = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & v_7 = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0), \\
 v_2 = (0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & v_8 = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0), \\
 v_3 = (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & v_9 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0), \\
 v_4 = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0), & v_{10} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0), \\
 v_5 = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0), & v_{11} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1), \\
 v_6 = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0), & v_{12} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1).
 \end{array}$$

Zapíšeme-li tyto vektory do sloupců matice, získáme matici  $G$  z výše uvedeného vztahu  $J = G^{-1}AG$ :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

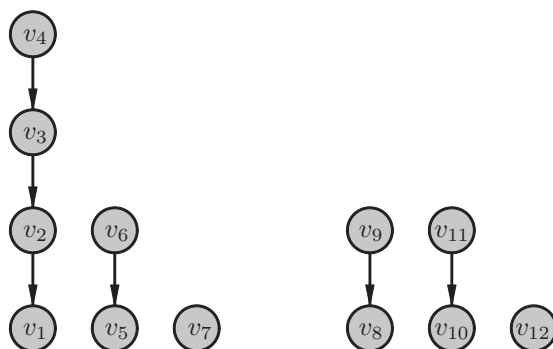
**23 Definice.** Necht'  $A$  je komplexní čtvercová matice řádu  $n$ . Uspořádaná báze vektorového prostoru  $\mathbb{C}^n$ , jejíž prvky (v témže pořadí) tvoří sloupce transformační matice  $G$  při převodu matice  $A$  na Jordanův kanonický tvar  $J = G^{-1}AG$ , se nazývá *Jordanova báze*<sup>117</sup> prostoru  $\mathbb{C}^n$  příslušná k matici  $A$ .

Endomorfismus  $f$ , který má vzhledem ke kanonické bázi prostoru  $\mathbb{C}^n$  matici  $A$ , má vůči Jordanově bázi prostoru  $\mathbb{C}^n$  příslušné k matici  $A$  Jordanovu matici  $J = G^{-1}AG$ .

Poznamenejme, že transformační matice  $G$  není určena jednoznačně. (Řešení soustav rovnic na str. 115 není jediné – například s každým vlastním vektorem vypočítaným z homogenní soustavy rovnic je řešením soustavy také jeho násobek apod.) Každé takové matici  $G$  odpovídá nějaká Jordanova báze (tvořená sloupci matice  $G$ ), kterou můžeme disjunktně rozdělit na části korespondující s jednotlivými Jordanovými bloky. Takové rozdělení  $\mathcal{J} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_u$  souhlasí s konstrukcí báze, která je uvedena v podkapitole 3.2.

Vraťme se k výsledkům násobení vektorů  $v_1, v_2, \dots, v_7$ , resp.  $v_8, v_9, \dots, v_{12}$  maticí  $A - 2E$ , resp.  $A + 3E$  zleva, neboli k obrazům vektorů  $v_1, v_2, \dots, v_7$ , resp.  $v_8, v_9, \dots, v_{12}$  v endomorfismu  $(f - 2 \cdot 1_{\mathbb{C}^n})$ , resp.  $(f + 3 \cdot 1_{\mathbb{C}^n})$ . Vektor  $v_4$  se zobrazil na vektor  $v_3$ , vektor  $v_3$  na vektor  $v_2$ , vektor  $v_2$  na vektor  $v_1$  a vektor  $v_1$  na nulový vektor  $o$ ; vektor  $v_6$  na vektor  $v_5$  a vektor  $v_5$  na nulový vektor  $o$ ; vektor  $v_7$  na nulový vektor  $o$ . Obdobné vazby platí mezi vektory druhé skupiny přináležející vlastnímu číslu  $-3$ , tj. mezi vektory  $v_8, v_9, \dots, v_{12}$ . Tyto řetězové procesy lze jednoduše zobrazit:

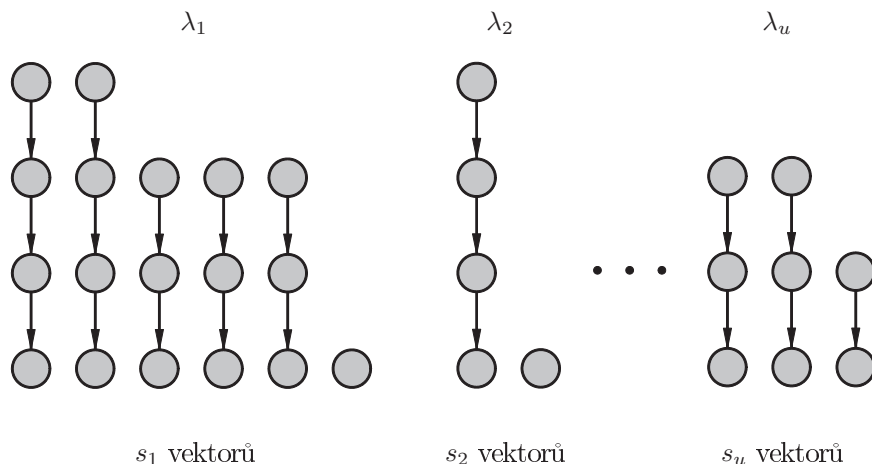
<sup>117</sup> S tímto termínem (*Jordan basis*) se setkáváme v současných zahraničních publikacích z lineární algebry. Učebnice Jindřicha Bečváře *Lineární algebra* [Be5] uvádí název Weyrova báze. Jedná se totiž o modifikovanou Weyrovu normální soustavu vektorů. Ponechme termín Weyrova báze pro mírně pozměněný pojem (viz dále).



**24 Definice.** Necht'  $A$  je komplexní čtvercová matice a  $\lambda$  její vlastní číslo. Uspořádaná množina nenulových vektorů  $\{v^T, (A - \lambda E)v^T, \dots, (A - \lambda E)^{k-1}v^T\}$ , kde  $(A - \lambda E)^k v^T = o^T$  a  $k \in \mathbb{N}$ , se nazývá *Jordanův řetízek matice  $A$  příslušný vlastnímu číslu  $\lambda$* .<sup>118</sup>

Je zřejmé, že vektory tvořící Jordanovy řetízky matice  $A$  příslušné vlastnímu číslu  $\lambda$  náležejí zobecněnému jádru  $\text{GKer}(A - \lambda E)$ .

Uvažujme nyní Jordanovy řetízky příslušné všem různým vlastním číslům  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u$  s násobnostmi  $s_1, s_2, \dots, s_u$  dané čtvercové matice  $A$  řádu  $n$ . Příklad souboru Jordanových řetízků je na následujícím obrázku.



<sup>118</sup> V české verzi *Numerické metody lineární algebry* učebnice *Vyčísliatel'nyje metody linejnoj algebry* [Fj1], str. 76, použil Miroslav Fiedler, překladatel této učebnice, pro Jordanovy řetízky termín *věže*, kterým se od sebe názorně oddělí vlastní vektory matice příslušné danému vlastnímu číslu (představované přízemními věží) od vektorů kořenového podprostoru, které nejsou vlastními vektory (reprezentované vyššími patry věží). Výška věže je potom totožná s tzv. *výškou vektoru* (viz dále). K terminologii ještě podotkneme, že podprostor  $\text{GKer}(A - \lambda E)$  nazval Miroslav Fiedler *kořenový podprostor odpovídající číslu  $\lambda$* .

Z tvrzení, která byla řečena pro bázi  $\bigcup_{i=1}^u \mathcal{B}_i$ , a ze vztahu mezi touto bází a Jordanovými řetízky plyne následující věta.

**25 Věta.** *Ke každému vlastnímu číslu  $\lambda$  matice  $A$  existuje soubor Jordanových řetízků, které obsahují právě tolik vektorů, kolik je násobnost vlastního čísla  $\lambda$ . Tato množina vektorů je lineárně nezávislá. Sjednocení takovýchto množin pro všechna vlastní čísla matice  $A$  je opět lineárně nezávislá množina. Počet jejich prvků je roven řádu matice  $A$ . Je to Jordanova báze prostoru  $\mathbb{C}^n$  příslušná matici  $A$ .*<sup>119</sup>

### 3.4 Segreova charakteristika, dualita posloupností

**26 Definice.** Nechť  $A$  je komplexní čtvercová matice řádu  $n$ ,  $J$  její Jordanův kanonický tvar a  $\lambda$  některé její vlastní číslo. Nerostoucí posloupnost  $\xi(\lambda) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q)$  sestavená z řádů  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$ , všech Jordanových buněk matice  $J$ , které se vztahují k vlastnímu číslu  $\lambda$ , se nazývá *Segreova charakteristika matice  $A$  příslušná vlastnímu číslu  $\lambda$* .<sup>120</sup>

**27 Definice.** Nechť  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u$  jsou navzájem různá vlastní čísla komplexní čtvercové matice  $A$  řádu  $n$ , nechť  $({}^1\xi_1, {}^1\xi_2, \dots, {}^1\xi_{q_1})$  je Segreova charakteristika matice  $A$  příslušná vlastnímu číslu  $\lambda_1$ , nechť  $({}^2\xi_1, {}^2\xi_2, \dots, {}^2\xi_{q_2})$  je Segreova charakteristika matice  $A$  příslušná vlastnímu číslu  $\lambda_2$  atd. a  $({}^u\xi_1, {}^u\xi_2, \dots, {}^u\xi_{q_u})$  Segreova charakteristika matice  $A$  příslušná vlastnímu číslu  $\lambda_u$ . Potom soustava přirozených čísel

$$\xi(A) = [({}^1\xi_1, {}^1\xi_2, \dots, {}^1\xi_{q_1}), ({}^2\xi_1, {}^2\xi_2, \dots, {}^2\xi_{q_2}), \dots, ({}^u\xi_1, {}^u\xi_2, \dots, {}^u\xi_{q_u})]$$

se nazývá *Segreova charakteristika matice  $A$* .

Právě zavedená charakteristika nese jméno italského matematika Corrada Segre<sup>121</sup> (1863–1924).

<sup>119</sup> Jako sjednocení Jordanových řetízků je Jordanova báze také často definována.

<sup>120</sup> Článek Daniela Hershkowitze *The relation between the Jordan structure of a matrix and its graph* [He4] používá termín *Jordan characteristic*, monografie Kevina O'Meary, Johna Clarka a Charlese Vinsonhalera *Advanced Topics in Linear Algebra: Weaving Matrix Problems through the Weyr Form* [OCV1] termín *Jordan structure*.

<sup>121</sup> Segre C., *Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* [Sg1] z roku 1884. Charakteristika je v uvedeném Segreově článku zavedena takto (str. 136–137):

*Ora il Weierstrass ha dimostrato ... che la condizione necessaria e sufficiente perchè si possa effettuare questa trasformazione è che i divisori elementari del determinante  $|a_{ik} - \varrho b_{ik}|$  coincidano con quelli del determinante  $|p_{ik} - \varrho q_{ik}|$ . Dicendo  $e_t, e'_t, \dots, e_t^{(h_t-1)}$  i gradi (in ordine decrescente di grandezza) dei divisori elementari del determinante  $|a_{ik} - \varrho b_{ik}|$  corrispondenti ad una stessa radice  $\varrho$ , e chiamando caratteristica l'insieme di questi gradi così raggruppati:*

$$[(e_1, e'_1, \dots, e_1^{(h_1-1)}), (e_2, e'_2, \dots, e_2^{(h_2-1)}), \dots, (e_r, e'_r, \dots, e_r^{(h_r-1)})],$$

*noi divideremo le omografie in classi a seconda dei loro corrispondenti raggruppamenti dei divisori elementari, vale a dire intenderemo che due omografie siano della stessa classe quando hanno la stessa caratteristica.*

Vraťme se k výše uvedené matici  $A$  řádu 12 a odpovíme na dvě dvojice otázek:

• Jaké jsou Segreovy charakteristiky matice  $A$  pro vlastní čísla 2 a  $-3$ ? Kolik vektorů je na obrázku znázorněno v jednotlivých sloupcích (řetízcích) pro vlastní čísla 2 a  $-3$ ?

Odpovědi na obě otázky jsou shodné:  $(4, 2, 1)$  pro vlastní číslo 2 a  $(2, 2, 1)$  pro vlastní číslo  $-3$ .

• Jaké jsou Weyrovy charakteristiky matice  $A$  příslušné vlastním číslům 2 a  $-3$ ? Kolik vektorů je na obrázku znázorněno v jednotlivých řádcích (zdola) pro vlastní čísla 2 a  $-3$ ?

