O grupách a svazech

2.10 Závěr 2. části knížky

In: Ladislav Rieger (author): O grupách a svazech. (Czech). Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. pp. 202–204.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403380

Avšak číslo, které základním útvarům spojitě dimensionální geometrie (t. j. prvkům uvažovaného svazu) je zapotřebí přiřadit jako jejich „dimensi", *může probíhat nyní i všechny reálné hodnoty mezi nulou a jednou.* A také zde se spojením (protínáním) dvou „základních geometrických útvarů" zvyšuje (snižuje) anebo alespoň nesnižuje (nezvyšuje) jejich „dimense". Ale rozkládáním útvaru ve spojení dvou útvarů nižší dimense nikdy nedojdeme k nejjednodušším, dále již takto nerozložitelným útvarům — t. j. k bodům: To znamená, že spojitě dimensionální projektivní geometrie *nemá bodů.*

Zdálo by se, že konstrukce spojitě dimensionální projektivní geometrie je abstraktní matematická hříčka (ostatně by snad bylo možno pochybovat o vhodnosti názvu „geometrie", pro jistý nekonečný modulární komplementární svaz, jehož prvky si nelze dobře názorně představit ač tento svaz splňuje stejné podmínky, jež splňují i názorně geometrické svazy). Avšak ukazuje se, že spojitě dimensionální projektivní geometrie se objevuje v těch partiích moderní matematiky, jež mají použití v *kvantové mechanice.* Nehledě na to, jak nečekaným způsobem theorie svazů objevem spojitě dimensionální geometrie zasáhla do našeho názoru na abstraktní jádro projektivní geometrie vůbec, máme tu tedy nový doklad pro to, že i velmi abstraktní a zdánlivě se skutečností nijak nesouvisící matematické theorie vždy mají, třebas nečekaný a nejprve neznámý, reálný význam.

2,10. ZÁVĚR DRUHÉ ČÁSTI KNÍŽKY.

Nakonec je třeba, abychom zrekapitulovali postup výkladu při svazech právě tak, jako jsme to učinili při grupách.

Vyšli jsme od velmi obecného a v podstatě každému dobře povědomého pojmu částečného uspořádání. U tohoto ve velmi rozmanitých tvarech se vyskytujícího pojmu jsme poněkud prodleli pro jeho samostatnou důležitost. Definovali jsme také pojem polouspořádání, jakožto částečné uspořádání s připuštěním rovnosti; svaz jsme nejprve definovali jako polouspořádaný soubor (množinu), kde každé dva prvky mají (ve smyslu nějakého polouspořádání) svůj nejmenší společný „nadprvek" — čili t. zv. *spojení* a největší společný „podprvek" — čili t. zv. *průsek*. Ukázalo se však, že je právě tak dobře možno na svazy hledět podobně jako na grupy. To znamená, že lze považovat za základní nikoli pojem částečného uspořádání, resp. polouspořádání, nýbrž samo spojování a protínání jakožto „úkony", podrobené jistým axiomům, které dílem mají tutéž formu jako axiomy (komutativní) grupy, dílem jsou jiného rázu; pak svazem rozumíme každý soubor, v němž lze spojovat a protínat dle těchto axiomů. Charakteristické je na těchto axiomech svazu to, že se vyskytují ve dvojicích tak, že záměnou spojování za protínání a obráceně dostáváme z jednoho axiomu druhý (t. zv. *princip duality*).

Přenesli jsme dále z theorie grup i základní pojmy homomorfního a isomorfního zobrazení (svazu na svaz). (To jsou totiž vůbec obecné pojmy, vystupující v nejrůznějších specialisacích v abstraktní algebře.)

Uznavše, že základní axiomy svazu samy nestačí k charakterisaci důležitých druhů svazů, jež jsme poznali na příkladech, vybrali jsme ze známých doplňujících axiomů hlavně dva: *axiom distributivity* (a axiom k němu duální) a *axiom doplňku*. Svazy, které vedle základních axiomů splňují axiomy distributivity, jsou t. zv. *distributivní svazy*. Uvedli jsme, že jsou to právě ty svazy, kde svazové spojování a protínání se dá pomocí isomorfního zobrazení převést zcela na sjednocování a pronikání množin (t. zv. množinovou representací, jakožto zvláštním druhem realisace abstraktně daného typu svazu „konkretním" svazem množin čili množinovým okruhem — analogie k representaci „abstraktních" grup grupami permutací.)

V dalším jsme se omezili na distributivní svazy, splňující axiom doplňku, čili na t. zv. *Booleovy algebry*; zde jsme pro případ konečných algeber větu o isomorfní množinové representaci podrobně dokázali.

Věnovali jsme se pak některým nejjednodušším aplikacím theorie konečných Booleových algeber, zejména algeber booleovských funkcí, a to na elektrotechniku (algebra reléově-kontaktních zařízení) a na matematickou logiku (algebra výpovědí ve smyslu výrokové logiky). Ukázala se na první pohled překvapující souvislost: obě tyto algebry jsou si isomorfní, jestliže počet vstupních klíčů m je roven počtu jednoduchých výpovědí — neboť v obojím případě jde — až na isomorfismus — o Booleovu algebru všech booleovských funkcí na algebře (0, 1) o m nezávisle proměnných.

Nakonec bylo přidáno několik zmínek o jiných důležitých druzích svazů, jež vycházejí z toho, že v nich místo axiomů distributivity platí slabší *axiom modularity*. Přidáme-li k axiomu modularity ještě axiom *doplňku* (při čemž nyní může být k jednomu prvku více různých doplňků) a dodáme-li ještě požadavek, že *dva různé prvky „téhož rozměru“* (na př. body) *mají vždy společný doplněk*, dostáváme svazovou charakterisaci geometrického spojování a protínání, jak je zná t. zv. *projektivní geometrie*. Zobecněním možno dospět k t. zv. spojitě-rozměrové projektivní geometrii, v níž není bodů a rozměry (dimense) základních geometrických útvarů se mění spojitě v intervalu mezi 0 a 1.