O grupách a svazech

2.6 „Racionální funkce” na Booleově algebře. (Booleovské funkce.) Úplné normální formy

In: Ladislav Rieger (author): O grupách a svazech. (Czech). Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. pp. 159–173.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403376

4. Dokažte, že distributivní svaz všech celistvých dělitelů celého čísla $N > 1$ (ve smyslu svazového polouspořádání dle vztahu dělitelnosti) je Booleova algebra tehdy a jen tehdy, když číslo N nemá čtvercových dělitelů. (Viz cvičení 6 k 2,4.)

2,6. „RACIONÁLNÍ FUNKCE" NA BOOLEOVĚ ALGEBŘE (BOOLEOVSKÉ FUNKCE). ÚPLNÉ NORMÁLNÍ FORMY.

Vyjděme opět z analogie s čísly.

Čtenář si vzpomene, že t. zv. racionální funkce ve školské algebře jsou zhruba řečeno takové funkce (mající za hodnoty t. zv. argumentu vždy jedno nebo i více čísel a za hodnoty funkce vždy jedno číslo), kde hodnota funkce se dá vypočítat z hodnot argumentu dle vhodného početního předpisu, skládajícího se z kombinovaného sečítání, odčítání, násobení a (pokud dělitel není nula) dělení.

(Příklady takových racionálních početních předpisů, jež čtenář dobře zná, jsou

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}, \quad g(x, y) = \frac{x^2 + 2xy + 3}{x + y},$$

$$h(x, y, z) = \frac{1 + x^2}{3{,}2 \,.\, y} + y + \frac{2{,}5}{z}, \quad \text{atp.}).$$

V takovém početním předpisu pro racionální funkci vystupují, jak známo, jednak určitá pevná čísla, t. zv. **konstanty** a jednak t. zv. **nezávisle proměnné** (neurčité), a to v konečném (ale zásadně neomezeném) počtu m, na př. jsou to $x, y, z, \ldots$ anebo jsou to $x_1, x_2, \ldots$ Provedení předpisu spočívá v tom, že při daném argumentu, t. j. uspořádané skupině čísel $a_1, a_2, \ldots, a_m$ se prostě dosadí za odpovídající nezávisle proměnné jim odpovídající čísla, t. zn. řekněme číslo a_1 za proměnnou x_1, a_2 za x_2 atd. až posléze a_m za x_m, a takto naznačené početní úkony se provedou (s výjimkou neproveditelného dělení nulou, pokud se vyskytne). Výsledek je hodnota dané racionální funkce pro daný argument (pro dané hodnoty nezávisle proměnných). (Na př.

$$f(1) = \frac{1^2 - 1}{1} = 0,\; g(1, 2) = \frac{1^2 + 2 \,.\, 1 \,.\, 2 + 3}{1 + 2} = \tfrac{8}{3} \text{ atp.)}$$

Při tom je třeba si povšimnout a zdůraznit, že (racionální) *funkce sama je něco jiného, než příslušný početní předpis*; jedna a táž racionální funkce může být dána různými početními předpisy (postupy), které však dávají při tomtéž argumentu týž výsledek. Na př.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} = (x - 1)(x + 1)\,\frac{1}{x},\; g(x, y) =$$

$$= \frac{x^2 + 2xy + 3}{x + y} = x + y + \frac{3 - y^2}{x + y}, \text{ atp.)}$$

Čtenář ví dále, že sečítat, odčítat, násobit a dělit (pokud bychom nechtěli dělit nulou) lze nejen čísla, ale i samotné racionální funkce.

Při tom definujeme přirozeně jako součet $h(x)$ dvou racionálních funkcí, $f(x)$ a $g(x)$ tu racionální funkci, která číslu x přiřazuje součet obou funkčních hodnot, $f(x) + g(x) = h(x)$. Podobně definujeme rozdíl, součin a (pokud bychom se nedopouštěli dělení nulou) i podíl dvou racionálních funkcí jakožto racionální funkci. Početní předpis, kterým je vlastně takto součet, rozdíl, součin a podíl dvou racionálních funkcí přímo definován, hledíme ovšem vhodnou úpravou zpravidla změnit (zjednodušit). Tak na př. je-li

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x},\; g(x) = \frac{1}{x},$$

pak

$$h(x) = f(x) + g(x) = \frac{x^2 - 1}{x} + \frac{1}{x} = x$$

ovšem jen pro $x \neq 0$.

