O grupách a svazech

2.2 Částečné uspořádání a polouspořádání. Pojem svazu na základě pojmu polouspořádání. Příklady svazů

In: Ladislav Rieger (author): O grupách a svazech. (Czech). Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. pp. 114–127.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403372

že pojem svazu se vyskytuje v mnoha zdánlivě odlehlých odvětvích matematiky a má užití nejen v různých matematických theoriích samotných, nýbrž přímo i v elektrotechnické a statistické praxi. Dá se říci, že úloha theorie svazů v současné matematice je podobná úloze theorie grup (i když je menší; ostatně mezi oběma theoriemi jsou i četné vnitřní souvislosti). To vše jsou důvody, proč jsem považoval za vhodné napsat uvedení do nejzákladnějších pojmů teorie svazů do této knížky, a umístit je právě za část, pojednávající o grupách.

2,2. ČÁSTEČNÉ USPOŘÁDÁNÍ A POLOUSPOŘÁDÁNÍ. POJEM SVAZU NA ZÁKLADĚ POJMU POLOUSPOŘÁDÁNÍ.

Přirozená cesta, kterou jsme zvolili, abychom se dostali k obecnému pojmu grupy, vyšla z pojmu (geometrické) pravidelnosti, tedy z pojmu, jenž je velmi obecný a každému povědomý.

Přirozeným východiskem cesty k obecnému pojmu svazu je pojem snad ještě názornější a každému dobře známý. Je to pojem částečného uspořádání. Zdržíme se poněkud u tohoto pojmu pro jeho značnou (na theorii svazů nezávislou) samostatnou důležitost.

Nejprve, co rozumíme uspořádáním, t. j. úplným uspořádáním nějakého souboru nějakých prvků. (Přívlastek „úplný" se však vynechává a rozumí se sám sebou.)

Čtenáři je dobře známo, že celá, racionální, reálná čísla jsou přirozeným způsobem uspořádána dle velikosti, t. j. o každých dvou takových číslech x a y lze říci, zda je $x < y$ (x menší než y čili na číselné ose leží x před y) anebo zda je naopak $y < x$, y před x.

Uspořádání čísel podle velikosti splňuje tyto tři zřejmé zásady (principy):

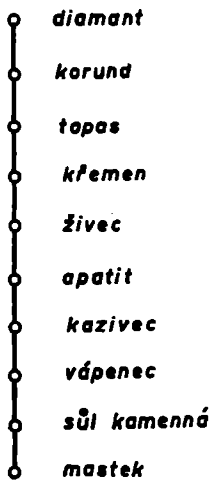
I. *Žádný prvek* (*číslo*) *a není sám před sebou, t. j. nikdy není* $a < a$. (Zásada irreflexivity.)

II. *Jsou-li a, b dva různé prvky* (*čísla*), *pak vždy platí jedna* *a jen jedna z možností: Buďto je* $a < b$ *(a menší než b), anebo je* $b < a$ *(b menší než a, b před a).* (Zásada dichotomie.)

III. *Jestliže a je menší než b (a před b) a b menší než c (b před c), pak je a menší než c (a je před c). (Jestliže* $a < b$, $b < c$ *potom* $a < c$.) (Zásada transitivity.)

Avšak nejsou to jen čísla nebo předměty (prvky) číselné povahy (jako ceny, velikosti a p.), které je možno uspořádat, to jest porovnat dle jistého vztahu, který můžeme obecně vyslovit rčením „*x* je před *y*“ (či „*x* je pod *y*“), či „*x* je menší než *y*“ a který splňuje vytčené zásady I, II, III.

Tak na př. kupující, který si vybírá z jednoho druhu výrobků, hledí si výrobky (úplně) uspořádat podle jakosti tak, aby se mohl rozhodnout pro lepší z kterýchkoli dvou výrobků. Patrně budou při takovém (úplném, dle předpokladu) uspořádání výrobků dle jakosti splněny zásady I, II, III.



Obr. 7.