Odpovědi na obě otázky jsou opět totožné:  $(3, 2, 1, 1)$  pro vlastní číslo 2 a  $(3, 2)$  pro vlastní číslo  $-3$ .

Tato shoda není náhodná, platí pro všechny komplexní čtvercové matice. K nalezení souvislostí mezi uvedenými posloupnostmi definujeme nové pojmy:

**28 Definice.** Necht'  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_t)$  je nerostoucí posloupnost přirozených čísel. Uvažujme diagram vytvořený z  $t$  sloupců teček, z nichž  $k$ -tý sloupec má právě  $\alpha_k$  teček. První (spodní) tečky všech sloupců jsou umístěny na stejném, posledním řádku, tečky druhé na předposledním řádku atd. Takto sestrojené schéma se nazývá *Ferrersův diagram posloupnosti*  $\alpha$ . Setkáme se však rovněž s termínem *Youngovo tablo posloupnosti*  $\alpha$ .<sup>122</sup>

Ferrersův diagram se velmi často vyskytuje v mírně modifikované formě, kdy jsou místo teček zakreslovány jiné objekty. Používá se rovněž „transponovaná verze“ diagramu, kdy jsou tečky (objekty) příslušné prvkům výchozí posloup-

---

Corrado Segre studoval a působil v Turíně. Již od mládí hojně publikoval, po dlouhá léta korespondoval s Felixem Kleinem. Zabýval se především geometrickými invarianty při lineárních transformacích, algebraickými křivkami a plochami. Značnou měrou obnovil v Itálii zájem o geometrii, svým přínosem pro tamější geometrickou školu je řazen za takovou osobnost, kterou byl Antonio Luigi Gaudenzio Giuseppe Cremona (1830–1903).

<sup>122</sup> Norman Macleod Ferrers (1829–1903) byl anglický matematik pocházející z dobře situované rodiny. Postupně vystudoval matematiku v Cambridge, právo v Londýně a teologii v Cambridge. Právu se, na rozdíl od Arthura Cayleyho, nevěnoval, kněžem se stal v roce 1860, v jeho kariéře však zvítězila matematika. Působil v Cambridge, v roce 1884/85 byl rektorem. Výsledky spojené s dnes nazývaným Ferrersovým diagramem sám nepublikoval, učinil tak Sylvester, s nímž Ferrers korespondoval, v článku *On Mr Cayley's impromptu demonstration of the rule for determining at sight the degree of any symmetrical function of the roots of an equation expressed in terms of the coefficients* [Sy7] z roku 1853, v němž napsal:

*The number of modes of partitioning ( $n$ ) into ( $m$ ) parts is equal to the number of modes of partitioning ( $n$ ) into parts, one of which is always  $m$ , and the others ( $m$ ) or less than ( $m$ ). This proposition was mentioned to me by Mr N M Ferrers, whose demonstration of it ... is so simple and instructive, that I am sure every logician will be delighted to meet with it here or elsewhere.* ([SyP], díl I., str. 597)

Alfred Young (1873–1940) byl anglický matematik, vikář a vynálezce několika přístrojů (elektrický motor k čerpání vody, generátor převádějící mechanickou energii na vysokofrekvenční elektrický proud). Působil např. v Cambridge, z matematiky se zabýval především teorií grup. Pojem dnes nazývaný Youngovo tablo představil v roce 1900.

nosti zaneseny do řádků, což je vzhledem k vzájemné dualitě dvou určitých posloupností (viz dále) nepodstatná změna.<sup>123</sup>

**29 Definice.** Posloupnost  $\alpha^*$  nazveme *duální* (též *konjugovanou*) k posloupnosti  $\alpha$ , jestliže její členy značí počty teček v jednotlivých řádcích (čteno odspodu) Ferrersova diagramu posloupnosti  $\alpha$ .

Z Ferrersova diagramu posloupnosti  $\alpha$  triviálně plyne následující zjištění.

**30 Věta.** *Je-li posloupnost  $\alpha^*$  duální k posloupnosti  $\alpha$ , je posloupnost  $\alpha$  duální k posloupnosti  $\alpha^*$ , tj.  $\alpha = (\alpha^*)^*$ .*

Vzhledem k předchozímu poznatku nazýváme posloupnosti  $\alpha$  a  $\alpha^*$  *navzájem duální*.

**31 Věta.** *Weyrova a Segreova charakteristika příslušná k těmto vlastním číslu matice jsou navzájem duální posloupnosti.*

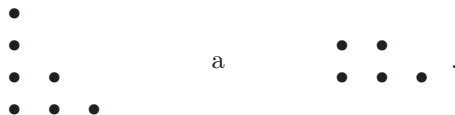
Před uvedením důkazu této věty demonstrujeme vztah charakteristik na konkrétních příkladech a zmiňme postup výpočtu jedné posloupnosti z druhé bez pomoci Ferrersova diagramu.

Je-li tedy jedna z charakteristik např.  $(3, 3, 2, 1, 1)$ , přísluší jí Ferrersův diagram



a druhá charakteristika je  $(3, 3, 2, 1, 1)^* = (5, 3, 2)$ .

Segreovy charakteristiky  $(4, 2, 1)$  a  $(2, 2, 1)$  příslušné oběma vlastním číslům výše uvedené matice  $A$  řádu 12 jsou znázorněny Ferrersovými diagramy



<sup>123</sup> Vyjadřuje-li počet teček v jednotlivých sloupcích řády všech Jordanových buněk (seřazené sestupně) příslušných určitému vlastnímu číslu dané matice, mluvíme též o *Jordanově diagramu* tohoto vlastního čísla. Viz např. [Sc4], str. 172.

Terminologie je v této oblasti značně rozkolísaná. Někteří autoři např. rozlišují mezi Ferrersovým diagramem a Youngovým tablem podle toho, zda ve schématu používáme tečky či čtverečky. Pokud se jedná o pouhé tečky, resp. prázdné čtverečky, mluví o Ferrersově diagramu, resp. Youngově tablu, v případě nahrazení teček, resp. vyplnění čtverečků konkrétními symboly (např. názvy vektorů) o *Youngově diagramu*. Někdy se však název Ferrersův diagram používá i pro označení schématu, v němž jsou doplněny místo teček konkrétní symboly apod. V této práci budeme používat pro všechny zmíněné varianty termín Ferrersův diagram.

Weyrovy charakteristiky příslušné oběma vlastním číslům matice  $A$  odpovídají počtu teček v řádcích (čteno odspodu), jsou proto  $(3, 2, 1, 1)$  a  $(3, 2)$ , což odpovídá vypočítaným hodnotám.

Pomocí této vizuální pomůcky je například zřejmé, že první člen Segreovy, resp. Weyrovy charakteristiky je vždy roven počtu členů charakteristiky Weyrovy, resp. Segreovy. Souvislost mezi pojmy je však podstatně hlubší. Mnoho vztahů lze snadno vyčíst právě z Ferrersových diagramů, které jsou v této problematice neocenitelnou pomůckou. Podotkněme, že v případě, kdy máme zadanou jednu z charakteristik a potřebujeme rychle získat charakteristiku druhou, lze ji určit i bez tohoto diagramu. První číslo hledané posloupnosti je totiž rovno počtu prvků dané, tj. duální posloupnosti, které jsou větší nebo rovny 1, druhé číslo hledané posloupnosti je rovno počtu prvků dané posloupnosti, které jsou větší nebo rovny 2 atd. Tento postup je výhodný především u charakteristik, kde součet jejich prvků „není malý“ a znázorňování teček by zabralo mnoho času. Je-li například jedna charakteristika  $(9, 6, 5, 5, 2)$ , je k ní duální charakteristikou posloupnost  $(5, 5, 4, 4, 4, 2, 1, 1, 1)$ .

Uvědomíme-li si tuto vlastnost navzájem duálních posloupností, není obtížné dokázat větu o dualitě Segreovy a Weyrovy charakteristiky, které přísluší témuž vlastnímu číslu matice  $A$ .

Uvažujme Jordanův kanonický tvar  $J$  matice  $A$ , který je blokovou maticí s Jordanovými bloky  $J_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, u$ , příslušnými jednotlivým  $s_i$ -násobným vlastním číslům  $\lambda_i$  matice  $A$ . Jim příslušné Segreovy charakteristiky necht' mají  $q_i$  prvků. Od jednotlivých Jordanových bloků odečteme příslušné skalární matice  $\lambda_i E$  a dále tak budeme v důkazu pracovat pouze s nilpotentními maticemi  $N_i$ .

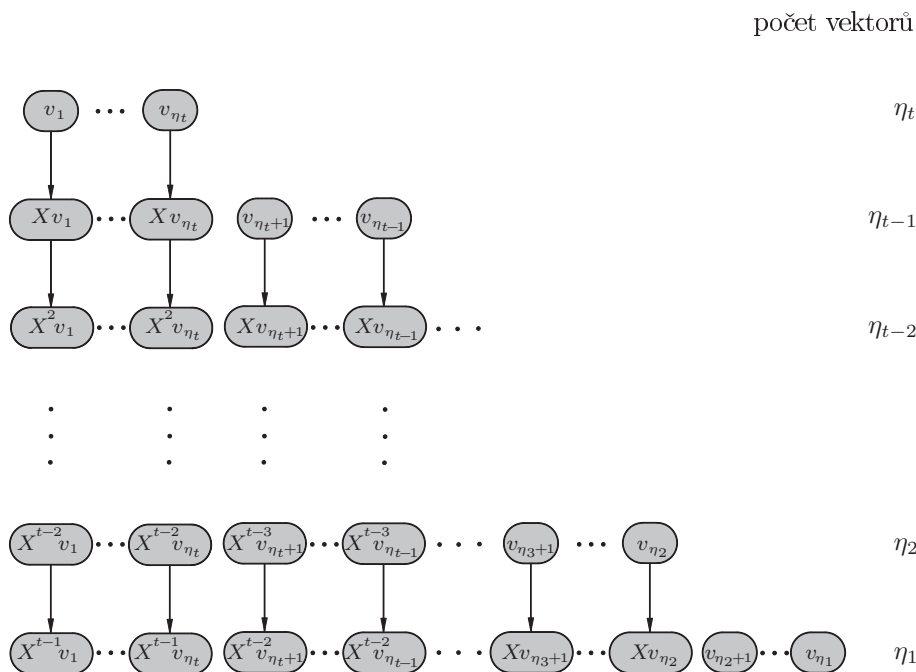
Operujme dále, bez újmy na obecnosti, například s nilpotentní maticí  $N_1$ . Nulita matice  $N_1$  je právě tolik, kolik má Jordanových buněk, tj.  $q_1$ . Matice  $N_1$  má totiž právě  $q_1$  nulových sloupců; jedničky má pouze na  $s_1 - q_1$  místech, a to v linii těsně nad hlavní diagonálou, na ostatních místech jsou nuly. Vypočítáme-li matici  $N_1^2$ , linie jedniček se posune „o jedno místo směrem k pravému hornímu rohu“. Jedna jednička v každé Jordanově buňce tedy při umocnění „vymizí“ – to však nastane pouze tehdy, pokud má Jordanova buňka řád alespoň 2. Tedy nulita matice  $N_1^2$  převýší nulitu matice  $N_1$  právě o tolik, kolik má matice  $N_1$  buněk, jejichž řády jsou rovny nebo převyšují číslo dva. Dále vypočítáme matici  $N_1^3$ . Její nulita převýší nulitu matice  $N_1^2$  právě o tolik, kolik má matice  $N_1$  buněk, jejichž řády jsou rovny nebo převyšují číslo tři. Takto postupujeme dále až dospějeme k matici  $N_1^t$ . Její nulita převýší nulitu matice  $N_1^{t-1}$  právě o tolik, kolik má matice  $N_1$  buněk, jejichž řády jsou rovny nebo převyšují číslo  $t$ . Weyrova a Segreova charakteristika matice  $N_1$  příslušné vlastnímu číslu 0, a tedy i Weyrova a Segreova charakteristika matice  $J_1$  příslušné vlastnímu číslu  $\lambda_1$ , jsou duálními posloupnostmi.

**32 Definice.** Necht'  $A$  je komplexní čtvercová matice,  $\lambda$  její vlastní číslo a necht'  $v \in \text{GKer}(A - \lambda E)$  je nenulový vektor. Nejmenší přirozené číslo  $k$ , pro které  $(A - \lambda E)^k v^T = o^T$ , nazveme *výše vektoru  $v$  příslušná vlastnímu číslu  $\lambda$  ma-*



lice  $A$ .<sup>124</sup> Nulovému vektoru přiřazujeme výši 0.