Avšak je zapotřebí sečítat, odečítat, násobit a dělit i racionální funkce, které se neshodují ve všech svých nezávisle proměnných. Pak součet, rozdíl, součin, podíl takových dvou racionálních funkcí je i v tomto obecnějším případě definován stejně — výsledkem je ovšem racionální funkce obecně všech nezávisle proměnných, která se vyskytují v jedné, nebo v druhé z daných funkcí. (Tak na př. pišme

$$f(x) + g(y) = \frac{x^2 - 1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x^2 + xy - 1}{xy} = u\,(x, y),$$

$$f(x) + g(x, y) = \frac{x^2 - 1}{x} + \frac{x^2 + 2xy + 3}{x + y} =$$

$$= \frac{2x^3 + 3x^2y + 2x - y}{x^2 + xy} = v(x, y), \text{ atp.)}$$

A nyní: V Booleově algebře nalézáme úplnou obdobu racionálních funkcí. Prohlásíme nyní za „racionální funkci" na dané Booleově algebře B čili kratčeji za booleovskou funkci takové přiřazení f vždy určitého jediného prvku $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ dané Booleovy algebry B k libovolně zvolené m-tici prvků $x_1, x_2, \ldots, x_m$ z této algebry, které lze uskutečnit vhodným (pro všechny hodnoty proměnných týmž) „početním" booleovským předpisem (hodnota funkce se dá „vypočítat"). Při tom ovšem se tímto *„početním" booleovským předpisem rozumí opakování a kombinování základních úkonů Booleovy algebry B*, t. j. určitý sled *spojování, protínání a doplňování*, prováděného na „proměnných" prvcích $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ (jež si lze libovolně volit), jakož i na jistých „konstantách" (které jsou neměnnými prvky vystupujícími v řečeném početním booleovském předpisu). Nejjednodušší booleovské funkce, dané přímo jediným základním úkonem, jsou vyznačeny v tab. 2. — Je-li a pevný prvek („konstanta") dané Booleovy algebry B, pak je ještě dosti jednoduchá funkce dána třeba předpisem: $f(x) = (x \cup a) \cap x'$. (Je to booleovská funkce o jedné nezávisle proměnné x.) Je-li b konstanta, pak je předpisem

TABULKY NEJJEDNODUŠŠÍCH DVOJHODNOTOVÝCH BOOLEOVSKÝCH FUNKCÍ NA BOOLEOVĚ ALGEBŘE $(0, 1)$.

x	x'
1	0
0	1

x_1	x_2	$x_1 \cup x_2$	$x_1 \cap x_2$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

Tab. 2.

$$g(x, y) = [(x \cup y) \cap (a \cup x) \cap (b \cup y)] \cap x'$$

dána booleovská funkce g o dvou nezávisle proměnných x a y, atp.

(Dosaďme na př. za $x = n$ (nulu algebry). V prvém příkladě funkce $f(x)$ „vypočteme" příslušnou hodnotu funkce takto:

$$f(n) = (n \cup a) \cap n' = a \cap j = a$$

Podobně, dosaďme do druhého předpisu pro funkci g třeba $x = n$, $y = j$ (jednotka algebry). Dostáváme

$$g(n, j) = [(n \cup j) \cap (a \cup n) \cap (b \cup j)] \cap n' =$$
$$= (j \cup a \cup j) \cap j = j,$$

jakožto hodnotu funkce g pro hodnotu (n, j) argumentu (čili pro hodnotu n první a hodnotu j druhé nezávisle proměnné).)

V tab. 3 je tabelována obecnější funkce

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cup x_2) \cap x_3'$$

o třech proměnných. Podobně, jako u číselných funkcí, i Booleovské funkce můžeme udat tabulkou.

Opět ovšem musíme zdůraznit, že — jako při obyčejných racionálních funkcích — i zde jedna a táž booleovská funkce (čili jedna a táž tabulka, může být dána různými početními booleovskými předpisy. Tak na př. lze psát právě tak dobře v prvním příkladě $f(x) = x' \cap a$, v druhém příkladě

$$g(x, y) = (x \cup y) \cap (a \cap x') \cap (b \cup y),$$

jak se čtenář sám snadno přesvědčí.