Jiný příklad na „kvalitativní“ uspořádání: Při hrubém a pro účely mineralogie postačujícím způsobu posuzování tvrdosti nerostů prohlašujeme za tvrdší ten ze dvou nerostů, kterým lze učinit vryp do druhého. (Dospíváme tak, jak známo, k deseti Mohsovým stupňům tvrdosti, to jest k deseti typům nerostů ve smyslu tvrdosti, viz obr. 7.

Ještě jiný příklad na „kvalitativní“ uspořádání (či lépe na jednoznačnou uspořadatelnost) dává vztah subordinace v jakékoli části armády. Jak známo, musí být vždy možno jednoznačně určit (ve smyslu služebních předpisů), který z příslušníků uvažované části armády má velet ostatním, který se má ujmout velení po něm, který opět po tomto—

atd. — takže (zvláště za bojové situace) musí být vlastně předem určeno (úplné) uspořádání ve smyslu vztahu „x je (bude) podřízen y“ na místě vztahu „x je menší než y“. Opět jsou tu (pro vztah subordinace v armádě) splněny zásady I, II, III uvedené shora tak, jak byly vzaty z uspořádání čísel dle velikosti (to, že subordinační uspořádání je úplné, splňujíc vytčené tři zásady, je právě nutnou podmínkou akceschopnosti jakékoli části armády za jakékoli situace).

Vezměme naproti tomu v úvahu subordinační pořádek některého úřadu. Tu shledáváme jednak, že vztah „X je služebně podřízen Y“ sice celkem vzato splňuje zásadu I (princip irreflexivity), t. zn. úřadní instance (zpravidla) nenařizuje sama sobě. Dále vidíme, že je vcelku dosti dobře splněna zásada III, t. j. jestliže instance X podléhá služebně instanci Y a instance Y opět služebně podléhá instanci Z, pak již je jasno, že instance X služebně podléhá instanci Z. Naproti tomu nebývá splněna zásada dichotomie II. To jest, v povaze úřadu je, že ze dvou instancí Xa Y, byť kompetentních v téže záležitosti, zdaleka nikoli vždy jedna a jen jedna je úředně podřízena druhé. Nejde tedy v případě vztahu „X úředně podléhá Y“ o vztah (úplného) uspořádání. Nicméně lze říci, že je (alespoň theoreticky) uznávána na místě zásady dichotomie II slabší zásada.

II*. *Je vyloučeno, aby z daných dvou prvků (různých úředních instancí) X a Y současně prvek (instance) X byl pod (úředně podléhala instanci) Y a prvek (instance) Y byl pod (úředně podléhala instanci) X.* (T. zv. zásada asymetrie.)

(T. zn., že se však může (na rozdíl od zásady II) stát, že ze dvou různých instancí ani první nepodléhá druhé, ani druhá nepodléhá první.)

Jsou-li v nějakém souboru jakýchkoli předmětů (prvků) splněny zásady I (irreflexivita), II* (asymetrie) a III (transitivita) pro nějaký pořádající vztah, pak říkáme, že daný soubor předmětů je tímto vztahem částečně uspořádán. Tak na př. tedy úřední instance (daného úřadu) tvoří částečně uspořádaný soubor ve smyslu částečného uspořádání dle vztahu úřední podřízenosti.

Příkladů na částečně uspořádané soubory jsou v denním životě spousty. Obecně každý komparativ (2. stupeň přívlastku) nám částečně uspořádává ten soubor věcí, na něž se daný přívlastek vztahuje. (Tak na př. lidé tvoří částečně uspořádaný soubor dle vztahu „X je moudřejší než Y“, kovy jsou částečně uspořádány dle vztahu „vzácnější“, úředníci dle vztahu „schopnější“, dívky dle vztahu „hezčí“, atp.) Příkladem zvláštního vztahu částečného uspořádání je vztah „x je potomkem y“.

Uspořádání (úplné) konečně mnoha předmětů (a ve zvláštních případech i nekonečně mnoha předmětů) lze si představit a graficky (geometricky) znázornit uspořádáním předmětům odpovídajících bodů na přímce (ose), na níž je vyznačen směr. (Viz na př. uspořádání typů tvrdosti nerostů na obr. 7.)