Podívejme se dále, co vše Ferrersův diagram Segreovy, resp. Weyrovy charakteristiky příslušné vlastnímu číslu  $\lambda$  matice  $A$  „vypovídá“ o vlastnostech čísla  $\lambda$ . Uvažujme komplexní čtvercovou matici  $A$ , její  $s$ -násobné vlastní číslo  $\lambda$  a Segreovu charakteristiku příslušnou tomuto vlastnímu číslu. Ferrersův diagram této Segreovy charakteristiky je právě diagram uvedený na straně 106. Pro čtenářovo pohodlí jej uvádíme znovu, tentokrát v méně podrobné verzi, což by mělo přispět k větší přehlednosti schématu. Pro jednoduchost opět značíme  $X = A - \lambda E$  a vektory chápeme jako sloupce.



V posledním řádku Ferrersova diagramu je tedy uvedeno  $\eta_1$  vektorů, které jsou vlastními vektory příslušnými vlastnímu číslu  $\lambda$ ,<sup>125</sup> nad sebou mají své „vzory“, tj. vektory, které se na ně „zobrazí“ při násobení maticí  $X = A - \lambda E$  zleva. Celkový počet uvedených nenulových vektorů je roven násobnosti  $s$  vlastního čísla  $\lambda$  a tyto vektory jsou lineárně nezávislé. Vektory vytvářejí Jordanovy řetízky, každý z nich odpovídá právě jedné Jordanově buňce. Výše vektoru stojícího na první pozici shora v každém řetízku (budeme též říkat *délka Jordanova řetízku*) je rovna odpovídajícímu prvku Segreovy charakteristiky (ve stejném

<sup>124</sup> Používá se též termín *řád vektoru*. Viz např. učebnice Otakara Borůvky *Základy teorie matic* [Bo8] z roku 1971.

<sup>125</sup> Počet těchto vektorů je tedy roven geometrické násobnosti vlastního čísla  $\lambda$ .

pořadí), délka Jordanova řetězku je tedy rovna řádu příslušné Jordanovy buňky Jordanova kanonického tvaru matice  $A$ . V diagramu je

$$\begin{array}{ll} \eta_t & \text{vektorů výše } t, \\ \eta_{t-1} - \eta_t & \text{vektorů výše } t-1, \\ \dots & \dots \\ \eta_2 - \eta_3 & \text{vektorů výše } 2, \\ \eta_1 - \eta_2 & \text{vektorů výše } 1, \end{array}$$

neboli část Jordanova kanonického tvaru  $J$  matice  $A$ , která přísluší vlastnímu číslu  $\lambda$ , obsahuje právě

$$\begin{array}{ll} \eta_t & \text{Jordanových buněk řádu } t, \\ \eta_{t-1} - \eta_t & \text{Jordanových buněk řádu } t-1, \\ \dots & \dots \\ \eta_2 - \eta_3 & \text{Jordanových buněk řádu } 2, \\ \eta_1 - \eta_2 & \text{Jordanových buněk řádu } 1. \end{array}$$

Ve Ferrersově diagramu je tedy znázorněno s vektory

$$\begin{array}{l} v_{11}, \dots, v_{1,\eta_t}, \\ v_{21}, \dots, v_{2,\eta_t}, v_{2,\eta_t+1}, \dots, v_{2,\eta_{t-1}}, \\ v_{31}, \dots, v_{3,\eta_t}, v_{3,\eta_t+1}, \dots, v_{3,\eta_{t-1}}, v_{3,\eta_{t-1}+1}, \dots, v_{3,\eta_{t-2}}, \\ \dots \\ v_{t1}, \dots, v_{t,\eta_t}, v_{t,\eta_t+1}, \dots, v_{t,\eta_{t-1}}, v_{t,\eta_{t-1}+1}, \dots, v_{t,\eta_{t-2}}, \dots, v_{t,\eta_1}, \end{array}$$

pro které platí vztahy

$$\begin{aligned} (A - \lambda E)v_{km}^T &= v_{k+1,m}^T \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots, t-1, m = 1, 2, \dots, \eta_{t-k+1}, \\ (A - \lambda E)v_{tm}^T &= o^T \quad \text{pro } m = 1, 2, \dots, \eta_1. \end{aligned}$$

Tyto vztahy jsou ekvivalentní rovnostem

$$\begin{aligned} Av_{km}^T &= \lambda v_{km}^T + v_{k+1,m}^T \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots, t-1, m = 1, 2, \dots, \eta_{t-k+1}, \\ Av_{tm}^T &= \lambda v_{tm}^T \quad \text{pro } m = 1, 2, \dots, \eta_1. \end{aligned}$$

Odtud je zřejmé, že vektory znázorněné ve stejném sloupci diagramu generují podprostor prostoru  $\mathbb{C}^n$ , který je  $f$ -invariantní. Dimenze tohoto podprostoru je rovna počtu vektorů v daném sloupci.

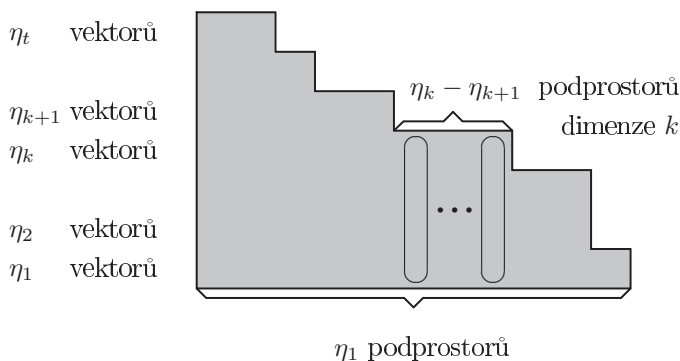
Například vektory v prvním sloupci tvoří bázi podprostoru  ${}^1V$  dimenze  $t$  a platí pro ně vztahy

$$\begin{aligned} f(v_{11}) &= \lambda v_{11} + v_{21}, \\ f(v_{21}) &= \lambda v_{21} + v_{31}, \\ &\dots\dots\dots \\ f(v_{t-1,1}) &= \lambda v_{t-1,1} + v_{t1}, \\ f(v_{t1}) &= \lambda v_{t1}. \end{aligned}$$

Těchto invariantních podprostorů je stejně mnoho jako sloupců ve schématu, jejich počet je proto roven největšímu z charakteristických čísel příslušných vlastnímu číslu  $\lambda$  matice  $A$ . Jsou-li charakteristická čísla  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{t_1}$  příslušná vlastnímu číslu  $\lambda$  srovnána podle velikosti, je tímto největším charakteristickým číslem číslo  $\eta_1$ . Mezi  $\eta_1$  podprostory je přesně<sup>126</sup>

$$\begin{array}{ll} \eta_t & \text{podprostorů dimenze } t, \\ \eta_{t-1} - \eta_t & \text{podprostorů dimenze } t - 1, \\ \dots\dots\dots & \\ \eta_2 - \eta_3 & \text{podprostorů dimenze } 2. \\ \eta_1 - \eta_2 & \text{podprostorů dimenze } 1. \end{array}$$

Pomocí schematického Ferrersova diagramu lze tento výsledek znázornit následujícím obrázkem (velmi obdobným způsobem lze zobrazit počet Jordanových buněk určitého řádu, resp. počet vektorů Jordanovy báze, které mají určitou výši).



<sup>126</sup> Upozorníme, že v případě  $\eta_i = \eta_{i+1}$  podprostory dimenze  $i$  chybí.

Pro výše uvedenou konkrétní matici  $A$  a její vlastní číslo 2 existuje

1	Jordanova buňka řádu	4,
	resp. vektor Jordanovy báze výše	4,
	resp. invariantní podprostor dimenze	4,
0	Jordanových buněk řádu	3,
	resp. vektorů Jordanovy báze výše	3,
	resp. invariantních podprostorů dimenze	3,
1	Jordanova buňka řádu	2,
	resp. vektor Jordanovy báze výše	2,
	resp. invariantní podprostor dimenze	2,
1	Jordanova buňka řádu	1,
	resp. vektor Jordanovy báze výše	1,
	resp. invariantní podprostor dimenze	1,

pro vlastní číslo  $-3$  existují

2	Jordanovy buňky řádu	2,
	resp. vektory Jordanovy báze výše	2,
	resp. invariantní podprostory dimenze	2,
1	Jordanova buňka řádu	1,
	resp. vektor Jordanovy báze výše	1,
	resp. invariantní podprostor dimenze	1.

Mezi oběma charakteristikami příslušnými témuž vlastnímu číslu lze tedy snadno přecházet, jejich prvky (nebo rozdíly po sobě jdoucích prvků) udávají další zajímavé vztahy a vlastnosti. Shrňme význam prvků obou charakteristik do tabulky, speciální pozornost věnujme interpretaci prvních prvků obou posloupností.

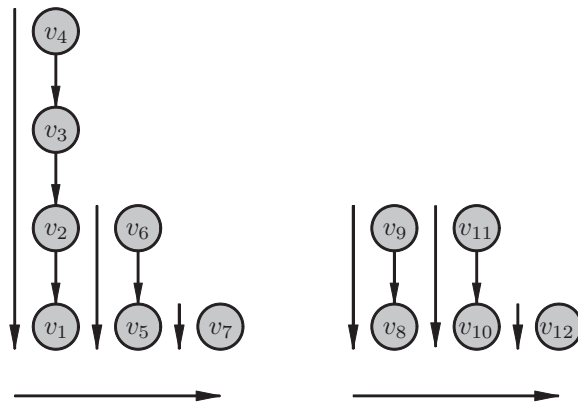
**33 Tabulka.** Nechť  $A$  je komplexní čtvercová matice řádu  $n$ ,  $\lambda$  její  $s$ -násobné vlastní číslo,  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q)$  Segreova, resp.  $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t)$  Weyrova charakteristika matice  $A$  příslušná vlastnímu číslu  $\lambda$ , nechť Ferrersův diagram Segreovy charakteristiky přísluší vlastnímu číslu  $\lambda$  a jeho tečky odpovídají vektorům, které jsou ve sloupcích Ferrersova diagramu uspořádány tak, aby vytvářely Jordanovy řetízky. Nechť  $f$  je endomorfismus vektorového prostoru  $\mathbb{C}^n$ , jehož maticí vzhledem ke kanonické bázi prostoru  $\mathbb{C}^n$  je matice  $A$ , a konečně  $1_{\mathbb{C}^n}$  je identita na  $\mathbb{C}^n$ . Potom uvedená přirozená čísla mají tyto významy:

$\xi_1$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• počet prvků Weyrovy charakteristiky</li> <li>• index <math>t</math> matice <math>A</math> příslušný vlastnímu číslu <math>\lambda</math></li> <li>• řád největší Jordanovy buňky příslušné vlastnímu číslu <math>\lambda</math></li> <li>• největší z dimenzí všech invariantních podprostorů generovaných vektory ve sloupcích Ferrersova diagramu</li> <li>• největší z výší všech vektorů obsažených ve Ferrersově diagramu</li> <li>• násobnost <math>\lambda</math> jako kořene minimálního polynomu matice <math>A</math></li> <li>• počet řádků Ferrersova diagramu</li> </ul>
$\eta_1$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• počet prvků Segreovy charakteristiky</li> <li>• <math>\text{nul}(A - \lambda E)</math>, neboli <math>n - r(A - \lambda E)</math></li> <li>• <math>\dim \text{Ker}(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n})</math>, neboli <math>n - \dim \text{Im}(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n})</math></li> <li>• počet Jordanových buněk příslušných vlastnímu číslu <math>\lambda</math></li> <li>• počet „nezávislých“ Jordanových řetízků příslušných vlastnímu číslu <math>\lambda</math></li> <li>• počet invariantních podprostorů generovaných vektory ve sloupcích Ferrersova diagramu</li> <li>• maximální počet lineárně nezávislých vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu <math>\lambda</math></li> <li>• počet sloupců Ferrersova diagramu</li> </ul>
$\xi_k$ $k = 1, 2, \dots, q$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• počet prvků Weyrovy charakteristiky, které jsou větší nebo rovny <math>k</math></li> </ul>
$\eta_k$ $k = 1, 2, \dots, t$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• počet prvků Segreovy charakteristiky, které jsou větší nebo rovny <math>k</math></li> <li>• <math>\text{nul}(A - \lambda E)^k - \text{nul}(A - \lambda E)^{k-1}</math></li> <li>• <math>r(A - \lambda E)^{k-1} - r(A - \lambda E)^k</math></li> <li>• <math>\dim \text{Ker}(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n})^k - \dim \text{Ker}(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n})^{k-1}</math>, kde <math>\dim \text{Ker}(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n})^0 = 0</math></li> <li>• <math>\dim \text{Im}(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n})^{k-1} - \dim \text{Im}(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n})^k</math>, kde <math>\dim \text{Im}(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n})^0 = n</math></li> </ul>
$\eta_k - \eta_{k+1}$ $k = 1, 2, \dots, t$ $\eta_{t+1} = 0$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• počet Jordanových buněk příslušných vlastnímu číslu <math>\lambda</math>, jejichž řád je <math>k</math></li> <li>• počet „nezávislých“ Jordanových řetízků příslušných vlastnímu číslu <math>\lambda</math>, jejichž délka je <math>k</math></li> <li>• počet podprostorů generovaných vektory ve sloupcích Ferrersova diagramu, jejichž dimenze je <math>k</math></li> </ul>
$s$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• součet všech prvků Segreovy charakteristiky</li> <li>• součet všech prvků Weyrovy charakteristiky</li> <li>• stupeň <math>\lambda</math> jakožto kořene charakteristického polynomu matice <math>A</math></li> </ul>