A opět podobně, jako jsme sečítali, odčítali a násobili a dělili samotné racionální funkce, můžeme *spojovat a protínat a doplňovat* samotné booleovské funkce, čili můžeme *utvořit Booleovu algebru* všech booleovských funkcí na dané Booleově algebře B.

Při tom budeme patrně spojením $[f \cup g](\ldots)$ dvou takových booleovských funkcí $f(\ldots)$ a $g(\ldots)$ na B rozumět booleovskou funkci, která uspořádané m-tici hodnot nezávisle proměnných, které se vyskytují v jedné nebo v druhé funkci, přiřazuje jako hodnotu spojení obou příslušných hodnot funkce $f(\ldots)$ a funkce $g(\ldots)$. (Tak na př. je-li

$$f(x) = x \cap a, \quad g(x, y) = x' \cup y \cup b;$$

pak

$$[f \cup g](x, y) = (x \cap a) \cup (x' \cup y \cup b) =$$
$$= x' \cup a \cup y \cup b\ )$$

jak se čtenář sám snadno přesvědčí.)

Stejně budeme definovat průsek dvou Booleových funkcí $f \cap g(\ldots)$ jakožto funkci, jejíž hodnoty jsou dány průsekem hodnot obou funkcí. (Na př. shora

$$[f \cap g](x, y) = (x \cap a) \cap (x' \cup y \cup b) =$$
$$= [(x \cap y) \cup (x \cap b)] \cap a.$$

Konečně doplňkem $f'(\ldots)$ booleovské funkce $f(\ldots)$ budeme patrně rozumět funkci přiřazující daným hodnotám argumentu doplněk příslušné hodnoty funkce $f(\ldots)$.

Omezme nyní počet nezávisle proměnných číslem m a za algebru B vezměme nějakou konečnou Booleovu algebru, t. j.

dle předchozí věty algebru všech částí konečné množiny řekněme o N prvcích. Dostáváme tedy jistou algebru funkcí. Jde o to, kolik nanejvýše prvků (t. j. booleovských funkcí) obsahuje tato Booleova algebra.

Jelikož algebra B má 2^N prvků, je všech možných m-tic prvků z B, čili všech možných hodnot argumentu právě $(2^N)^m = 2^{mN}$ (což je počet všech m-členných variací s opakováním z 2^N prvků, jak si čtenář ze školy vzpomene). Booleovy funkce o m-nezávisle proměnných můžeme považovat za variace s opakováním. Bude tedy všech booleovských funkcí o m nezávisle proměnných nejvýše (ve skutečnosti právě tolik, kolik je 2^{mN} členných pořadí variací s opakováním z 2^N prvků, t. j. $2^{N2^{mN}}$.

Především je tedy ovšem počet všech Booleových funkcí o m nezávisle proměnných na konečné Booleově algebře konečný. Máme tak příklady konečných Booleových algeber, které nejsou přímo dány jakožto množinové okruhy. Nicméně podle poslední věty jsou i tyto algebry funkcí vždy isomorfní s vhodnou algebrou všech částí jisté konečné množiny.

V dalším se věnujme nejjednoduššímu, ale v aplikacích nejdůležitějšímu případu algebry — označme ji A_m — Booleových funkcí nezávisle proměnných na Booleově algebře $B = (n, j)$ jen o dvou prvcích: Nule n ($= \emptyset$ a jednotce j ($= (a)$). (Zde je $N = 1$, B je algebra všech částí množiny (a) o jediném předmětu.) Dle předchozí poznámky je počet prvků v algebře A_m nejvýše 2^{2^m} (uvidíme brzy, že je přesně takový). Jde o to, abychom získali bližší náhled na algebru A_m.