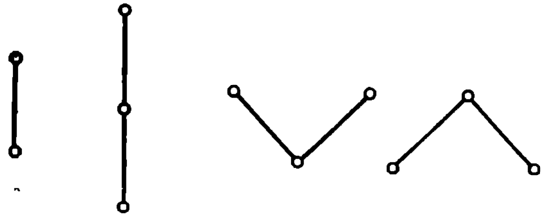
Podobně možno si představit geometricky i částečně uspořádaný soubor.[34] Místo jedné přímky (z důvodů přehlednosti svislé osy) nastupuje však celá soustava šikmých úseček, jejichž koncové body představují jednotlivé předměty uvažovaného částečně uspořádaného souboru. Okolnost, že předmět x je ve smyslu daného čásstčného uspořádání „před“ (či raději „pod“) předmětem y, stručně píšeme (a budeme psát) jako $x \subset y$. Tato okolnost je vyznačena prostě tím, že z bodu, představujícího předmět x, lze vést stále stoupající lomenou čáru do bodu, představujícího předmět y. (Při tom není nikterak vyloučeno, že se jednotlivé úsečky kříží.)

Čtenář se sám snadno přesvědčí, že když je obráceně dán graf, jehož nejjednoduššími součástmi jsou šikmo položené úsečky a jejich koncové body, pak tento graf vystihuje jakési částečné uspořádání; předměty budou koncové body úseček a pro dva různé body a, b lze definovat: Je $a \subset b$ tehdy a jen

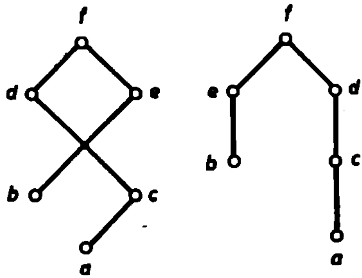
[34] Grafickému (geometrickému) znázornění částečného uspořádání se někdy říká Hasseovy diagramy.

tehdy, když z bodu a vede do bodu b stále stoupající lomená čára. (Prosté příklady jsou na obr. 9, jsou to veškery typy částečného uspořádání (t. zv. „souvislého“) souboru o 2 a 3 prvcích.)

Aby se předešlo možným nedorozuměním, je dobře ke grafickému znázornění částečného uspořádání připojit několik vysvětlujících poznámek, určených zvláště pro kritického čtenáře.



Obr. 9.



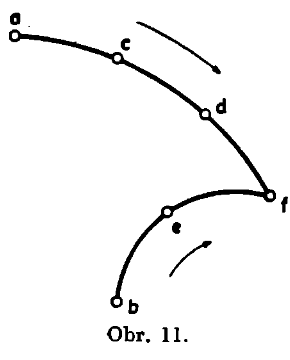
Obr. 10.

Především nechť si čtenář uvědomí, že slovní obrat pro vztah $x \subset y$ částečného uspořádání „x je pod y“ (kde x a y jsou body, znázorňující (vzájemně jednoznačně) předměty z jistého částečně uspořádaného souboru) znamená méně, než to, co znamená doslova. To jest, bod a našeho grafu může ve skutečnosti při jistém způsobu nakreslení grafu být v bezprostředně názorném smyslu pod (a při jiném grafickém znázornění téhož částečného uspořádání nad) bodem b, aniž je $a \subset b$ (anebo $b \subset a$), to jest, aniž z jednoho bodu do druhého vedle stoupající lomená čára.

Za druhé je třeba si uvědomit, že jedno a totéž částečné uspořádání lze znázornit značně různými a vzájemně nepodobnými grafy. (Viz obr. 10.)

Abychom odstranili jeden zbytečný pramen této mnohoznačnosti v grafickém znázorňování částečně uspořádaných (konečných) souborů, vyloučíme především grafy, kde jsou některé úsečky zbytečné. Toho docílíme stanovením, že úsečkami lze spojovat body pouze „bezprostředně nad sebou" jsoucí, t. j. takové a jen takové body a a b budou spojeny *stoupající úsečkou*, pro něž je $a \subset b$ a k nimž neexistuje další c tak, že $a \subset c$, $c \subset b$. Ale ještě i po tomto stanovení zůstává v grafickém znázorňování částečného uspořádání jednak mnoho libovůle a jednak mnoho neuspokojivého. Neuspokojivé je především to, že není jasno, nakolik jsou podstatné při geometrickém znázornění částečného uspořádání oba užité pojmy „nad" a „stoupá", které vlastně (při přesné formulaci) patří do *analytické geometrie*.