Pro naši konkrétní matici řádu dvanáct jsme již vypočítali souřadnice dvanácti vektorů, které tvoří Jordanovu bázi  $\mathcal{J}$  vektorového prostoru  $\mathbb{C}^{12}$ . Raději zdůrazněme, že tato báze je uspořádaná. V našem příkladu je

$$\mathcal{J} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}\}.$$

Jordanovy řetízky příslušné vlastnímu číslu 2 tvoří vektory  $v_4$  až  $v_1$ ,  $v_6$  až  $v_5$  a samostatný vektor  $v_7$ , Jordanovy řetízky příslušné vlastnímu číslu  $-3$  tvoří vektory  $v_9$  až  $v_8$ ,  $v_{11}$  až  $v_{10}$  a samostatný vektor  $v_{12}$ . Vytvořme nyní novou bázi  $\mathcal{J}'$  tak, že provedeme pouze permutaci vektorů v bázi  $\mathcal{J}$ , přičemž bereme pořadí vektorů v rámci téhož Jordanova řetízku (resp. vektory odpovídající téže Jordanově buňce) v opačném pořadí, sled Jordanových řetízků (resp. Jordanových buněk) ponecháme, tj. postupujeme zleva doprava:



Takto pozměněná báze je tedy

$$\mathcal{J}' = \left\{ \underbrace{v_4, v_3, v_2, v_1}, \underbrace{v_6, v_5}, \underbrace{v_7}, \underbrace{v_9, v_8}, \underbrace{v_{11}, v_{10}}, \underbrace{v_{12}} \right\}.$$

Zdůrazněme, že Jordanovy řetízky se nezměnily (nezměnila se totiž matice  $A$ , resp. jí příslušný endomorfismus  $f$ ), vektor  $v_4$  se i nadále násobením maticí  $A - 2E$  zleva „zobrazí“ na vektor  $v_3$ , ten na vektor  $v_2$  atd. Napišme matici  $J' = G'^{-1}AG'$  endomorfismu  $f$  vzhledem k nové bázi  $\mathcal{J}'$  (matice  $G'$  je maticí přechodu od báze  $\mathcal{J}'$  ke kanonické bázi prostoru  $\mathbb{C}^{12}$ ). Sestavit matici  $J'$  lze i z paměti, jestliže si uvědomíme, na jakém místě nové báze  $\mathcal{J}'$  se nacházejí vektory původní báze  $\mathcal{J}$  a také pokud určíme novou pozici obrazů těchto vektorů v endomorfismu  $f$ . Nebo lze vektory báze  $\mathcal{J}'$  přeznačit, např.  $v_4 = v'_1$ ,  $v_3 = v'_2$  atd., neboli

$$\mathcal{J}' = \{v'_1, v'_2, v'_3, v'_4, v'_5, v'_6, v'_7, v'_8, v'_9, v'_{10}, v'_{11}, v'_{12}\},$$



je Jordanova báze prostoru  $\mathbb{C}^n$  příslušná k matici  $A$ , uvažujeme-li Jordanův kanonický tvar  $J$ , který má Jordanovy buňky tvaru

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\mathcal{J}' = \left\{ \underbrace{v_{\ell_1}, \dots, v_1}_{\text{group 1}}, \underbrace{v_{\ell_1+\ell_2}, \dots, v_{\ell_1+1}}_{\text{group 2}}, \dots, \underbrace{v_n, \dots, v_{n-\mu_{q_u}+1}}_{\text{group } q_u} \right\}$$

je Jordanova báze příslušná k matici  $A$ , uvažujeme-li Jordanův kanonický tvar  $J'$ , který má Jordanovy buňky tvaru

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Provedeme-li tedy tuto změnu, budou Jordanovy kanonické tvary navzájem transponované.

Provedeme-li permutaci báze  $\mathcal{J}$  tak, že ponecháme pořadí vektorů v rámci jednotlivých řetízků, ale změníme pořadí celých skupin vektorů příslušných těmto Jordanovu řetízku (neboli pořadí Jordanových řetízků), dostaneme Jordanův kanonický tvar  $J''$  matice  $A$  s pozměněným pořadím Jordanových buněk. Nové pořadí Jordanových buněk přesně odpovídá změnám v pořadí skupin vektorů.

Zcela analogicky výše uvedenému postupu bychom odvodili, že například permutací vektorů báze

$$\mathcal{J} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}\}$$

našeho konkrétního příkladu na bázi

$$\mathcal{J}'' = \left\{ \underbrace{v_5, v_6}_{\text{group 1}}, \underbrace{v_1, v_2, v_3, v_4}_{\text{group 2}}, \underbrace{v_7}_{\text{group 3}}, \underbrace{v_{12}}_{\text{group 4}}, \underbrace{v_{10}, v_{11}}_{\text{group 5}}, \underbrace{v_8, v_9}_{\text{group 6}} \right\}$$

získáme odpovídající Jordanův kanonický tvar  $J''$  matice  $A$  v následující podobě (na nevyplněných pozicích jsou opět nuly):











Hledaná báze je

$$\mathcal{W} = \{v_1, v_5, v_7, v_2, v_6, v_3, v_4, v_8, v_{10}, v_{12}, v_9, v_{11}\}.$$

Pokud vektory báze přeznačíme na

$$\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8, w_9, w_{10}, w_{11}, w_{12}\},$$

platí následující vztahy, z nichž je výše uvedený tvar  $W$  matice  $A$  zřejmý:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= 2v_1 &= f(w_1) &= 2w_1, \\ f(v_2) &= 2v_2 + v_1 &= f(w_4) &= 2w_4 + w_1, \\ f(v_3) &= 2v_3 + v_2 &= f(w_6) &= 2w_6 + w_4, \\ f(v_4) &= 2v_4 + v_3 &= f(w_7) &= 2w_7 + w_6, \\ f(v_5) &= 2v_5 &= f(w_2) &= 2w_2, \\ f(v_6) &= 2v_6 + v_5 &= f(w_5) &= 2w_5 + w_2, \\ f(v_7) &= 2v_7 &= f(w_3) &= 2w_3, \\ f(v_8) &= -3v_8 &= f(w_8) &= -3w_8, \\ f(v_9) &= -3v_9 + v_8 &= f(w_{11}) &= -3w_{11} + w_8, \\ f(v_{10}) &= -3v_{10} &= f(w_9) &= -3w_9, \\ f(v_{11}) &= -3v_{11} + v_{10} &= f(w_{12}) &= -3w_{12} + w_9, \\ f(v_{12}) &= -3v_{12} &= f(w_{10}) &= -3w_{10}. \end{aligned}$$

Z dosud vyřčeného triviálně plyne následující věta.

**37 Věta.** *Ke každé čtvercové matici nad tělesem komplexních čísel existuje Weyrův kanonický tvar. Až na pořadí Weyrových bloků je určen jednoznačně a je dané maticí podobný.*

Opět můžeme pracovat s mírně pozměněnými verzemi Weyrova kanonického tvaru (viz např. originální Weyrův *typický tvar*). Uvědomme si však, že nelze přehazovat Weyrovy buňky, neboť potom by pro matice  ${}_{i \times j}E$  nemusela být zachována podmínka  $i \geq j$ . Přemisťovat lze pouze celé Weyrovy bloky příslušné různým vlastním číslům. V dalším textu, nebude-li řečeno jinak, budeme pod termínem Weyrův kanonický tvar matice rozumět tvar z výše uvedené definice, nikoli originální tvar Eduarda Weyra.

**38 Definice.** Nechť  $A$  je komplexní čtvercová matice řádu  $n$ ,  $W$  je její Weyrův kanonický tvar. Potom uspořádaná množina vektorů, které tvoří sloupce matice  $H$  ze vztahu  $W = H^{-1}AH$ , se nazývá *Weyrova báze vektorového prostoru  $\mathbb{C}^n$  příslušná k matici  $A$* .

Vztah duality tedy platí nejen mezi Weyrovou a Segreovou charakteristikou, ale i mezi Weyrovou a Jordanovou bází, a tedy i mezi Weyrovým a Jordánovým kanonickým tvarem téže matice. Mezi oběma tvary lze snadno přecházet. Uveďme na jednom místě vizuální srovnání obou kanonických tvarů na výše uvedené matici  $A$  řádu 12 (přesněji kvůli úspoře místa jen na části kanonických

tvary příslušné vlastnímu číslu 2), znázorněny jsou i další dvě zmíněné verze obou kanonických tvarů. Konkrétně se jedná o Jordanův kanonický tvar  $J$  s jedničkami nad diagonálou, Jordanův kanonický tvar  $J'$  s jedničkami pod diagonálou, Weyrův kanonický tvar  $W$  s nenulovými bloky nad diagonálou a originální Weyrův kanonický tvar  $W'$ , který má nenulové bloky pod diagonálou.

$$J = \left( \begin{array}{cccc|cc|c}
 \boxed{2} & 1 & & & & & \\
 & \boxed{2} & 1 & & & & \\
 & & \boxed{2} & 1 & & & \\
 & & & \boxed{2} & & & \\
 & & & & \boxed{2} & 1 & \\
 & & & & & \boxed{2} & \\
 & & & & & & \boxed{2}
 \end{array} \right), \quad
 J' = \left( \begin{array}{cccc|cc|c}
 \boxed{2} & & & & & & \\
 1 & \boxed{2} & & & & & \\
 & 1 & \boxed{2} & & & & \\
 & & 1 & \boxed{2} & & & \\
 & & & 1 & \boxed{2} & & \\
 & & & & \boxed{2} & 1 & \\
 & & & & & \boxed{2} & \\
 & & & & & & \boxed{2}
 \end{array} \right),$$

$$W = \left( \begin{array}{ccc|cc|c}
 \boxed{2} & & 1 & & & \\
 & \boxed{2} & & 1 & & \\
 & & \boxed{2} & & & \\
 & & & \boxed{2} & 1 & \\
 & & & & \boxed{2} & 1 \\
 & & & & & \boxed{2} & 1 \\
 & & & & & & \boxed{2}
 \end{array} \right), \quad
 W' = \left( \begin{array}{ccc|cc|c}
 \boxed{2} & & & & & \\
 1 & \boxed{2} & & & & \\
 & 1 & \boxed{2} & & & \\
 & & 1 & \boxed{2} & & \\
 & & & 1 & \boxed{2} & \\
 & & & & 1 & \boxed{2} & 2 \\
 & & & & & 1 & \boxed{2} & 2 \\
 & & & & & & & \boxed{2}
 \end{array} \right).$$

Známe-li Jordanův, resp. Weyrův kanonický tvar matice  $A$  a chceme-li zjistit Weyrův, resp. Jordanův kanonický tvar, určíme pouhým pohledem (dle řádu Jordanových, resp. Weyrových buněk) Segreovu, resp. Weyrovu charakteristiku matice  $A$ , dále například pomocí Ferrersových diagramů zjistíme k ní duální charakteristiku (pro jednotlivá vlastní čísla), tj. Weyrovu, resp. Segreovu charakteristiku, a pomocí ní snadno napíšeme Weyrův, resp. Jordanův kanonický tvar matice  $A$ .