Vyjděme opět z analogie s racionálními funkcemi. Jak čtenář dobře ví, při úpravě početního předpisu pro obyčejnou racionální funkci (číselnou) si počínáme zpravidla tak, že odstraníme případné složené zlomky, pronásobíme výrazy v závorkách a uvedeme vše na společný jmenovatel. Tak se předpis pro racionální funkcí objeví ve tvaru zlomku, kde v čitateli i v jmenovateli je mnohočlen v nezávisle proměnných, při čemž ještě uspořádáváme obvykle i jednotlivé členy v mnohočlenech podle klesajících mocnitelů u proměnné; pokud je více různých nezávisle proměnných, určíme si zpravidla předem jejich pořadí (na př. $x_1, x_2, \ldots,$ nebo dle abecedy $x, y, z, \ldots$ pokud tato stačí), a pořadí členů v mnohočlenu o více proměnných určujeme t. zv. lexikografickým způsobem. Dáváme totiž přednost členům s vyšším stupněm (t. j. součtem mocnitelů) a při stejném stupni uspořádáváme členy tak, jako by to byla hesla ve slovníku. Tak bychom na př. upravili

$$h(x, y) = \frac{x^2 - 1}{x} + \frac{x^2 + 2xy + 3}{x + y} = \frac{2x^3 + 3x^2y + 2x - y}{x^2 + xy}.$$

Taková standardní úprava nám představuje jakousi normální formu početních předpisů pro racionální funkci. Ovšem že toto není jediná možná standardní úprava — a není ani vždy nejvhodnější. (Tak na př. někdy je lepší provést naznačené částečné dělení (se zbytkem) a psát třeba

$$h(x, y) = 2x + \frac{x^2y + 2x - y}{x^2 + xy}.\Big)$$

Takové úpravy v typické normální formy máme i pro početní předpisy booleovské (pro booleovské funkce). Z nich jsou nejdůležitější dvě: T. zv. úplná spojová (někdy též disjunkční) normální forma, a t. zv. úplná průseková (či též konjunkční) normální forma, která je k první duální.

Pod úplnou spojovou normální formou v m proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_m$ rozumíme spojení několika různých průseků, z nichž každý má m činitelů a tito činitelé jsou buďto samy proměnné x_i anebo jejich doplňky (při čemž udané pořadí proměnných v průsecích zachováváme); nikdy však není v jednom průseku současně proměnná a její doplněk. (Takový průsek by ostatně dal vždy nulu a mohl by se ve spojení vynechat.)

Podobně pod t. zv. úplnou průnikovou (konjunkční) normální formou rozumíme duálně průsek několika spojení, z nichž každé má m činitelů a tito činitelé jsou vesměs buďto samy proměnné, nebo jejich doplňky — při čemž nikdy není v jednom spojení proměnná i její doplněk (takové spojení by se jakožto činitel průseku vynechalo, jsouc vždy rovno jednotce).

Příklady spojové, čili, jak se též někdy říká, disjunkční normální formy:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (x_1' \cap x_2' \cap x_3 \cap \ldots \cap x_m) \cup \cup (x_1 \cap x_2' \cap x_3 \cap \ldots \cap x_m),$$

$$G(x_1, \ldots, x_m) = (x_1' \cap x_2' \cap \ldots \cup x_m') \cup (x_1' \cap x_2 \cap \ldots \cap x_m) \cup \cup (x_1 \cap x_2 \cap \ldots \cap x_m).$$

(Příklady na průsekovou normální formu si čtenář snadno dualisací sestrojí sám.)

Půjde nyní o to ukázat, že každý (sobe složitější) početní předpis, udávající booleovskou funkci o m nezávisle proměnných, se dá uvést na úplnou spojovou normální formu. (Jde stále o booleovské funkce, kde nezávisle proměnné nabývají každá jen dvou hodnot, nuly n resp. jednotky j z dvouprvkové algebry (n, j) a kde hodnoty závisle proměnné jsou opět buďto n nebo j.

(Poznamenejme, aby nebylo nedorozumění: Místo o všech uvažovaných booleovských funkcích o m proměnných můžeme právě tak dobře mluvit o všech (booleovských) funkcích o *nejvýše* m nezávisle proměnných. Neboť funkce $f(x_1, \ldots, x_{m-r})$ $(0 \leqq r < m)$, v jejímž početním předpisu vystupují řekněme jen nezávisle proměnné $x_1, \ldots, x_{m-r}$, může být považována za funkci všech m nezávisle proměnných $F(x_1, \ldots, x_m)$, jestliže prostě stanovíme, že při týchž daných hodnotách $x_1, \ldots, x_{m-r}$ jsou hodnoty funkce $F(x_1, \ldots, x_m)$ stále stejné a rovny hodnotě $f(x_1, \ldots, x_{m-r})$, ať jsou hodnoty ostatních proměnných $x_{m-r+1}, \ldots, x_m$ jakékoli.)