Tuto nejednoznačnost a neuspokojivost lze v jistém smyslu úplně odstranit. Ukazuje se, že na geometrickém znázornění částečného uspořádání jsou charakteristické ony velmi obecné geometrické vlastnosti grafu, jež jsou předměty t. zv. *kombinatorické topologie*, o kteréžto důležité moderní matematické theorii byla zmínka na konci části o grupách. Úlohou grafu konečného částečně uspořádaného souboru je jen to, že představuje jistý systém pevným způsobem orientovaných cest (srov. výklad na konci části o grupách), při čemž je lhostejno, zda cesty (z bodu do bodu) stoupají, či klesají a zda jsou rovné, lomené či křivé (viz obr. 11). Podstatné je jen to, z kterého bodu do kterého bodu se lze dostat po souvislé a kladně probíhané cestě, procházíme-li vždy z bodu do sousedního bodu ve smyslu, který byl předem určen jako kladný, t. j. ve smyslu od x k y, kde $x \subset y$. Tyto souvislosti zůstávají právě zachovány, podrobíme-li kterýkoli graf daného, částečně uspořádaného, souboru jakékoli deformaci, jen když nic nepřetrhneme a nic, co bylo odděleno, neslepíme. (Čtenář si po způsobu z konce 1. části může představit graf částečného uspořádání nakreslen na gumové podložce.) Je tedy pojem geometrického znázornění částečného uspořádání pojmem kombinatoricko-topologickým, o němž v rámci této knížky nemůžeme říci více, než těchto několik poznámek. Dodejme ještě k tomu, že kombinatoricko-topologický ráz znázornění částečného uspořádání grafem má za následek existenci zajímavých souvislostí mezi pojmem



Obr. 11.

grupy (totiž grupy cest, viz konec 1. části) a pojmem částečného uspořádání.

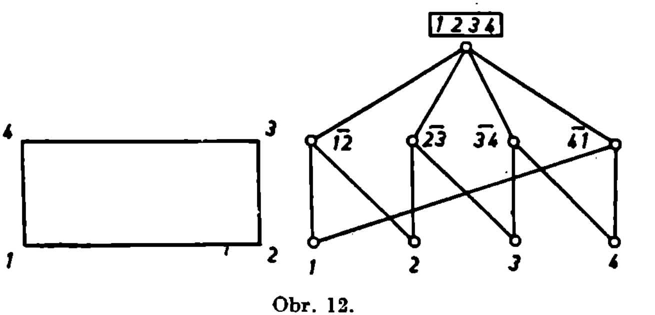
Pokud jde o samo praktické provedení grafu částečného uspořádání (konečně mnoha předmětů), je pochopitelné, že se mu snažíme dát tvar dle možnosti geometricky pravidelný, úměrný a přehledný. To jsou však požadavky účelnosti, po případě úhlednosti výkresu, které nejsou nikterak podstatně spojeny s matematickou strukturou samotného daného částečného uspořádání.

Podotkněme ještě, že shora zmíněné souvislosti theorie částečně uspořádaných souborů s kombinatorickou topologií (tato souvislost je dána zmíněnou topologickou podstatou geometrického znázornění konečného částečně uspořádaného souboru) nejsou ani jediné ani nejdůležitější. Existuje ještě docela jiná souvislost topologie s částečným uspořádáním — a to tato:

V kombinatorické topologii se často setkáváme s charakteristickým částečným uspořádáním, které je založeno na vztahu „x leží na hranici y“.

Důležitost tohoto vztahu pro vystižení topologické podstaty složitějšího geometrického útvaru je snadno vidět. Je totiž zřejmo, že při spojitých deformacích geometrického útvaru zůstává vztah „x leží na hranici y“ (pro součásti geometrického útvaru) zachován. Na tomto místě se musíme spokojit jen s touto hrubou zmínkou. Vztah částečného uspořádání „x leží v hranici y“ je pro případ obdélníka naznačen na obr. 12 Hasseho diagramem.

