2,8. APLIKACE BOOLEOVY ALGEBRY NA VÝROKOVOU (THEORETICKOU) LOGIKU.

Theoretická výroková logika (kterou odlišujeme od praxe každodenního používání logiky) je základní a nejjednodušší částí theoretické logiky. Nazýváme-li matematickou logikou takovou theoretickou logiku, která užívá matematických method ke studiu logických vztahů, pak výroková matematická logika je jejím prototypem a v aplikaci na ni se vlastně historicky Booleova algebra objevila.

Oč jde ve výrokové logice, to můžeme stručně a poněkud zhruba charakterisovat takto:

Výroková logika zkoumá vztahy mezi větami libovolného jazyka (řeči), pokud se tyto vztahy zakládají na následujících třech předpokladech.

Předně, věty považujeme za blíže nedefinované a samostatně o něčem vypovídající skupiny výrazů řeči; při tom výroková logika rozeznává jednak: t. zv. *jednoduché věty* jako jsou na př. „Zítra bude hezky“, „Všichni lidé jsou si rovni“, „$2 + 3 = 6$“, atp. — označujme je malými písmeny $a, b, c, \ldots$

Dále rozeznáváme od jednoduchých vět t. zv. *složené věty* (souvětí), jež jsou budovány postupně z jednoduchých vět pomocí (jedno či vícenásobným kombinováním) t. zv. *logických spojek*:

Spojka $\vee$ (*nebo*, lat. vel), spojka & (lat. et, souřadné *a*), spojka $\rightarrow$ (implikační, pro podmínečné souvětí „Když..., pak...“ a konečně záporka $\sim$ (Ne, nikoli, lat. non, též se opisuje rčením „Není pravda, že...) (Věty vůbec (složené i jednoduché) označujme velkými písmeny A, B, C, ...). Tak na př. je-li $a =$ „Zítra bude hezky“, $b =$ „Zítra půjdu na vycházku“, $c =$ „Každý člověk zemře“ pak $A = a \vee b$ značí: „Zítra bude hezky nebo půjdu na vycházku“ $a \rightarrow b = B$ značí: „Když bude zítra hezky, pak půjdu na vycházku“ $\sim c$ značí: „Ne každý člověk umře ($\doteq$ není pravda, že každý člověk zemře)". Můžeme však též utvořit souvětí $a \to \sim c$ (t. j. „Když bude zítra hezky, pak ne každý člověk zemře". Je třeba zdůraznit, že pro výrokovou logiku jsou jednoduché výroky již dále nerozložitelnými elementy. Protože výroková logika nebere (a není také s to brát) ohled na reálnou náplň a smysl jednotlivých vět, a pak pro úplný přehled o všech theoreticky zásadně možných souvětích (právě udaného druhu), můžeme logickými spojkami ve výrokové logice bez omezení spojovat jakékoli dvě věty (složené či jednoduché). Tak na př. je-li $A = a \,\&\, b$, $B = c \vee b$, pak bereme ohled i na souvětí třebas $c = A \to B = (a \,\&\, b) \to$ $\to (c \vee b)$ (t. j. „Když zítra bude hezky a zároveň půjdu na vycházku, pak: buď každý člověk zemře, nebo bude zítra hezky" (nebo obojí). (Rozumí se, že duševně normální lidé taková souvětí netvoří.)

Za druhé, výroková logika, aniž by mohla (jak již řečeno) se zabývat smyslem vět, je s to něco vypovídat pouze o jejich *pravdivosti* nebo *nepravdivosti*. Při tom se přijímá předpoklad, že každá věta je vždy buďto pravdivá, anebo nepravdivá. Můžeme říci, že každá věta může nabýt jedné a jen jedné „hodnoty pravdivosti": je-li věta A pravdivá, pak nabývá hodnoty 1, je-li věta A nepravdivá, nabývá hodnoty 0. (V tom je obsažena *zásada vyloučeného sporu* („principium contradictionis") a *zásada „tertium non datur"* (*vyloučeného třetího*) tradiční logiky.)

Při tom hodnota pravdivosti složeného výroku je *jednoznačně určena hodnotami pravdivosti* jeho složek. (To je t. zv. *zásada extensionality*.)

(Poznamenejme hned, že jsou intensivně studovány obecnější systémy výrokové logiky, v nichž není ani jedna z těchto zásad 1 a 2 přijímána; také v takových logikách (kde na př. neplatí zásada, že každá věta buďto je pravdivá, anebo není pravdivá) je theorie svazů důležitým matematickým nástrojem. Svazy, kterých je tam zapotřebí, jsou pak různě zobecněnými Booleovými algebrami.)