Věta. (O úplné spojové normální formě v Booleově algebře funkcí m nezávisle proměnných na algebře (n, j).)

Každá booleovská funkce o m nezávisle proměnných na Booleově algebře $B = (n, j)$ se dá vyjádřit jedním a jen jedním způsobem v t. zv. úplné spojové normální formě jakožto spojení nejvýše 2^m průseků; průsek má m činitelů, jež jsou buď přímo ne-

závisle proměnné, nebo jejich doplňky (ale ne obojí současně). Všechny tyto booleovské funkce tvoří Booleovu algebru A_m, která má 2^{2^m} prvků a zmíněné význačné průseky (spojované v t. zv. úplné spojové normální formě) jsou její atomy. Algebra A_m je tedy isomorfní s množinovou Booleovou algebrou všech částí libovolné množiny o 2^m prvcích.

Důkaz:

V jakém smyslu naše booleovská funkce o m nezávisle proměnných na algebře (n, j) tvoří Booleovu algebru A_m, už víme.

Vyjdeme z následujícího vyjádření jednotky $j(\ldots)$ algebry A_m (vlastně z funkce, která nabývá vždy hodnoty j):

$$j(\ldots) = (x_1 \cup x_1') \cap (x_2 \cup x_2') \cap \ldots \cup (x_m \cup x_m').$$

Upravme nyní tento výraz m-násobným použitím distributivního zákona. Dostaneme tak spojení m-členných průseků, kde do každého průniku je z každé závorky vzat jeden člen, t. j. buď x_i nebo x_i', $i = 1, 2, \ldots, m$, při čemž každá z proměnných se vyskytuje v každém z takto utvořených m-členných průseků jednou a jen jednou. Všech takových průseků, jež máme navzájem spojit, bude patrně tolik, jaký je počet m-členných kombinací s opakováním ze dvou prvků, t. j. 2^m. Jsou tedy uvažované průseky tyto:

$$(x_1 \cap x_2 \cap \ldots \cap x_m),\ (x_1' \cap x_2 \cap \ldots \cap x_m),$$
$$(x_1 \cap x_2' \cap \ldots \cap x_m), \ldots, (x_1' \cap x_2' \cap \ldots \cap x_m),$$
$$\ldots, (x_1' \cap x_2' \cap \ldots \cap x_m').$$

Spojení všech je funkce, nabývající neustále konstantní hodnoty j. Je snadno vidět, že každé dva různé z uvažovaných průseků mají za průsek nulu n (t. j. vlastně funkci, která se konstantně rovná n), neboť se zřejmě vždy vyskytne aspoň jedna proměnná x_i v jednom průseku bez doplňku a v druhém s doplňkem.

Vyberme nyní libovolnou skupinu z právě uvažovaných průseků a spojme průniky této skupiny. Dostáváme tak celkem 2^{2^m} booleovských početních předpisů v úplné spojové normální formě; při tom nechť prázdná skupina našich průniků znamená formálně booleovskou funkci (konstantu), která nabývá stále hodnoty n. Tvrdím, že každý z těchto 2^{2^m} početních předpisů dává jinou booleovskou funkci. Dejme tomu, že naopak dvě různé úplné normální spojové formy dávají touž funkci

$$F(x_1, \ldots, x_m) = G(x_1, \ldots, x_m) \qquad (*)$$

pro všechny hodnoty proměnných, ale že v souhrnu průseků (činitelů spojení) úplné normální spojové formy $F(x_1, \ldots, x_m)$ postrádáme jeden z uvažovaných průseků, nazveme ho $p(\ldots)$, který však vystupuje ve vyjádření úplné normální spojové formy $G(x_1, \ldots, x_m)$ (jako člen spojení). (Na pořadí členů spojení nezáleží; aby však bylo určité, mohli bychom je dle vzoru úpravy racionální číselné funkce v úplné spojové normální formě také normovat lexikografickým způsobem uspořádání jednotlivých proměnných. Podrobnosti takové formální úpravy si čtenář laskavě provede jako snadné cvičení sám).