Můžeme použít i jinou metodu – přechod přes Weyrovu a Jordanovu bázi, tedy způsob, který jsme několikrát demonstrovali, např. při přechodu od Jordanova tvaru na oba typy Weyrova kanonického tvaru. Je-li známým kanonickým tvarem tvar Weyrův, postupujeme zcela analogicky. Princip si krátce shrneme: uvažujme bázi vektorového prostoru a obrazy jejích vektorů, což jsou sloupce jednoho z kanonických tvarů (který je maticí endomorfismu  $f$  vzhledem k uvažované bázi), vyjádříme vztahy mezi těmito vektory (tj. určíme, který vektor je obrazem či vzorem jiného vektoru při endomorfismu  $(f - \lambda \cdot 1_{\mathbb{C}^n})$ ), sestrojíme Jordanovy řetízky, pozměníme pořadí prvků báze daným způsobem a sestrojíme matici endomorfismu  $f$  vzhledem k nově uspořádané bázi.

Při hledání vztahů mezi vektory a sestrojování řetízků si můžeme pomoci následující, velmi triviální pomůckou (popíšeme ji pro jednoduchost opět pro část kanonického tvaru příslušnou jedinému vlastnímu číslu, obdobně

postupujeme u dalších vlastních čísel), vyhneme se tak zdlouhavému zapisování několika rovností:

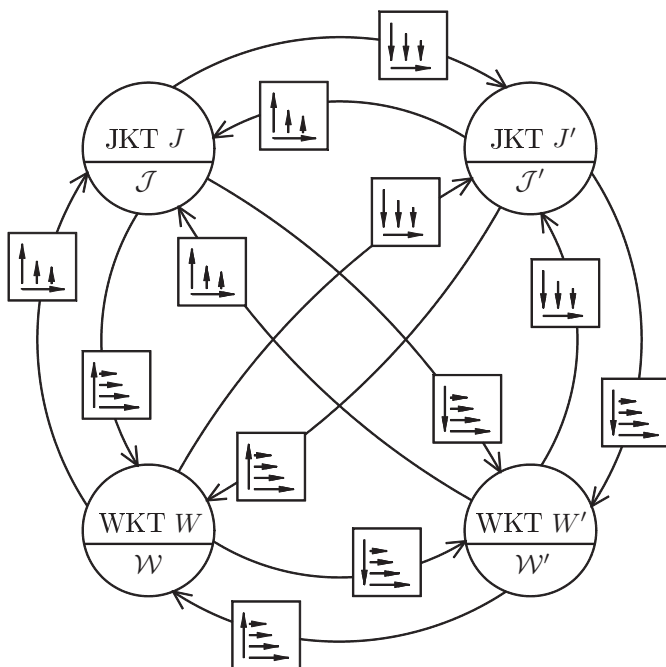
Známe-li kanonický tvar matice s jedničkami pod, resp. nad diagonálou (tj. tvar  $J'$ ,  $W'$ , resp.  $J$ ,  $W$ ), uvažujeme první, resp. poslední prvek hlavní diagonály, v němž započne pomyslná šipka. Posuneme se v témže sloupci dolů, resp. nahoru na místo, kde je prvek 1, odtud se vrátíme po řádku doprava, resp. doleva na hlavní diagonálu a postup opakujeme dokud nejsme ve sloupci bez prvku 1. Poté vezmeme první dosud neprojitý prvek hlavní diagonály odshora, resp. odspodu a algoritmus zopakujeme.

Lomené šipky určují pořadí sloupců (vektorů báze), které se nacházejí ve stejném Jordanově řetízku, směr šipky potom pořadí vektorů v řetízku (sloupcový vektor, v němž šipka začíná, je vektorem s největší výší, sloupcový vektor, v němž šipka končí, je vlastním vektorem). Nakonec řetízky odpovídající šipkám seřadíme podle délky.

$$\begin{aligned}
 J &= \left( \begin{array}{c} \boxed{2} \xrightarrow{1} \boxed{1} \\ \downarrow 2 \\ \boxed{2} \xrightarrow{1} \boxed{1} \\ \downarrow 2 \\ \boxed{2} \xrightarrow{1} \boxed{1} \\ \downarrow 2 \\ \boxed{2} \\ \downarrow 2 \\ \boxed{2} \xrightarrow{1} \boxed{1} \\ \downarrow 2 \\ \boxed{2} \end{array} \right), & J' &= \left( \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \downarrow 1 \\ \boxed{2} \xrightarrow{1} \boxed{1} \\ \downarrow 2 \\ \boxed{2} \xrightarrow{1} \boxed{1} \\ \downarrow 2 \\ \boxed{2} \xrightarrow{1} \boxed{1} \\ \downarrow 2 \\ \boxed{2} \xrightarrow{1} \boxed{1} \\ \downarrow 2 \\ \boxed{2} \end{array} \right), \\
 W &= \left( \begin{array}{c} \boxed{2} \xrightarrow{1} \boxed{1} \\ \downarrow 2 \\ \boxed{2} \xrightarrow{1} \boxed{1} \\ \downarrow 2 \\ \boxed{2} \xrightarrow{1} \boxed{1} \\ \downarrow 2 \\ \boxed{2} \xrightarrow{1} \boxed{1} \\ \downarrow 2 \\ \boxed{2} \xrightarrow{1} \boxed{1} \\ \downarrow 2 \\ \boxed{2} \end{array} \right), & W' &= \left( \begin{array}{c} \boxed{2} \\ \downarrow 1 \\ \boxed{2} \xrightarrow{1} \boxed{1} \\ \downarrow 2 \\ \boxed{2} \xrightarrow{1} \boxed{1} \\ \downarrow 2 \\ \boxed{2} \xrightarrow{1} \boxed{1} \\ \downarrow 2 \\ \boxed{2} \xrightarrow{1} \boxed{1} \\ \downarrow 2 \\ \boxed{2} \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

V našem konkrétním příkladu se např. u Weyrova kanonického tvaru  $W$  zobrazí při násobení maticí  $A - 2E$  v pořadí 7. vektor příslušné uspořádané báze  $W$  na 6. vektor, ten se zobrazí na 4. vektor a ten na 1. vektor; 5. vektor se zobrazí na 2. vektor, 3. vektor je vlastní vektor. Stejně postupujeme pro další typy kanonických tvarů.

Při permutování prvků bází nám může pomoci následující obrázek. Na něm jsou přehledně uvedeny způsoby permutací bází při přechodu mezi kanonickými tvary (JKT, resp. WKT značí Jordanův, resp. Weyrův kanonický tvar matice).



Jsou-li Jordanovy řetízky řazeny (pro jednotlivá vlastní čísla) zleva doprava od nejdelších po nejkratší, potom symboly



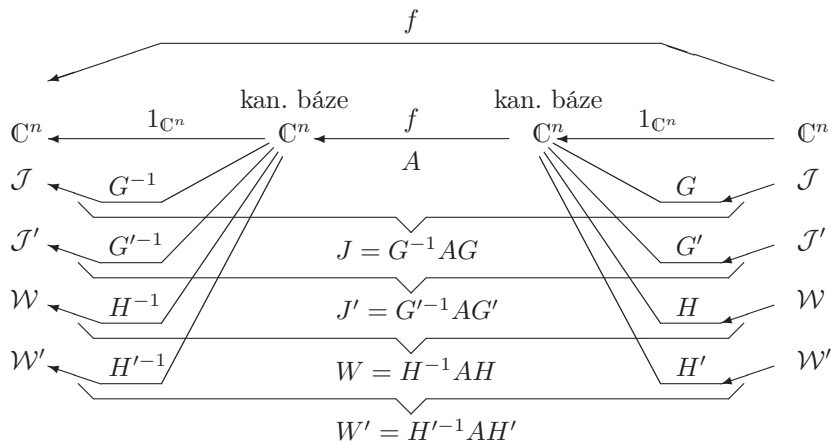
schematicky značí uspořádávání vektorů v Jordanových řetízcích při konstrukci příslušné báze. Jedná se po řadě o toto řazení:

- vektory bereme po jednotlivých řetízcích, v rámci téhož řetízku odspodu nahoru, řetízky zleva doprava,
- vektory bereme po jednotlivých řetízcích, v rámci téhož řetízku shora dolů, řetízky zleva doprava,
- vektory bereme po „řádcích“ řetízku (tj. po vektorech o stejné výši pro jednotlivá vlastní čísla), v rámci téhož „řádku“ zleva doprava, „řádky“ odspodu nahoru,
- vektory bereme po „řádcích“ řetízku (tj. po vektorech o stejné výši pro jednotlivá vlastní čísla), v rámci téhož „řádku“ zleva doprava, „řádky“ shora dolů.

Další, třetí možnost přechodu mezi Jordanovým a Weyrovým kanonickým tvarem je metoda využívající skutečnosti, že  $J$ ,  $J'$ ,  $W$ ,  $W'$  jsou matice navzájem podobné, jsou maticemi téhož endomorfismu  $f$ , ale vzhledem k různým bázím



vektorového prostoru  $V = \mathbb{C}^n$ .



Uvažujme permutační matici  $P$ , tj. matici, která má v každém řádku a v každém sloupci právě jednu prvek 1 a na ostatních místech nuly. Nechť je její řád totožný s řádem dané matice  $X$ . Násobením matice  $X$  permutační maticí  $P$  zprava se pouze změní pořadí sloupců matice  $X$ , jejich nové pořadí je určeno rozmístěním jedniček v permutační matici  $P$ .<sup>127</sup> Analogicky násobení matice  $X$  permutační maticí  $P$  zleva se pouze permutují řádky matice. Jelikož je známo, že pro permutační matici  $P$  platí  $P^{-1} = P^T$ , odpovídá součinu  $P^{-1}XP = P^TXP$  (nebo též  $PXP^{-1} = PXP^T$ ) simultánní permutace řádků a sloupců matice  $X$  (vyměníme-li pořadí  $k$ -tého a  $m$ -tého sloupce, vyměníme i pořadí  $k$ -tého a  $m$ -tého řádku a naopak).

Uvažujme dvojici kanonických tvarů matice  $A$ , Jordanův kanonický tvar  $J$  s odpovídající transformační maticí  $G$  a Weyrův kanonický tvar  $W$  s odpovídající transformační maticí  $H$ , tj.

$$J = G^{-1}AG, \quad W = H^{-1}AH.$$

Proto

$$A = GJG^{-1}, \quad A = HWH^{-1},$$

z čehož plyne rovnost

$$GJG^{-1} = HWH^{-1}.$$

Protože matice  $G$  a  $H$  se liší pouze pořadím sloupců, je jedna součinem druhé s permutační maticí zprava. Nechť např.  $H = GP$ . Potom postupně dostaneme

$$\begin{aligned} GJG^{-1} &= GPW(GP)^{-1}, \\ GJG^{-1} &= GPWP^{-1}G^{-1}, \\ J &= PWP^{-1}. \end{aligned}$$

<sup>127</sup> Sloupce budou seřazeny v pořadí, které je shodné s pořadím řádků permutační matice, v nichž je prvek 1 v 1., 2., ...,  $n$ -tém sloupci.





Označme nyní  $X = A - \lambda_0 E$ . Potom je

$$\begin{array}{ll} Xv_1^T = v_2^T = 0v_1^T + v_2^T, & \text{neboli} & (X - 0E)v_1^T = v_2^T, \\ Xv_2^T = v_3^T = 0v_2^T + v_3^T, & & (X - 0E)v_2^T = v_3^T, \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ Xv_t^T = o^T = 0v_t^T, & & (X - 0E)v_t^T = o^T. \end{array}$$

Jordanovy řetízky matice  $A$  příslušné vlastnímu číslu  $\lambda_0$  jsou tedy shodné s Jordanovými řetízky matice  $A - \lambda_0 E$  příslušnými vlastnímu číslu 0.