A konečně za třetí, elementární výroková logika stanoví logické hodnoty složených vět na základě předpokládaných logických hodnot částí podle těchto předpisů:

a) Věta $\sim A$ (nikoli A) je pravdivá tehdy a jen tehdy, když věta A je nepravdivá.

b) Věta $A \vee B$ (A nebo B) je nepravdivá, když a jen když jsou obě dvě věty A i B nepravdivé.

c) Věta $A \,\&\, B$ (A a B) je pravdivá tehdy a jen tehdy, když obě dvě věty A i B jsou pravdivé.

d) Věta $A \rightarrow B$ (když A, pak B) je nepravdivá tehdy a jen tehdy, když věta A (t. zv. implikans) je pravdivá a věta B (t. zv. implikát) je nepravdivá.

Shrneme-li na podkladě zásady o vyloučeném třetím a vyloučeném sporu právě udané předpisy pro stanovení hodnot pravdivosti souvětí pomocí daných hodnot pravdivosti jednotlivých jeho částí do přehledných, t. zv. Schröderových tabulek, pak vypadají takto:

A	$\sim A$
1	0
0	1

A	B	$A \vee B$	$A \,\&\, B$	$A \rightarrow B$
1	1	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

Vidíme tedy (srov. tab. na str. 162), že na základě právě vytčených tří základních předpokladů výrokové logiky lze na věty (složené i jednoduché) hledět jako na proměnné prvky z algebry (0, 1) hodnot pravdivosti, při čemž jednoduché věty jejichž pravdivost neznáme, se nám takto jeví jako nezávisle proměnné, složené věty jako závisle proměnné a tvoření složených vět (logických souvětí) jako tvoření složených Booleovských početních předpisů; příslušná Booleovská funkce, daná takto složenou větou, bude vhodně nazvána výpovědí, (která je vyjádřena touto danou (složenou) větou.)

Jak je zřejmo, jedna a táž výpověď (či tvrzení) může být vyjádřena různými, jak se říká, logicky ekvivalentními větami. [Na př. větu „Není pravda, že není pravda, že zítra bude hezky" — čili $\sim(\sim a)$, považujeme za logicky ekvivalentní s větou a — „Zítra bude hezky". Souvětí „Když bude zítra hezky, pak půjdu na vycházku" — $a \rightarrow b$ považujeme za větné vyjádření výpovědi, která by však mohla být právě tak dobře vyjádřena větou $\sim a \vee b$ — „Zítra ráno nebude hezky, nebo půjdu na vycházku".] Toto pak zcela odpovídá okolnosti, že jedna a táž booleovská funkce může být vyjádřena různými booleovskými početními předpisy. Při tom základní početní booleovské úkony jsou ve výrokové logice dány užitím uvedených logických spojek takto: Svazové *spojování* pomocí spojky $\vee$ (...nebo...) čili t. zv. *logické disjunkce*, svazové *protínání* pomocí spojky & (... a ...), t. zv. logické *konjunkce*, svazový *doplněk* pomocí *negace* $\sim$ (Nikoli...) *Podmínečné souvětí* $a \rightarrow b$ — jež je třeba pečlivě odlišovat od podmínečného vztahu, či vztahu důsledku mezi dvěma větami a a b — nám pak představuje *spojení doplňku prvního daného členu s druhým daným členem.* Můžeme se tedy na *symbolický zápis složeného souvětí* přímo dívat jako na *výraz pro booleovský početní předpis*, jestliže nám jen znak $\vee$ vyznačuje svazové spojování, znak & svazové protínání, znak $\sim$ svazový doplněk.

K čemu je taková „algebraisace" výrokové logiky? Všechna odvozená logická pravidla pro logickou ekvivalenci dvou složených vět po takové algebraisaci se jeví jako prostá aplikace axiomů Booleovy algebry a na základě nich je odvozujeme vhodnou početní úpravou početního Booleova předpisu, daného jednou větou, v booleovský početní předpis pro tutéž funkci (výpověď), který je daný druhou větou. Jinak řečeno, logické ekvivalence („rovnice" výrokové logiky) přecházejí, jak se ukazuje, v identické rovnosti (platné pro jakékoli dosazené prvky) v Booleově algebře (0, 1) — a ovšem i obráceně, každá taková identita značí logickou ekvivalenci. Tak na př. druhé z De Morganových pravidel Booleovy algebry vyjadřuje tento odvozený princip (poučku), výrokové logiky: Říci, že není pravda, že současně A i B je logicky totéž, jako říci, že buď není pravda A, nebo není pravda B (nebo obojí).