Protněme nyní obě strany prve napsané rovnosti (*) průsekem $p(\ldots)$. Za pomoci distributivního zákona snadno vidíme, že: Jednak vpravo zůstane průsek $p(\ldots)$ sám (průseky členu $p(\ldots)$ se všemi ostatními členy spojení $F(x_1, \ldots, x_m)$ jsou nuly n a ve spojení je ovšem vynecháme). A jednak nalevo dostáváme nulu n, jakožto spojení každého z našich základních průseků (vyskytujících se jako činitelé spojení v $F(x_1, \ldots, x_m)$ s průsekem $p(\ldots)$, který je od každého z nich různý). Avšak funkce $p(\ldots)$ sama nemůže dávat stále nulu n, neboť volíme-li $x_i = j$, jestliže se proměnná x_i vyskytuje ve funkci $p(\ldots)$ sama — a $x_k = n$ (čili $x'_k = j$), jestliže v $p(\ldots)$ vystupuje doplněk proměnné x_k, pak zaručeně nabývá funkce $p(\ldots) = p(x_1, \ldots, x_m)$ hodnoty $j \cap j \cap \ldots \cap j = j \neq n$. Ve skutečnosti snadno nahlížíme, že je to také jediná volba hodnot nezávisle proměnných $x_1, \ldots, x_m$, pro niž nabývá funkce $p(\ldots)$ hodnotu různou od nuly n. Tak na př. pro

$m = 3$ funkce $p(\ldots) = x_1' \cap x_2 \cap x_3'$ nabývá patrně hodnoty j jen pro $x_1 = n$, $x_2 = j$, $x_3 = n$.)

Máme tedy celkem 2^{2^m} různých booleovských funkcí (o m nezávisle proměnných na dvouprvkové algebře $B = (n, j)$) vyjádřeno jim odpovídajícími 2^{2^m} různými úplnými spojovými normálními formami. Avšak již víme, že všech Booleovských funkcí o m nezávisle proměnných vůbec definovatelných na dvouprvkové algebře je nejvýše 2^{2^m}.

Tedy jsme úplnou spojovou normální formou vyjádřili každou z uvažovaných booleovských funkcí, t. j. prvků Booleovy algebry A_m — a to jednoznačně. Algebra má tedy také skutečně A_m právě 2^{2^m} prvků. Abychom dokončili důkaz naší věty, stačí již dodat toto:

Je již zřejmo, že vztah svazového částečného uspořádání

$$f(x_1, \ldots, x_m) \subset g(x_1, \ldots, x_m)$$

pro dvě z našich booleovských funkcí bude splněn tehdy a jen tehdy, když skupina základních průseků — činitelů spojení (v úplné spojové normální formě pro funkci $f(\ldots)$) je vlastní (t. j. od celku různou) částí skupiny takových průseků — činitelů úplné spojové normální formy funkce $g(\ldots)$. Již z toho je vidět, že samotné průseky $p(\ldots)$, t. j. funkce dané průsekem všech proměnných, resp. jejich doplňků (při čemž se každá z m proměnných x_i vyskytuje právě jednou), jsou atomy naší algebry A_m. Dle již řečeného jsou atomy $p(\ldots)$ v A_m jakési základní booleovské funkce (o m nezávisle proměnnných na algebře (n, j)), které nabývají hodnoty „jednotkové" j právě pro jednu jedinou m-člennou variaci s opakováním ze dvou prvků n, j, t. j. pro jeden jediný sled hodnot jednotlivých proměnných x_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ (všude jinde nabývají hodnoty „nulové" n).

Tím jsme dokázali naši větu a zároveň nabyli jakéhosi přehledu o prvcích naší algebry A_m booleovských funkcí. Rovněž jsme již s to nahlédnout, v čem tkví použitelnost tohoto druhu konečných algeber booleovských funkcí pro konečně kombinatorické úlohy vůbec. Všech vůbec možných způsobů, jakými lze jednoznačně konečným m-členným posloupnostem tvořeným vždy ze dvou prvků („nuly“ n a „jednotky“ j) přiřadit opět vždy buď jeden anebo druhý ze dvou prvků, „nulu“ n anebo „jednotku“ j je totiž — jak víme — právě 2^{2^m}. Vidíme tedy, že každé takové přiřazení, t. j. tabulka, přiřazující jednotlivým m-ticím sestaveným z členů n a j, opět vždy členy n anebo j, ať bylo docíleno jakýmkoli způsobem, dá se vždy vystihnout početní booleovskou formulí, dá se považovat za booleovskou („racionální“) funkci. Dokonce lze vyjádřit takové přiřazení v úplné spojové normální formě booleovského početního předpisu. [Poznamenejme hned, že obdobná věta neplatí pro algebru všech booleovských funkcí na libovolné konečné Booleově algebře.] Co více, z tabulky pro booleovskou funkci vyčteme ihned její úplnou spojovou normální formu tímto způsobem:

Všimněme si jen řádků tabulky, jež končí jednotkovou hodnotou funkce. Jeden takový řádek nám dá ihned jeden z činitelů spojové normální formy. Nezávisle proměnnou, která v takovém řádku nabyla hodnoty jednotkové, vezmeme jako činitel průniku a k nezávisle proměnné, která nabyla nulové hodnoty v tomto řádku, vezmeme doplněk. Tak na př. z tab. 3, kde $n = 0$, $j = 1$ takto vyčteme ihned pro tam tabelovanou funkci o třech nezávisle proměnných $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cup x_2) \cap x_3'$ její úplnou spojovou normální formu jakožto

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cap x_2 \cap x_3') \cup (x_1 \cap x_2' \cap x_3') \cup \\ \cup (x_1' \cap x_2 \cap x_3').$$

(Doporučuji čtenáři, aby se o tom přesvědčil početní úpravou původně daného tvaru funkce.) Jako cvičení si čtenář dokáže obecnou správnost takovéhoto způsobu získávání úplné spojové normální formy pro booleovskou funkci na algebře (0,1). — V následujícím odstavci uvidíme, jak se tohoto užívá v elektrotechnice.

Poslední věta nám dokazuje existenci a jednoznačnost spojového úplného normálního vyjádření Booleovy funkce o konečném počtu nezávisle proměnných na dvouprvkové algebře (n, j). Nedává nám však prakticky početní postup, jak takovou Booleovu funkci, danou obecně libovolným početním Booleovým předpisem, na normální spojový tvar uvést. Praktický postup je dvojí: Buďto nepřímo, pomocí tabelace, právě uvedeným způsobem, anebo přímo takto: Nejprve užíva-

TABULKA FUNKCE

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cup x_2) \cap x_3'$$

x_1	x_2	x_3	$(x_1 \cup x_2) \cap x_3'$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

Tab. 3.

jíce (několikráte) obou pravidel De Morganových posouvejme postupně operaci doplňku stále dovnitř a upravme daný výraz naší funkce tak, až operace doplňku se již vesměs vztahují přímo na jednotlivé nezávisle proměnné x_i. Potom počněme odstraňovat pomocí distributivního a asociativního zákona komplikovanou kombinaci spojování a protínání takto: postupujíce od nejvnitřnějších výrazů (v jednoduchých závorkách), proveďme všechna případná naznačená protínání, která se pomocí distributivního zákona dají provést, t. j. převést na spojení průniků jednotlivých proměnných nebo jejich doplňků. Vkládajíce mezi tyto úpravy vynechávání přebytečných závorek (na podkladě zákonů asociativity) docílíme nakonec, že nám zůstane spojení několika průseků, kde členové průseku jsou buďto samy nezávisle proměnné x_i nebo jejich doplňky. Nyní ještě protneme tento výsledek postupně všemi takovými spojeními $x_k \cup x_k'$, že x_k chybí v některém z právě obdržených průniků. Tím se daná funkce nemění (protínáme ji funkcí, která je neustále rovna jednotce j) a dostaneme do vyjádření naší funkce spojením co nejjednodušších průseků všechny ty z proměnných, které tam dříve chyběly. Tím naše vyjádření dané booleovské funkce nabude tvaru úplné normální spojové normy. Na př. nechť