Dříve, než přejdeme k výkladu pojmu svazu, je výhodné zavést ještě jeden pojem a označení. Podobně jako při (úplném) uspořádání čísel podle velikosti zavádíme t. zv. *neostré nerovniny* $a \leqq b$ (čti: a menší nebo rovno b, připouštíme tedy



Obr. 12.

i rovnost), tak i při částečném uspořádání je často vhodné spojovat obě možnosti $a \subset b$ (a pod b) a $a = b$ (a rovno b) v jediném vztahu $a \subseteq b$, který čtěme: b obsahuje a (a je obsaženo v b), či obšírněji: a je pod, nebo rovno b. Vztah $\subseteq$ se nazývá polouspořádáním.

Je jasné, že vztah polouspořádání $\subseteq$ („pod nebo rovno") splňuje poněkud jiné charakteristické podmínky, než jsou ty, které splňuje vztah „ostrého částečného uspořádání" $\subset$.

Místo zásady irreflexivity I. vztahu $\subset$ nastupuje naopak zásada reflexivity vztahu $\subseteq$. Platí totiž zřejmě

I'. *Jest $x \subseteq x$ pro každé x.* (O každém x platí, že je menší nebo rovno, než x, protože je dokonce vždy x rovno x.)

Místo zásady asymetrie platí tato zásada ztotožňování:

II'. *Jestliže je $x \subseteq y$ i $y \subseteq x$, pak je $x = y$.* (Jestliže je zároveň x pod nebo rovno y i y pod nebo rovno x, pak je nutně x rovno y.)

Třetí zásada je zásada transitivity:

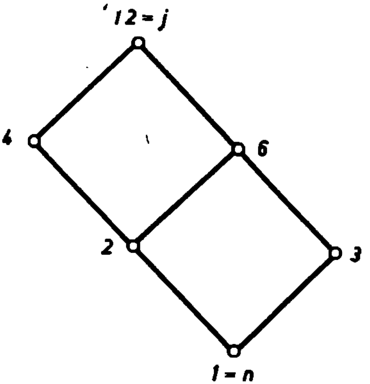
III. *Když je $x \subseteq y$ a $y \subseteq z$, pak je již $x \subseteq z$* (platí beze změny pro vztah $\subseteq$ stejně, jako pro vztah $\subset$).

Je snadné zjistit, že každý dvojčlenný vztah, splňující I', II', III, je částečným uspořádáním, v němž je připuštěna rovnost. (Viz cvič. 2.)

To, co víme z dosavadního výkladu o pojmech částečného uspořádání a polouspořádání, nám stačí k tomu, abychom bez dalších průtahů přešli k pojmu svazu.

Vyjděme opět z dostatečně jednoduchého příkladu svazu, který je každému dobře znám. Vezměme v úvahu vztah: x je dělitelem y — v souboru všech kladných celých dělitelů čísla 12 (obr. 13). Tento vztah je zřejmě polouspořádáním, které vzniklo z částečného uspořádání podle vztahu: x je vlastním dělitelem čísla y (při čemž připouštíme za vlastního dělitele čísla y i číslo $x = 1$ pro $y \neq 1$) (viz obr. 13). Toto polouspořádání $\subseteq$ (kde tedy $x \subseteq y$ značí, že x dělí y), má tuto významnou vlastnost: Ke každým dvěma číslům (lhostejno, zda různým, či stejným) x a y (z našeho souboru, t. j. x i y jsou dělitelé čísla 12) existuje, jak známo, jednak jejich *nejmenší společný násobek*, který označme jako $x \cup y$, a jednak jejich *největší společný dělitel*, který označme jako $x \cap y$ (což obojí jsou ovšem. opět čísla z našeho souboru všech celých kladných dělitelů čísla 12). (Tak na př. píšeme: $4 \cap 6 = 2$, $4 \cup 6 = 12$.)

Nejmenší společný násobek $x \cup y$ čísel x, y splňuje tyto dva charakteristické požadavky:



Obr. 13.