Poznamenejme ještě, že ovšem poučky, které jsme si odvodili pro konečné Booleovy algebry, vesměs skýtají odpovídající poučky výrokové logiky. Tak se zejména ukazuje, že všechny (složené) výpovědi, jež lze učinit za pomoci m daných jednoduchých vět, tvoří Booleovu algebru o 2^{2^m} prvcích, t. j. výpovědech. Dále se ukazuje, že složená souvětí lze převádět na jednoznačně určené úplné spojové, zde je lépe říci *disjunkční* normální formy. To jsou s danou (složenou) větou logicky ekvivalentní souvětí, tvořená pomocí opakované spojky *nebo*; jeho částmi jsou opět souvětí tvořená vždy z různých daných m jednoduchých vět a jejich negací — pomocí souřadných spojek *a*. Co více, na takové úplné normální disjunkční formě pro dané souvětí máme možnost se přesvědčit, zda dané souvětí je, či není t. zv. tautologií, to jest souvětím „samozřejmě", bezpodmínečně pravdivým [které na jakékoli rozložení hodnot pravdivosti u nezávisle proměnných (jednoduchých vět) dává vždy konstantní hodnotu 1]. Jednoduché příklady tautologií: $a \vee \sim a$, $\sim(\sim a) \rightarrow a$, $a \rightarrow (a \vee b)$, a pod. Jak již nyní čtenář sám nahlíží, tautologie budou zřejmě všechny ty složené věty, jejichž úplná normální disjunkční forma je ta nejdelší pro Booleovskou funkci, identicky nabývající stále hodnoty 1.

Booleova algebra tedy skýtá matematický prostředek, jak o daném komplikovaném souvětí rozhodnout, zda je, či není tautologií, a to naprosto mechanisovatelným způsobem (vhodnou početní úpravou). (K tomu účelu dává ovšem Booleova algebra i jiné úspornější a praktičtější prostředky než je ten, který se opírá o úplnou spojovou normální formu; o těch zde však se již nelze šířit.) Lze říci, že prostě Booleova algebra řeší jednoduchým způsobem veškeré úkoly, jež se kladou elementární výrokové logika.

Tolik tedy ve vší stručnosti o aplikacích theorie (konečných) Booleových algeber na logice — a tolik o aplikacích theorie Booleovy algebry vůbec.

Na zakončenou si přehledně zopakujeme zvláště názorný, přímo školsky instruktivní příklad na různé, ale vzájemně isomorfní svazy, který nám poskytují konečné Booleovy algebry o 2^{2^n} prvcích (n je pevné celé kladné číslo). Uvedeme si zde šest Booleových vzájemně isomorfních, ale přesto vzájemně odlišných algeber, a to jak povahou svých prvků, tak způsobem realisace svazových úkonů, svazové jednotky a svazové nuly.

1. př.: *Prvky svazu*: Konečné části množiny (souboru) o 2^n předmětech.

Svazové spojení: Sjednocení částí. *Svazový průsek*: Průnik *Nula svazu*: prázdná část. *Jednotka svazu*: Celá množina.

2. př.: *Prvky*: Přirozená kladná čísla, dělitelé součinu 2^n prvních prvočísel

$$2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \ldots p^{2n} = N.$$

Svazové spojení: Nejmenší společný násobek. *Svazový průsek*: Největší společný dělitel. *Nula svazu*: Číslo 1. *Jednotka svazu*: Číslo N.

3. př.: *Prvky*: Vrcholky krychle v 2^n-rozměrném prostoru. *Svazové spojení*: K počátku nejbližší vrcholek, do něhož lze dojít po hranách krychle ze „spojovaných“ vrcholků za neustálého vzdalování od počátku. *Svazový průsek*: Od počátku nejvzdálenější vrcholek, do něhož lze dojít po hranách krychle z obou „protínaných“ vrcholků za neustálého přibližování se k počátku. *Nula svazu*: Vrcholek, ležící v počátku. *Jednotka svazu*: Vrcholek protilehlý k počátku (nejvzdálenější od počátku).

4. př: *Prvky*: Booleovské funkce o n nezávisle proměnných na Booleově algebře (0, 1). *Svazové spojení*: Funkce, jejíž hodnota je spojením hodnot daných funkcí (pro týž argument). *Svazový průsek*: Funkce, jejíž hodnota je průnikem hodnot daných funkcí. *Nula svazu*: Funkce s konstantní hod-

notou = 0. *Jednotka svazu*: Funkce s konstantní hodnotou = 1.

5. př.: *Prvky*: Elektrická *jj*-reléově-kontaktní zařízení o vstupních (řídících) klíčích (propouštějící nebo nepropouštějící proud jediným výstupem). *Svazové spojení*: Zařízení, sestrojené pomocí paralelního zapojení. *Svazový průsek*: Zařízení, sestrojené pomocí seriového zapojení (obou výstupních větví). *Svazová nula*: Zařízení, jež nikdy nepropouští proud. *Svazová jednotka*: Zařízení, jež vždy (za každé polohy řídicích kontaktů) převádí proud.