Uvažujme opět výše uvedenou matici  $A$  řádu 12 s vlastními čísly 2 a  $-3$ . Jordanův kanonický tvar  $J - 2E$  matice  $A - 2E$  je

$$J - 2E = \left( \begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{ccc} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{array}} & & & & & & & & & & & \\ & \boxed{\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ & 0 \end{array}} & & & & & & & & & & \\ & & \boxed{0} & & & & & & & & & \\ & & & \boxed{\begin{array}{cc} -5 & 1 \\ & -5 \end{array}} & & & & & & & & \\ & & & & \boxed{\begin{array}{cc} -5 & 1 \\ & -5 \end{array}} & & & & & & & \\ & & & & & \boxed{-5} & & & & & & \end{array} \right);$$

odpovídající endomorfismus  $g = f - 2 \cdot 1_{\mathbb{C}^n}$  se chová takto:

$$\begin{array}{lll} g(v_1) & = & (f - 2 \cdot 1_{\mathbb{C}^n})(v_1) = o, \\ g(v_2) & = & (f - 2 \cdot 1_{\mathbb{C}^n})(v_2) = v_1, \\ g(v_3) & = & (f - 2 \cdot 1_{\mathbb{C}^n})(v_3) = v_2, \\ g(v_4) & = & (f - 2 \cdot 1_{\mathbb{C}^n})(v_4) = v_3, \\ g(v_5) & = & (f - 2 \cdot 1_{\mathbb{C}^n})(v_5) = o, \\ g(v_6) & = & (f - 2 \cdot 1_{\mathbb{C}^n})(v_6) = v_5, \\ g(v_7) & = & (f - 2 \cdot 1_{\mathbb{C}^n})(v_7) = o. \end{array}$$

Jordanovy řetízky  $v_4, v_3, v_2, v_1; v_6, v_5, v_7$  zůstaly zachovány.

Pro zajímavost se podíváme na obrazy ostatních vektorů. Zde se Jordanovy řetízky porušily.

$$\begin{array}{lll} g(v_8) & = & (f - 2 \cdot 1_{\mathbb{C}^n})(v_8) = -5v_8, \\ g(v_9) & = & (f - 2 \cdot 1_{\mathbb{C}^n})(v_9) = -5v_9 + v_8, \\ g(v_{10}) & = & (f - 2 \cdot 1_{\mathbb{C}^n})(v_{10}) = -5v_{10}, \\ g(v_{11}) & = & (f - 2 \cdot 1_{\mathbb{C}^n})(v_{11}) = -5v_{11} + v_{10}, \\ g(v_{12}) & = & (f - 2 \cdot 1_{\mathbb{C}^n})(v_{12}) = -5v_{12}. \end{array}$$

Analogicky postupujeme u matice

$$J + 3E = \left( \begin{array}{cccccccc} \boxed{\begin{array}{ccc} 5 & 1 & \\ & 5 & 1 \\ & & 5 & 1 \\ & & & 5 \end{array}} & & & & & & & \\ & \boxed{\begin{array}{cc} 5 & 1 \\ & 5 \end{array}} & & & & & & \\ & & \boxed{5} & & & & & \\ & & & \boxed{\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ & 0 \end{array}} & & & & \\ & & & & \boxed{\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ & 0 \end{array}} & & & \\ & & & & & & \boxed{0} & \end{array} \right)$$

a endomorfismu  $h = f + 3 \cdot 1_{C^n}$  příslušného matici  $A + 3E$ :

$$\begin{aligned} h(v_1) &= (f + 3 \cdot 1_{C^n})(v_1) = 5v_1, \\ h(v_2) &= (f + 3 \cdot 1_{C^n})(v_2) = 5v_2 + v_1, \\ h(v_3) &= (f + 3 \cdot 1_{C^n})(v_3) = 5v_3 + v_2, \\ h(v_4) &= (f + 3 \cdot 1_{C^n})(v_4) = 5v_4 + v_3, \\ h(v_5) &= (f + 3 \cdot 1_{C^n})(v_5) = 5v_5, \\ h(v_6) &= (f + 3 \cdot 1_{C^n})(v_6) = 5v_6 + v_5, \\ h(v_7) &= (f + 3 \cdot 1_{C^n})(v_7) = 5v_7, \\ \\ h(v_8) &= (f + 3 \cdot 1_{C^n})(v_8) = o, \\ h(v_9) &= (f + 3 \cdot 1_{C^n})(v_9) = v_8, \\ h(v_{10}) &= (f + 3 \cdot 1_{C^n})(v_{10}) = o, \\ h(v_{11}) &= (f + 3 \cdot 1_{C^n})(v_{11}) = v_{10}, \\ h(v_{12}) &= (f + 3 \cdot 1_{C^n})(v_{12}) = o. \end{aligned}$$

Jordanovy řetízky  $v_9, v_8; v_{11}, v_{10}; v_{12}$  se zachovaly. Předchozí řetízky, které odpovídají vlastnímu číslu 2, se změnily.

Na základě všech těchto shod lze problematiku Weyrovy teorie vyložit na matici  $A$ , o níž předpokládáme, že má  $s$ -násobné vlastní číslo 0, kde  $s \geq 1$ . Pro tuto matici se definují potřebné pojmy (např. výše vektoru  $v \in V$  jako nejmenší  $t$ , pro které  $A^t v^T = o^T$  apod.), v jejichž názvech chybí slova „příslušný vlastnímu číslu  $\lambda$ “, a teprve na závěr se pojmy přenesou na obecná vlastní čísla: předpokládá se libovolná čtvercová matice  $A$  s navzájem různými vlastními čísly  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u$  o násobnostech  $s_1, s_2, \dots, s_u$ . Potom matice  $A - \lambda_1 E$  má  $s_1$ -násobné vlastní číslo 0, matice  $A - \lambda_2 E$  má  $s_2$ -násobné vlastní číslo 0 atd., čímž jsou definované pojmy zobecněny a do termínů se přidávají slova „příslušný vlastnímu číslu  $\lambda_1, \lambda_2$  atd.“ Místo vyšetřování matice  $A$  s vlastními čísly  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u$  se studují pouze bloky matic  $A - \lambda_1 E, A - \lambda_2 E, \dots, A - \lambda_u E$ , které odpovídají vlastnímu číslu 0.<sup>130</sup>

<sup>130</sup> Více je tento postup naznačen v podkapitole 5.2 *Maticový počet a Otakar Borůvka*, zájemce o bližší informace proto odkazujeme na další část monografie. Tento postup byl použit i v zahraničí při studiu souvislosti Weyrovy teorie a teorie grafů (viz dále část 6.4 *Charakteristiky teorie grafů – odborná část*).

### 3.8 Algoritmus pro výpočet Weyrova kanonického tvaru

Weyrův kanonický tvar čtvercové komplexní matice s navzájem různými vlastními čísly  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u$  lze získat i bez přímého výpočtu nulit mocnin matic  $A - \lambda_i E, i = 1, 2, \dots, u$ . Jestliže je komplexní matice  $A$  nilpotentní, je algoritmus pro výpočet jejího Weyrova kanonického tvaru poměrně rychlý. Je založen na dvou níže uvedených tvrzeních. Před jejich uvedením si uvědomme, že pro nilpotentní matici  $A$  řádu  $n$  (která má jediné vlastní číslo 0) je  $\text{nul } A = \eta_1$ , kde  $\eta_1$  je první charakteristické číslo ve Weyrově charakteristice

$$\eta(A) = \eta(0) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t).$$

Matice  $A$  je podobná matici, jejíž prvních  $\eta_1$  sloupců je nulových. Nebudeme-li uvažovat triviální případ, kdy  $A$  je nulová matice, je matice  $A$  podobná matici

$$\begin{pmatrix} O & A_{12} \\ O & A_2 \end{pmatrix},$$

kde  $A_{12}$  je matice typu  $\eta_1 \times (n - \eta_1)$  a matice  $A_2$  je čtvercová matice řádu  $n - \eta_1$ . (Podotkněme, že pro komplexní matici lze k tomuto tvaru dospět pomocí unitární podobné transformace.) Protože  $r(A) = n - \eta_1$ , má matice

$$\begin{pmatrix} A_{12} \\ A_2 \end{pmatrix}$$

lineárně nezávislé sloupce.

Nyní se vraťme ke slíbeným větám.<sup>131</sup>

**40 Věta.** *Nechť*

$$A = \begin{pmatrix} O_{\eta_1} & A_{12} \\ O & A_2 \end{pmatrix}$$

*je čtvercová komplexní nilpotentní matice řádu  $n$ , kde  $O_{\eta_1}$  je nulová čtvercová matice řádu  $\eta_1 = \text{nul } A$ ,  $A_2$  je čtvercová matice řádu  $n - \eta_1$ ,  $A_{12}$  je matice typu  $\eta_1 \times (n - \eta_1)$  a  $O$  je nulová matice typu  $(n - \eta_1) \times \eta_1$ . Dále necht*

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix},$$

*kde  $B_1$  je čtvercová matice řádu  $\eta_1$  a  $B_2$  je matice typu  $(n - \eta_1) \times \eta_1$ . Potom pro každé přirozené číslo  $k$  je  $A^k B = O$  právě tehdy, když  $A_2^{k-1} B_2 = O$ .*

---

<sup>131</sup> Tvrzení vět je založeno na výsledcích uvedených v článku, který roku 1966 publikovala ruská matematička Vera Nikolajevna Kublanovskaja (1920–2012). Obvykle není referován ruský originál textu, ale jeho anglický překlad nazvaný *On a method of solving the complete eigenvalue problem for a degenerate matrix* [Kb1].

Matematickou indukcí snadno dokážeme, že

$$A^k = \begin{pmatrix} O & A_{12}A_2^{k-1} \\ O & A_2^k \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$A^k B = \begin{pmatrix} O & A_{12}A_2^{k-1} \\ O & A_2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{12}A_2^{k-1}B_2 \\ A_2^k B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_2 \end{pmatrix} (A_2^{k-1}B_2)$$

Protože matice

$$\begin{pmatrix} A_{12} \\ A_2 \end{pmatrix}$$

má lineárně nezávislé sloupce, je

$$\begin{pmatrix} A_{12} \\ A_2 \end{pmatrix} (A_2^{k-1}B_2) = O$$

právě tehdy, když

$$A_2^{k-1}B_2 = O,$$

a tedy i  $A^k B = O$  právě tehdy, když  $A_2^{k-1}B_2 = O$ .

**41 Věta.** *Nechť  $A$  je čtvercová nilpotentní komplexní matice řádu  $n$ , jejíž index  $t$  příslušný jedinému vlastnímu číslu 0 je alespoň dva (matice je tedy nutně nenulová). Nechť dále Weyrova charakteristika matice  $A$  (příslušná vlastnímu číslu 0) je  $\eta(A) = \eta(0) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t)$  a nechť matice  $A$  má tvar*

$$\begin{pmatrix} O_{\eta_1} & A_{12} \\ O & A_2 \end{pmatrix},$$

kde  $O_{\eta_1}$  je nulová čtvercová matice řádu  $\eta_1 = \text{nul } A$ ,  $A_2$  je čtvercová matice řádu  $n - \eta_1$ ,  $A_{12}$  je matice typu  $\eta_1 \times (n - \eta_1)$  a  $O$  je nulová matice typu  $(n - \eta_1) \times \eta_1$ . Potom Weyrova charakteristika matice  $A_2$  je

$$\eta(A_2) = (\eta_2, \eta_3, \dots, \eta_t).$$

Dle předchozí věty platí  $\text{nul } A^k = \eta_1 + \text{nul } A_2^{k-1}$ . Proto

$$\text{nul } A_2^{k-1} - \text{nul } A_2^{k-2} = \text{nul } A^k - \eta_1 - (\text{nul } A^{k-1} - \eta_1) = \text{nul } A^k - \text{nul } A^{k-1} = \eta_k,$$

a tedy  $\eta(A_2) = (\eta_2, \eta_3, \dots, \eta_t)$ .

Uveďme pro zajímavost, že nyní lze jednoduše a v řeči matic dokázat, že Weyrova charakteristika příslušná vlastnímu číslu 0 nilpotentní matice je nerostoucí posloupnost.<sup>132</sup> (Jiný důkaz již byl proveden na straně 104.) Protože

<sup>132</sup> Při použití přechodu od obecného vlastního čísla k vlastnímu číslu 0 důkaz platí také pro Weyrovu charakteristiku příslušnou obecnému vlastnímu číslu ne nutně nilpotentní matice.

jistě  $r(A) \leq r(A_{12}) + r(A_2)$ ,  $r(A) = n - \eta_1$  a  $r(A_2) = (n - \eta_1) - \text{nul } A_2$ , dostáváme po dosazení vztah  $\text{nul } A_2 \leq r(A_{12})$ . Protože  $\text{nul } A_2 = \eta_2$  a  $r(A_{12}) \leq \eta_1$ , dostáváme  $\eta_2 \leq \eta_1$ . Jelikož matici  $A_2$  můžeme upravit do tvaru

$$A_2 = \begin{pmatrix} O_{\eta_2} & A_{23} \\ O & A_3 \end{pmatrix},$$

matici  $A_3$  do tvaru

$$A_3 = \begin{pmatrix} O_{\eta_3} & A_{34} \\ O & A_4 \end{pmatrix}$$

atd. až nakonec matici  $A_{t-1}$  do tvaru

$$A_{t-1} = \begin{pmatrix} O_{\eta_{t-1}} & A_{t-1,t} \\ O & O \end{pmatrix},$$

je  $\eta_{i+1} \leq \eta_i$  pro všechna  $i = 2, 3, \dots, t-1$ .