(I $\cup$): *Jest* $x \subseteq x \cup y$, $y \subseteq x \cup y$. (T. j. nejmenší společný násobek, číslo $x \cup y$ je společně dělitelno číslem x i číslem y.)

(II $\cup$): *Když je* $x \subseteq z$ *a* $y \subseteq z$, *potom je už* $x \cup y \subseteq z$. (T. j. každý společný násobek čísel x a y má již za dělitele nejmenší společný násobek čísel x a y — číslo $x \cup y$.)

Zcela podobné jsou odpovídající požadavky, které jsou charakteristické pro největší společný dělitel $x \cap y$ čísel x, y:

(I $\cap$): *Jest* $x \cap y \subseteq x$, $x \cap y \subseteq y$. (T. j $x \cap y$ je společným dělitelem čísel x, y.)

(II $\cap$): *Když je $z \subseteq x$ a $z \subseteq y$, potom je $z \subseteq x \cap y$.* (T. j. každý společný dělitel čísel x, y je dělitelem největšího společného dělitele čísel x a y.)

Definice svazu:

Je-li nyní obecně předložen nějaký částečně uspořádaný soubor S, pak se může (ale nemusí ovšem, viz uvedené příklady částečného uspořádání) stát, že ke kterékoli dvojici x, y předmětů, či — jak budeme raději říkat — prvků ze souboru S existuje jednak prvek $x \cup y$ a jednak prvek $x \cap y$ — oba opět ze souboru S — tak, že jsou splněny požadavky (I $\cup$), (II $\cup$), (I $\cap$), (II $\cap$). V takovém případě právě říkáme (definujeme), že dané částečné uspořádání souboru S je svazové, nebo stručněji, že soubor S tvoří svaz.

Takový prvek $x \cup y$, který splňuje podmínky (I $\cup$) a (II $\cup$) bychom mohli nazývat nejmenším společným nadprvkem k prvkům x, y. Snadno nahlížíme, že takový nejmenší společný nadprvek (pokud existuje) je jen jeden jediný (ke dvěma daným prvkům x a y). Místo obšírného a nepříliš pěkného názvu nejmenší společný nadprvek nazýváme raději prvek $x \cup y$ spojením prvků x, y.

Podobně prvek $x \cap y$, který splňuje podmínky (I $\cap$) a (II $\cap$), bychom mohli nazývat největším společným podprvkem prvků x, y. (Je opět zřejmé, že takový prvek může být jen jeden.) Místo tohoto obšírného a nepěkného názvu dáváme přednost názvu průsek prvků x, y pro prvek $x \cap y$. Pro vhodnost tohoto názvosloví svědčí i jiné důvody, jež budou zřejmé, až se ukáže, že běžné geometrické spojování a protínání jakožto úkony, jimž podrobujeme přímky, body a roviny, jsou zvláštním druhem svazového spojování a protínání ve smyslu právě uvedených podmínek (I $\cup$), (II $\cup$), (I $\cap$), (II $\cap$).

Abychom se předběžně a zhruba orientovali o rozmanitosti způsobů, jimiž vystupuje pojem svazu v různých oblastech matematiky, připojme k výchozímu příkladu svazu, daného

$\left\{\begin{matrix}\text{nejmenším}\\ \text{největším}\end{matrix}\right\}$ společným $\left\{\begin{matrix}\text{násobkem}\\ \text{dělitelem}\end{matrix}\right\}$ tři další typické příklady svazů.

Příklad 1.

Vraťme se k pojmu (úplného) uspořádání. Je-li S libovolný uspořádaný soubor — na př. soubor racionálních čísel, kde $x < y$ značí x je menší, než y, pak položme:

za $x \cup y$ větší z čísel x, y — jsou-li to čísla různá — a číslo x, je-li $x = y$; podobně:

za $x \cap y$ menší z čísel x, y — jsou-li to čísla různá — a číslo x, je-li $x = y$.

Snadno je vidět, že se takto na každý uspořádaný soubor můžeme dívat jako na svaz, vzhledem ke vztahu polouspořádání $x \leq y$ (menší, nebo roven). (Jsou splněny podmínky I, II*, III, pro vztah $<$ a ($\mathrm{I}\cup$), ($\mathrm{I}\cap$), ($\mathrm{II}\cup$), ($\mathrm{II}\cap$) pro spojení a průnik.)