6. př.: *Prvky*: Výpovědi, které lze vyjádřit n jednoduchými, vzájemně nezávislými větami — při užití logických spojek „nikoli", „nebo", „a". *Svazové spojení* (dvou výpovědí): Je vyjádřeno spojením jejich větného vyjádření spojkou *nebo*. *Svazová nula*: Výpověď, vyjadřující logickou nemožnost. *Svazový průsek*: je vyjádřen spojkou *a*. *Svazová jednotka*: Výpověď, vyjadřující logickou samozřejmost (tautologii). (Pochopitelně, že toto nejsou všechny příklady možných Booleových algeber o 2^{2^n} prvcích. Př. 1 a 2 najde čtenář na obr. pro $n = 3$.)

Tím končíme více méně systematickou část našich výkladů o svazech. V dalším se věnujeme již jen nesystematickým doplňkům ve formě volné rozpravy, nečinící si nároků na matematickou přesnost.

Cvičení k 2,8.

1. Nalezněte logickou interpretaci všech 16 možných způsobů, jak tvořit složité výpovědi pomocí dvou daných výpovědí A a B a pomocí logických spojek $\vee$, &, $\sim$ („nikoli" („není pravda, že")). (Udejte si tabulky pro každou složenou výpověď.)

2. a) Převeďte každé logické souvětí složené ze dvou vět v souvětí, užívající jen logických spojek $\rightarrow$ a $\sim$.

b)*Vyjádřete všechna logická spojování vět pomocí jediné „spojky" „|" (Shefferův symbol), kde $A \mid B$ značí: nikoli A nebo nikoli B, algebraicky $A \mid B = A' \cup B'$.

3. Interpretujte de Morganovy identity jako (odvozené) poučky výrokové logiky.

4. Vztah (mezi výpověďmi) z A (logicky nutně) vyplývá B, je vztah částečného uspořádání v Booleově algebře výpovědí.

Ukažte, že říci, že z A logicky nutně vyplývá B (B je logický důsledek A) je totéž, jak říci, že výpověď $A \to B$ je jednotkou (příslušné Booleovy algebry výpovědí, je tautologickou výpovědí).

5. Říci, že A dává nutnou podmínku pro B značí $B \subseteq A$. Říci, že A dává nutnou a postačující podmínku pro B značí: $A = B$.

a) Odůvodněte následující, v matematice často užívaný postup důkazu nutnosti a postačitelnosti podmínky A pro B:

Existuje n výpovědí $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tak, že $A = C_1$, $B = C_j$ (j pevné $1 < j < n$) z C_i plyne C_{i+1} pro $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ a z C_n plyne C_1 (t. zv. závěr pomocí implikačního kruhu).

b) Odůvodněte, že dokázat, že z A plyne B, je totéž, jako dokázat, že z $\sim B$ plyne $\sim A$.

c) Odůvodněte t. zv. nepřímý důkazový postup: dokázat, že z A plyne B, je totéž jako dokázat, že z předpokladu $\sim B \,\&\, A$ plyne kontradiktorická (sporná) výpověď.

2,9. MODULÁRNÍ SVAZY. MODULÁRNÍ A KOMPLEMENTÁRNÍ SVAZY. PROJEKTIVNÍ GEOMETRIE JAKO SVAZ. SPOJITĚ DIMENSIONÁLNÍ PROJEKTIVNÍ GEOMETRIE.

Jako v 1. části knížky (jednající o grupách) nám zbývá i zde k víceméně systematickým výkladům o základních pojmech a některých druzích svazů, jež tvoří hlavní obsah této druhé části, připojit nakonec zběžný pohled na některé další otázky a výsledky theorie svazů a jejich aplikací, na něž se tu nedostalo a ani nemohlo dostat. To je však úloha těžší, než v případě grup, jednak proto, že theorie svazů je (v daleko větší míře než dnes již vykrystalisovaná a dlouhým vývojem prošlá theorie grup) dosud ve stadiu počátečního rozvoje, v němž není ještě zcela jasno, jak půjde další vývoj a co z nedávných objevů si podrží trvalou cenu v matematice i v aplikacích. Za druhé je potíž v tom, že do hloubky jdoucí aplikace theorie svazů v ostatní matematice, o nichž by bylo záhodno zde informovat, vyžadují dosti značných znalostí a rozhledu v současné matematice, po př. matematické logice.

Tak zejména v abstraktní algebře představuje aplikace