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cap x_2)' \cup x_3.$$

Úprava na normální spojovou formu probíhá takto:

$$= x_1' \cup x_2' \cup x_3 = \| \cap (x_1 \cup x_1')$$
$$= (x_1 \cap x_2' \cup (x_1 \cap x_3) \cup x_1' \cup (x_1' \cap x_2') \cup (x_1' \cap x_3) = \| \cap (x_2 \cup x_2')$$
$$= (x_1 \cap x_2 \cap x_3) \cup (x_1' \cap x_2) \cup (x_1' \cap x_2 \cap x_3) \cup (x_1 \cap x_2') \cup (x_1 \cap$$
$$\cap x_2' \cap x_3) \cup (x_1' \cap x_2') \cup (x_1' \cap x_2' \cap x_3) = \| \cap (x_3 \cup x_3'),$$
$$= (x_1 \cap x_2 \cap x_3) \cup (x_1' \cap x_2 \cap x_3) \cup (x_1 \cap x_2' \cap x_3) \cup (x_1' \cap x_2' \cap x_3) \cup$$
$$\cup (x_1' \cap x_2 \cap x_3') \cup (x_1 \cap x_2' \cap x_3') \cup (x_1' \cap x_2' \cap x_3').$$

Čtenář si sám zkontroluje početní postup a nalezne normální spojovou formu jiných booleovských funkcí (viz cvičení).

Větou o jednoznačnosti normální úplné spojové (po případě průnikové) formě pro každou booleovskou funkci na dvouprvkové booleově algebře jsme podali druhou hlavní poučku z theorie konečné Booleovy algebry. V obou hlavních větách o konečných Booleových algebrách jsme natolik nahlédli do jednoduché (ve srovnání na př. s konečnými grupami) povahy konečných Booleových algeber, že se dále již budeme moci stručně zabývat podstatou aspoň některých aplikací — a to: na elektrotechniku a na logiku.

Poznamenejme, že zvláště v aplikacích bývá vhodné brát pro určitost za oba prvky naší dvojprvkové Booleovy algebry číselnou nulu 0 — a považovat ji rovněž za nulu ve smyslu booleovy algebry — a číselnou jednotku 1 — a rovněž ovšem ji považovat též za jednotku ve smyslu dvouprvkové booleovy algebry $B = (0, 1)$. Vedle jiných výhod má to i tu přednost, že booleovské úkony v algebře $(0, 1)$ možno považovat za takto zavedené číselné úkony:

Označme na okamžik jako $\langle x \rangle$ pro celé číslo x nejmenší nezáporný zbytek čísla x děleného 2. (Je tedy $\langle x \rangle = 1$, jakmile je x liché a $\langle x \rangle =$

$= 0$ jakmile je x sudé.) Pak můžeme psát v algebře $(0, 1)$ (a i b může být jen 0 nebo 1)

$$a \cup b = \langle a + b + ab \rangle,$$
$$a \cap b = ab,$$
$$a' = \langle a + 1 \rangle.$$

Cvičení k 2,6.

1. Vyjádřete v úplné normální spojové formě nejjednodušší booleovské funkce o m nezávisle proměnných (na algebře (n, j))

$f_j(x_1, \ldots, x_m) = x_j$
$g_j(x_1, \ldots, x_m) = x'_j$
$h_{i,j}(x_1, \ldots, x_m) = x_i \cup x_j$
$k_{i,j}(x_1, \ldots, x_m) = x_i \cap x_j$ (volte na př. $m = 5$).

2. Totéž, co v 1— pro úplnou průnikovou normální formu (duálně)
3. Tabelujte dle vzorců tab. 2 a 3 tyto booleovské funkce o třech nezávisle proměnných

a) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cap x_2') \cup (x_3' \cap x_1)$.
b) $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \cap x_2) \cup x_3 \cup x_4'$.

Najděte (dle způsobu, udaného v textu) jejich úplné spojové normální formy a přejděte k úplným průsekovým normálním formám dualisací.

4.*Odůvodněte podrobně (pomocí věty o úplné spojové normální formě) v textu udaný způsob, jak z tabelace booleovské funkce vyčíst její úplnou spojovou normální formu.

2,7. PRINCIP APLIKACE THEORIE BOOLEOVÝCH ALGEBER V ELEKTROTECHNICE.

Hlavní aplikace theorie Booleových algeber v elektrotechnice se týkají t. zv. reléově-kontaktních systémů. Příkladem takového jednoduchého systému je t. zv. Wagnerovo kladívko, jež pohání elektrický zvonek. Příkladem složitého takového systému je telefonní centrála nebo elektromagnetický matematický stroj.

Princip činnosti a účel reléově-kontaktního systému možno popsat takto: Na kteroukoli určitou kombinaci zapojení a vypojení pevného počtu m t. zv. *vstupních* (dvoupolo-