Můžeme tedy říci: Svazové částečné uspořádání je zvláštním případem obecného částečného uspořádání. S druhé strany je však (úplné) uspořádání zvláštním druhem svazového částečného uspořádání. (Zavádí tedy svazové částečné uspořádání v jistém smyslu poněkud „lepší pořádek“ než pouhé libovolné částečné uspořádání, ale zase „horší pořádek“, než (úplné) uspořádání.)

Je zřejmo, že svazy — podobně jako grupy — mohou být konečné, t. j. mohou obsahovat konečně mnoho prvků, jako na př. uvedený svaz všech dělitelů čísla 12 (obr. 13), nebo mohou být nekonečné, jako na př. souhrn všech celých kladných čísel vzhledem k svazovému polouspořádání podle vztahu: x je dělitelem y.

Příklad 2.

Naznačme (zatím jen neúplně a zběžně) onen druh (nekonečných) svazů, které se vyskytují v geometrii bodů, přímek, rovin (a jejich vícerozměrných zobecnění), tedy onen důležitý druh svazů, v nichž úkony (svazového) protínání a spojování mají (alespoň zčásti) svůj bezprostřední, geometrický význam.

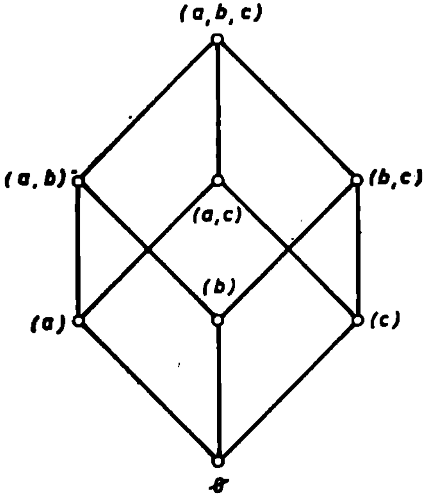
Za prvky svazu S považujeme: Body, přímky, roviny v prostoru, k nimž pro úplnost nutno přidat ještě celý prostor a t. zv. prázdnou část prostoru. (Hned uvidíme, v čem spočívá úloha přidaných „útvarů" a proč je nutno počítat i s „prázdným útvarem".) Za polouspořádání přijmeme vztah:

„x leží na y", který patrně splňuje podmínky I', II', III'. (x, y mohou být: Body, přímky, roviny i celý prostor, resp. jeho prázdná část.) Pak nalézáme na př., že svazovým spojením dvou různých bodů je přímka, která tyto body spojuje ve smyslu geometrickém; dále, že spojením přímky s bodem mimo ni (ve smyslu svazu) je rovina, na níž leží daný bod a daná přímka; dále, že spojením bodu s rovinou, která jej neobsahuje, je celý prostor (který jsme proto zařadili mezi prvky svazu S); že průsekem dvou protínajících se přímek je jejich průsečík. Protože jsme mezi prvky svazu S počítali i prázdnou část, kterou značme $\emptyset$, prostoru, můžeme však protínání podrobit cokoli. Tak průsekem dvou různých bodů je prázdná část prostoru a stejně je jí i průsek přímky s bodem mimo ni ležícím. Průsekem roviny s přímkou ji protínající je průsečík této přímky s touto rovinou. Průsekem dvou protínajících se rovin je jejich průsečnice, atp.

Příklad 3.

Konečně si uveďme ještě jeden příklad konečného svazu, který je representantem důležitého druhu svazů, t. zv. Booleových algeber, jimž budeme v dalším věnovat značnou pozornost (pro aplikace, které tento druh svazů má i přímo v technické praxi). (Obr. 14.)