Snížování řádů matic v posloupnosti  $A, A_2, A_3, \dots$  je využito v algoritmu pro výpočet Weyrova kanonického tvaru. Pro nilpotentní matici dospějeme v uvedené posloupnosti k matici  $A_t$ , která je nulová. V obecném případě je nejdříve nutné zjistit všechna vlastní čísla  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u$  dané matice  $A$  řádu  $n$ , pomocí podobných transformací provést její převod na blokově diagonální matici, v níž každý z  $u$  bloků odpovídá jednomu vlastnímu číslu  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, u$ , (a příslušnému invariantnímu podprostoru  $\text{GKer}(A - \lambda_i E)$  prostoru  $\mathbb{C}^n$ ) a dále odečíst od každého bloku na zobecněné diagonále skalární matici  $\lambda_i E$ . Tím dostaneme  $u$  nilpotentních matic a výše uvedenou větu využijeme k získání jejich Weyrových kanonických tvarů  $\widetilde{W}_{\lambda_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, u$ . Weyrovy bloky  $W_{\lambda_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, u$ , příslušné jednotlivým vlastním číslům matice  $A$  jsou  $W_{\lambda_i} = \lambda_i E + \widetilde{W}_{\lambda_i}$  a Weyrův kanonický tvar matice  $A$  je blokovou diagonální maticí, jejíž bloky na zobecněné diagonále jsou matice  $W_{\lambda_i}$ . Uveďme nyní exaktně celý postup určení Weyrova kanonického tvaru čtvercové matice; jednotlivé kroky algoritmu jsou demonstrovány na konkrétní, nám známé matici  $A$  řádu dvanáct.<sup>133</sup>

**1. krok:** Vypočítáme charakteristický polynom matice  $A$ .

**2. krok:** Určíme vlastní čísla  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_u$  dané matice  $A$  a jim příslušné násobnosti  $s_1, s_2, \dots, s_u$ .

**3. krok:** Určíme vektory, které generují jednotlivé podprostory  $\text{GKer}(A - \lambda_i E)$ , tj. pro každé  $i = 1, 2, \dots, u$  vypočítáme matici  $(A - \lambda_i E)^{s_i}$  a nalezneme bázi množiny všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic s maticí  $(A - \lambda_i E)^{s_i}$ .

<sup>133</sup> Pasáž algoritmu pro nilpotentní matice (tj. 6. až 13. krok) je z velké části převzata z monografie Kevina O'Meary, Johna Clarka a Charlese Vinsonhalera *Advanced Topics in Linear Algebra: Weaving Matrix Problems through the Weyr Form* [OCV1].



Z těchto bází sestavíme matici  $P$ , její sloupce jsou řešeními jednotlivých homogenních soustav rovnic s maticemi  $(A - \lambda_i E)^{s_i}$ . Vypočítáme matici  $P^{-1}$ .

(Připomeňme, že se snažíme získat Weyrův kanonický tvar matice bez stanovení nulit mocnin matic  $A - \lambda_i E$ ,  $i = 1, 2, \dots, u$ . Pokud bychom je počítali, tak bychom znali rovněž indexy  $t_i$  matic  $A - \lambda_i E$  příslušné vlastním číslům  $\lambda_i$  a vzhledem k rovnosti  $\text{GKer}(A - \lambda_i E) = \text{Ker}(A - \lambda_i E)^{t_i} = \text{Ker}(A - \lambda_i E)^{s_i}$  by stačilo místo matic  $(A - \lambda_i E)^{s_i}$  vypočítat matice  $(A - \lambda_i E)^{t_i}$  a řešit homogenní soustavy rovnic s těmito maticemi.)

**4. krok:** Vypočítáme matici  $P^{-1}AP$ , čímž dostaneme blokovou diagonální matici, jejíž  $u$  bloků na zobecněné diagonále přísluší jednotlivým vlastním číslům  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, u$ .

**5. krok:** Každý blok vyjádříme jako součet  $\lambda_i E + {}_i N$  skalární matice  $\lambda_i E$  a nilpotentní matice  ${}_i N$  (toto vždy lze – viz Věta 8 na straně 103).

**6. krok:** Uvažujme nyní pouze jednu ze čtvercových nilpotentních matic  ${}_i N$ . Zvolme například tu, která odpovídá vlastnímu číslu  $\lambda_1$  s násobností  $s_1$ , a označme ji pro jednoduchost  $N_1$ .

Raději výslovně upozorníme, že pokud je zadaná matice  $A$  nilpotentní, začíná algoritmus až tímto 6. krokem. Předchozí kroky vedly pouze k získání nilpotentních matic.

**7. krok:** Jestliže je matice  $N_1$  nulová, je její Weyrův kanonický tvar také nulová matice a algoritmus je u konce. Jestliže je matice  $N_1$  nenulová, určíme bázi množiny všech řešení soustavy  $N_1 v^T = o^T$  (jedná se tedy o lineárně nezávislé vlastní vektory matice  $N_1$  příslušné jejímu jedinému vlastnímu číslu 0) a tuto množinu rozšíříme (nejraději pomocí vektorů kanonické báze) na bázi prostoru  $\mathbb{C}^{s_1}$ . V bázi jsou přítom na prvních místech nalezené vlastní vektory.

**8. krok:** Sestavíme matici  $P_1$ , jejíž sloupce jsou vektory nalezené báze prostoru  $\mathbb{C}^{s_1}$ . Stanovíme matici  $P_1^{-1}$ .

**9. krok:** Vypočítáme matici  $P_1^{-1}N_1P_1$ , jež je (vzhledem k vlastnostem výše uvedené báze) maticí tvaru

$$P_1^{-1}N_1P_1 = \left( \begin{array}{c|c} O & M_2 \\ \hline O & N_2 \end{array} \right),$$

kde počet prvních nulových sloupců je nul  $N_1$  a matice  $N_2$  je čtvercová řádu  $s_1 - \text{nul } N_1$ .

**10. krok:** Je-li matice  $N_2$  nenulová, opakujeme pro ni 7. až 9. krok. Získáme takovou čtvercovou matici  $P_2$  řádu  $s_1 - \text{nul } N_1$ , že

$$P_2^{-1}N_2P_2 = \left( \begin{array}{c|c} O & M_3 \\ \hline O & N_3 \end{array} \right),$$

kde počet prvních nulových sloupců je nul  $N_2$  a matice  $N_3$  je tedy čtvercová řádu  $s_1 - \text{nul } N_1 - \text{nul } N_2$ . Takto postupujeme dále až pomocí matic  $P_3, P_4, \dots$  dospějeme k matici s nulovým pravým dolním blokem  $N_t$ . Nyní lze z předchozích kroků vyčíst Weyrovu charakteristiku matice  $N_1$ , která je

$$\eta(N_1) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t) = (\text{nul } N_1, \text{nul } N_2, \dots, \text{nul } N_t).$$

**11. krok:** Na matici  $N_1$  provedeme podobnou transformaci s příslušnou maticí  $P_1 \text{diag}(E, P_2) \text{diag}(E, P_3) \cdots \text{diag}(E, P_{t-1})$ , tj. vypočítáme matici

$$(\text{diag}(E, P_{t-1}))^{-1} (\text{diag}(E, P_{t-2}))^{-1} \cdots (\text{diag}(E, P_2))^{-1} P_1^{-1} \cdot N_1 \cdot P_1 \text{diag}(E, P_2) \text{diag}(E, P_3) \cdots \text{diag}(E, P_{t-1}),$$

kde jednotliví činitelé jsou maticemi řádu  $s_1$  a  $E$  jsou jednotkové matice příslušných řádů. Uvedomme si rovněž, že  $(\text{diag}(E, P_i))^{-1} = \text{diag}(E, P_i^{-1})$ .

Výsledná matice je blokovou maticí s  $t$  čtvercovými nulovými bloky řádu  $\eta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, t$ , na zobecněné diagonále:

$$X = \begin{pmatrix} O & X_{12} & X_{13} & X_{14} & \cdots & X_{1,t-1} & X_{1t} \\ & O & X_{23} & X_{24} & \ddots & X_{2,t-1} & X_{2t} \\ & & O & X_{34} & \ddots & X_{3,t-1} & X_{3t} \\ & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & O & X_{t-1,t} \\ & & & & & & O \end{pmatrix}$$

Lze dokázat, že blokové matice  $X_{i,i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, t-1$ , stojící ihned nad zobecněnou diagonálou mají lineárně nezávislé sloupce.

**12. krok:** K matici  $X_{t-1,t}$  typu  $\eta_{t-1} \times \eta_t$  nalezneme takovou čtvercovou invertibilní matici  $Y_{t-1}^{-1}$  řádu  $\eta_{t-1}$ , aby

$$Y_{t-1}^{-1} X_{t-1,t} = {}_{\eta_{t-1} \times \eta_t} E = \begin{pmatrix} E \\ \end{pmatrix},$$

kde  $E$  je jednotková matice řádu  $\eta_t$  a  $O$  je nulová matice typu  $(\eta_{t-1} - \eta_t) \times \eta_t$ . Jestliže je matice  $X_{t-1,t}$  čtvercová, je matice  $Y_{t-1}^{-1}$  maticí k ní inverzní a matice  ${}_{\eta_{t-1} \times \eta_t} E$  je jednotková matice řádu  $\eta_{t-1} = \eta_t$  (nulové řádky neobsahuje). Na matici  $X$  provedeme podobnou transformaci s příslušnou maticí  $Z_1 = \text{diag}(E, E, \dots, Y_{t-1}^{-1}, E)$ . Tím z matice  $X_{t-1,t}$  získáme matici  ${}_{\eta_{t-1} \times \eta_t} E$  a současně zůstane zachována struktura matice  $X$ . Na nově vzniklou matici

využijeme podobnou transformaci příslušnou vhodné matici  $R_1$ , a tím vynulujeme všechny bloky nad maticí  ${}_{\eta_{t-1} \times \eta_t} E$ . Využíváme přitom právě tohoto bloku  ${}_{\eta_{t-1} \times \eta_t} E$ . Tvar matice  $R_1$  lze explicitně vyjádřit vztahem

$$R_1 = E + \begin{pmatrix} O & \cdots & O & \bar{X}_{1t} & O \\ O & \cdots & O & \bar{X}_{2t} & O \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & \cdots & O & \bar{X}_{t-2,t} & O \\ O & \cdots & O & O & O \\ O & \cdots & O & O & O \end{pmatrix},$$

kde  $\bar{X}_{it}$ ,  $i = 1, 2, \dots, t-2$ , jsou matice  $X_{it}$  doplněné  $\eta_{t-1} - \eta_t$  nulovými sloupci. Tato operace opět zachovává strukturu matice  $X$ .

**13. krok:** Opakujeme 12. krok na zobecněný  $t - 1$  sloupec. Blok na pozici  $t - 2, t - 1$  převedeme vhodnou podobnou transformací s maticí  $Z_2$  řádu  $s_1$  na maticí  ${}_{\eta_{t-2} \times \eta_{t-1}} E$  a poté pomocí podobné transformace odpovídající vhodné matici  $R_2$  vynulujeme všechny bloky nad maticí na pozici  $t - 2, t - 1$ . Tato operace nemění poslední zobecněný sloupec a zachovává strukturu matice  $X$ . S využitím podobných transformací s maticemi  $Z_3, R_3, \dots, Z_{t-2}, R_{t-2}, Z_{t-1}$  postupujeme obdobně s dalšími bloky ve sloupcích na pozicích  $t - 2, t - 3, \dots, 3, 2$ . Získáme maticí  $\widetilde{W}_{\lambda_1}$ , která je Weyrovým blokem příslušným vlastnímu číslu 0 matice  $N_1$  a zároveň jejím Weyrovým kanonickým tvarem.