Z daného souboru n předmětů — na př. pro jednoduchost nechť $n = 3$ a předměty jsou a, b, c — si mysleme utvořeny všechny skupiny, které lze z daných n ($= 3$) předmětů vybrat — rozumí se bez opakování a bez ohledu na pořadí. *Prvky* našeho svazu B budou tedy *částečné soubory*, či prostě *části* souboru (a, b, c) — při čemž za část považujeme vždy i celý soubor i t. zv. prázdný soubor (prázdnou část), neobsahující žádný předmět, t. j. obsahující 0 předmětů (prázdný soubor budeme vždy značit znakem $\emptyset$).



Obr. 14.

Za vztah svazového polouspořádání $\subseteq$ vezmeme vztah: x je částí y, při čemž písmena x a y značí části našeho daného souboru. (Přesněji: $x \subseteq y$ značí, že každý předmět z x se nalézá i v y.)[35]

Pak spojením $x \cup y$ dvou částí x, y je patrně ona část, která shrnuje předměty, obsažené v x s předměty, obsaženými v y, v jeden soubor. Průsekem $x \cap y$ dvou částí x, y je ta část obsahující právě a jen ty předměty, které jsou obsaženy

[35] Tento typický druh částečného uspořádání má jméno množinová inkluse; snadno je vidět, že splňuje zásady I′, II′, III.

jak v x tak i v y. (Tak na př. je-li $x = (a, c)$, $y = (b, c)$, pak $x \cup y = (a, b, c)$, $x \cap y = (c)$.) Doporučuji opět čtenáři, aby se sám důkladně přesvědčil, že jsou splněny požadavky I′, II′, III — jakož i podmínky (I $\cup$), (II $\cup$), (I $\cap$), (II $\cap$) (viz grafické zobrazení svazu B všech částí souboru o 3 předmětech na obr. 14). (Čtenář, který zná základy theorie množin z knížky J. Pospíšila: *Nekonečno v matematice* (sb. Cesta k vědění), ví, že se poslednímu příkladu svazu říká též t. zv. systém všech podmnožin konečné množiny o n ($= 3$) prvcích. V naší knížce se však zpravidla vyhýbám názvosloví theorie množin, nahrazuji slovo *množina* slovem *soubor* a slovo *prvek* slovem *předmět*, kdežto slovo prvek je vyhraženo pro prvky svazu, po případě grupy.)

Cvičení k 2,2.

1. Nakreslete si Hasseho diagram částečného subordinačního uspořádání na vašem pracovišti.

2.*Nechť $x \precsim y$ značí obecně, že mezi nějakými předměty z jistého souboru S, označenými jako x a y, je jistý vztah (x a y nemusí být nutně různé předměty!). Dokažte, že jestliže platí:

I′: $x \precsim x$ (zásada reflexivity);

II′: když je $x \precsim y$ a $y \precsim x$, pak je $x = y$ (zásada ztotožňování);

III: když je $x \precsim y$ a $y \precsim z$, pak je $x \precsim z$ (zásada transitivity),

potom je takto již udáno jediné částečné uspořádání $\subset$ souboru S tak, že můžeme říci: Jest $x \precsim y$ tehdy a jen tehdy, když je $x \subseteq y$.

3. Dokažte, že požadavky (I $\cup$), (II $\cup$) může splňovat jen jeden prvek $x \cup y$. Totéž pro (I $\cap$), (II $\cap$) a prvek $x \cap y$.

4.*Sestavte graf částečného uspořádání podle vztahu „x leží v hranici y“ pro a) úsečku, b) trojúhelník, c) čtyrstěn. Tvoří tato částečná uspořádání svazy? Jestliže nikoli — co k tomu chybí?

5.*Dokažte: Budiž S svaz. Nechť platí, že pro každý pár prvků x, y z S je spojení $x \cup y$ vždy rovno jednomu z obou prvků x a y (nebo oběma, jde-li vlastně o týž prvek (když $x = y$)). Pak S je úplně uspořádaný soubor — svazové částečné uspořádání je ve skutečnosti prostě uspořádáním. Totéž pro průnik na místě spojení. (Návod: Definuj $x < y$, když $x \cup y = y$, $x \neq y$. Dokaž I, II, III.)

6.*Dokažte, že platí

$$a \cup b = b,$$

když a jen když

$$a \cap b = a$$

přímo z definičních požadavků (I $\cup$), (II $\cup$), (I $\cap$), (II $\cap$).