Matice

$$C = P_1 \operatorname{diag}(E, P_2) \operatorname{diag}(E, P_3) \cdots \operatorname{diag}(E, P_{t-1}) Z_1 R_1 Z_2 \cdots R_{t-2} Z_{t-1}$$

je invertibilní maticí řádu  $s_1$ , pro kterou  $\widetilde{W}_{\lambda_1} = C^{-1} N_1 C$ .

**14. krok:** K Weyrovu bloku  $\widetilde{W}_{\lambda_1}$  přičteme skalární maticí  $\lambda_1 E$ , čímž získáme Weyrův kanonický tvar matice  $\lambda_1 E + N_1$ .

**15. krok:** Kroky 6 až 14 analogicky zopakujeme pro všechny zbývající nilpotentní matice  ${}_i N$ , získáme tak příslušné Weyrovy bloky  $W_{\lambda_i}$ ,  $i = 2, 3, \dots, u$ .

**16. krok:** Sestavíme Weyrův kanonický tvar  $W$  matice  $A$ , který je blokovou diagonální maticí, jejíž bloky na zobecněné diagonále jsou matice  $W_{\lambda_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, u$ , tj.  $W = \operatorname{diag}(W_{\lambda_1}, W_{\lambda_2}, \dots, W_{\lambda_u})$ .

Proveďme jednotlivé kroky algoritmu na matici  $A$  řádu 12 (zadání viz str. 112).

V předchozích úvahách jsme již určili, že charakteristický polynom matice  $A$  je  $(\lambda - 2)^7(\lambda + 3)^5$ , a tedy 2 je sedminásobné a  $-3$  je pětinasobné vlastní číslo matice  $A$ . Vyřešíme homogenní soustavu lineárních rovnic s maticí  $(A - 2E)^7$  (ta je ekvivalentní soustavě s maticí  $(A - 2E)^4$ , neboť index matice  $A$  příslušný vlastnímu číslu 2 je 4). Řešení tvoří podprostor prostoru  $\mathbb{C}^{12}$  generovaný vektory

$$\begin{aligned}
& (1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\
& (1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\
& (-1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\
& (0, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\
& (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0), \\
& (-1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0), \\
& (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0).
\end{aligned}$$

Dále stanovíme řešení soustavy lineárních rovnic s maticí  $(A+3E)^5$  (ta je ekvivalentní soustavě s maticí  $(A+3E)^2$ , neboť index matice  $A$  příslušný vlastnímu číslu  $-3$  je 2). Řešení tvoří podprostor prostoru  $\mathbb{C}^{12}$  generovaný vektory

$$\begin{aligned}
& (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0), \\
& (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0), \\
& (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0), \\
& (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0), \\
& (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1).
\end{aligned}$$

Matice, jejíž sloupce jsou nalezené vektory, má tedy tvar

$$P = \begin{pmatrix}
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

a k ní inverzní maticí je matice

$$P^{-1} = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}.$$

Tím jsme provedli 1. až 3. krok algoritmu. Dále vypočítáme matici

$$P^{-1}AP = \left( \begin{array}{cccccc|ccccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right),$$

která je bloková diagonální se dvěma čtvercovými bloky na zobecněné diagonále (4. krok). Levý horní odpovídá vlastnímu číslu 2, pravý dolní vlastnímu číslu  $-3$ . Rozložíme je na součet skalární matice a nilpotentní matice (5. krok):

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2E + {}_1N =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = -3E + {}_2N =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Charakteristické polynomy matic  ${}_1N$  a  ${}_2N$  jsou  $\lambda^7$  a  $\lambda^5$ , obě matice tedy mají jediné vlastní číslo 0, a jsou proto skutečně nilpotentní.)

Následuje 6. krok, v němž budeme uvažovat jedinou ze dvou uvedených nilpotentních matic. Zvolme nejprve tu, která přináleží vlastnímu číslu 2 matice  $A$  a označme ji  $N_1$ , tj.

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

V 7. kroku nejprve nalezneme bázi množiny všech řešení soustavy  $N_1 v^T = o^T$ , tj. například vektory

$$\begin{aligned} &(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\ &(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0), \\ &(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1), \end{aligned}$$

k nimž přidáme čtyři vektory kanonické báze

$$\begin{aligned} &(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0), \\ &(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0), \\ &(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0), \\ &(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0), \end{aligned}$$

abychom získali bázi prostoru  $\mathbb{C}^7$ . Z nalezených vektorů (jako sloupců) utvoříme matici

$$P_1 = \left( \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

k níž je inverzní maticí matice

$$P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pomocí matice  $P_1$  přejdeme od matice  $N_1$  k podobné matici

$$P_1^{-1}N_1P_1 = \left( \begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Tím jsme postupně provedli 8. a 9. krok algoritmu a můžeme přistoupit k 10. kroku. Jelikož pravý dolní blok

$$N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

není nulová matice, hledáme dále matici  $P_2$ . Její první sloupce tvoří bázi množiny všech řešení soustavy  $N_2v^T = o^T$ , tj. jsou to vlastní vektory matice  $N_2$  příslušné vlastnímu číslu 0:

$$(0, 1, 0, 0), \\ (0, 0, 1, 0).$$

Rozšíříme-li tuto množinu dvou vektorů například o vektory

$$(1, 0, 0, 0), \\ (0, 0, 0, 1),$$

obdržíme bázi prostoru  $\mathbb{C}^4$ , a tedy i matici

$$P_2 = \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Vypočítáme matici

$$P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a následně i matici

$$P_2^{-1}N_2P_2 = \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Pravý dolní blok

$$N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

není nulová matice, proto hledáme matici  $P_3$ . Snadno nahlédneme, že matice  $P_3$  je jednotková, a proto

$$P_3^{-1}N_3P_3 = N_3 = \left( \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right).$$

Pravý dolní blok

$$N_4 = ( 0 )$$

matice  $P_3^{-1}N_3P_3$  je nulová matice, proto index  $t_1$  matice  $N_1$  příslušný vlastnímu číslu 0 je 4 a  $\eta(N_1) = (3, 2, 1, 1)$ .

Přístupme k 11. kroku algoritmu. Vypočítáme matici

$$\begin{aligned} X &= (\text{diag}(E, P_3))^{-1} (\text{diag}(E, P_2))^{-1} P_1^{-1}N_1P_1 \text{diag}(E, P_2) \text{diag}(E, P_3) = \\ &= E \text{diag}(E, P_2^{-1}) P_1^{-1}N_1P_1 \text{diag}(E, P_2) E = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{array}} \end{pmatrix}.$$

Získali jsme tak blokovou matici  $X$ , jež má na zobecněné diagonále čtyři čtvercové nulové matice řádů  $\eta_1 = 3$ ,  $\eta_2 = 2$ ,  $\eta_3 = 1$  a  $\eta_4 = 1$ . Bloky  $X_{12}$ ,  $X_{23}$ ,  $X_{34}$  nad hlavní zobecněnou diagonálou mají lineárně nezávislé sloupce.

V následujícím, 12. kroku se snažíme převést matici  $X_{34}$  na matici  ${}_{1 \times 1}E$  a poté vynulovat bloky stojící nad ní. Jelikož však již po 11. kroku je  $X_{34} = {}_{1 \times 1}E$  a bloky  $X_{24}$  a  $X_{14}$  jsou nulové matice, je  $Y_3^{-1}$  (a tedy i  $Z_1$ ) jednotková matice a také  $R_1$  je jednotková matice.

Jelikož rovněž bloky  $X_{23}$  a  $X_{13}$  jsou v požadovaném tvaru, jsou  $Z_2$  a  $R_2$  jednotkové matice, čímž je ulehčen 13. krok algoritmu. K jeho dokončení je nutné převést matici

$$X_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



na matici

$${}_{3 \times 2}E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Snadno zjistíme, že například pro matici

$$Y_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Protože

$$Y_1 = (Y_1^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

je

$$Z_3 = \text{diag}(Y_1, E, E, E) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}.$$

Protože

$$Z_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dostáváme

$$Z_3^{-1} X Z_3 = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix},$$

což je hledaný Weyrův kanonický tvar  $\widetilde{W}_{\lambda_1}$  pro vlastní číslo  $\lambda_1 = 2$  nilpotentní matice  $N_1$ . Matice

$$C = P_1 \operatorname{diag}(E, P_2) \operatorname{diag}(E, P_3) Z_1 R_1 Z_2 R_2 Z_3 =$$

$$= P_1 \operatorname{diag}(E, P_2) EEEEEZ_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je maticí, pro kterou  $\widetilde{W}_{\lambda_1} = C^{-1}N_1C$ , kde  $\lambda_1 = 2$ .

Ve 14. kroku k matici  $\widetilde{W}_{\lambda_1}$  přičteme skalární matici  $2E$  sedmého řádu, čímž získáme Weyrův kanonický tvar  $W_{\lambda_1}$  matice  $2E + N_1$ :

$$W_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}.$$

Kroky 6 až 14 zopakujeme analogicky pro matici  ${}_2N$  odpovídající vlastnímu číslu  $\lambda_2 = -3$  matice  $A$ . Značme ji  $N_1^*$ , tj.

$$N_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vypočítáme bázi množiny všech řešení soustavy  $N_1^*v^T = o^T$ , tj. vlastní vektory matice  $N_1^*$  příslušné vlastnímu číslu 0. Množina všech řešení je podprostorem prostoru  $\mathbb{C}^5$  generovaného vektory

$$\begin{aligned} &(1, 0, 0, 0, 0), \\ &(0, 0, 1, 1, 0), \\ &(0, 0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Přidáme-li k této množině generátorů například vektory

$$\begin{aligned} &(0, 1, 0, 0, 0), \\ &(0, 0, 0, 1, 0), \end{aligned}$$

získáme bázi prostoru  $\mathbb{C}^5$ , jejíž vektory jsou sloupce matice

$$P_1^* = \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Matice

$$P_1^{*-1} = \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right),$$

a tedy

$$P_1^{*-1} N_1^* P_1^* = \left( \begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Pravý dolní blok  $N_2^*$  je nulový, 10. krok algoritmu tedy pro matici  $N_1^*$  vynecháme. Je vidět, že  $t_2 = 2$ , nul  $N_1^* = 3$ , nul  $N_2^* = 2$ , a proto  $\eta(N_1^*) = (3, 2)$ .

Rovněž 11. krok je triviální, neboť matici  $X = P_1^{*-1} N_1^* P_1^*$  jsme již vyjádřili. Nyní stačí blok

$$X_{12}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

transformovat na matici  ${}_{3 \times 2}E$ , což se nám podaří pomocí matice

$$Y_1^{*-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} :$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Protože

$$Y_1^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

je

$$Z_1^* = \text{diag}(Y_1^*, E) = \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Odtud

$$Z_1^{*-1} = \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

a Weyrův kanonický tvar  $\widetilde{W}_{\lambda_2}$ ,  $\lambda_2 = -3$ , nilpotentní matice  $N_2$  je

$$Z_1^{*-1} X Z_1^* = \left( \begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Matice

$$C^* = P_1^* Z_1^* = \left( \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

je maticí ze vztahu  $\widetilde{W}_{\lambda_2} = C^{*-1} N_1^* C^*$ .

Matici  $\widetilde{W}_{\lambda_2}$  sečteme se skalární maticí  $-3E$  pátého řádu a dostaneme Weyrův kanonický tvar  $W_{\lambda_2}$  matice  $-3E + N_1^*$ , tj. matici

$$W_{\lambda_2} = \left( \begin{array}{ccc|cc} -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right).$$

V závěrečném, 16. kroku sestavíme Weyrův kanonický tvar matice  $A$  jako blokovou diagonální matici, jejíž bloky na diagonále jsou matice  $W_{\lambda_1}$  a  $W_{\lambda_2}$  pro vlastní čísla  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = -3$ . Dospěli jsme tak k Weyrovu kanonickému tvaru

$$W = \left( \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \hline 2 & & & & & & \\ \hline & 2 & & & & & \\ \hline & & 2 & & & & \\ \hline & & & 2 & & & \\ \hline & & & & 2 & & \\ \hline & & & & & 2 & \\ \hline & & & & & & 2 \\ \hline & & & & & & & -3 & & & & & \\ \hline & & & & & & & & -3 & & & & 1 & & \\ \hline & & & & & & & & & -3 & & & & 1 & \\ \hline & & & & & & & & & & & & & & & -3 & & \\ \hline & & & & & & & & & & & & & & & & -3 & \\ \hline \end{array} \right)$$

matice  $A$ , který je uveden na straně 133.