O grupách a svazech

2.1 Povšechný úvod

Část 2.

THEORIE SVAZŮ.

2,1. POVŠECHNÝ ÚVOD.

Nejprve několik slov úvodem k této druhé části knížky.

Výklad některých nejzákladnějších pojmů theorie svazů (a jejich aplikací) je pojat jako předchozí výklad počátků theorie grup, jenom je ještě více omezen úzkým výběrem látky a snad (místy) je *abstraktnější*. Pokud jde o stručnost a *abstraktnost*, odůvodňuji ji předpokladem, že čtenář, který sledoval výklad o grupách, je připraven na takový myšlenkový postup.

Jinak ovšem tato část knížky, pojednávající o *svazech* (svaz — rusky a polsky: *struktura*, angl. a franc.: *lattice*, něm.: *Verband*) je natolik samostatná, že ji lze číst i bez znalosti předchozí části pojednávající o grupách. Nicméně tento postup nedoporučuji, protože se budu častěji odvolávat na analogie a rozdíly mezi svazy a grupami.

Načrtněme si předem pojem svazu v nejhrubších rysech za pomoci takového hrubého porovnání theorie grup s theorií svazů, abychom si učinili předem letmý obraz o neznámé zemi dříve, než do ní vstoupíme.

Na pojmu grupy jsme se seznámili s velmi rozšířeným druhem úkonu, zvaného obecně (grupové) násobení. Tento druh úkonu byl vymezen čtyřmi axiomy theorie grup, které musely být splněny, aby se daný úkon právě mohl nazývat grupovým násobením a aby matematické předměty, na nichž se tento úkon provádí, se mohly jmenovat prvky (elementy) grupy. Název „násobení" pro takový grupový úkon (kterým však může být i běžné sčítání čísel) byl zvolen m. j. proto, že násobení číselných matic je, jak jsme si ukázali, prototypem obecného grupového násobení.

V posledních asi dvaceti letech byla v matematice seznána podstata a důležitost jisté dvojice na sebe vázaných úkonů povahy méně aritmetické (číselné) a spíše snad geometrické, které je ovládáno poněkud jinou zákonitostí, než je zákonitost, vyjádřená čtyřmi axiomy theorie grup.

Zvláštním a důležitým případem tohoto dvojího úkonu je totiž (geometrické) spojování a protínání prováděné na bodech, přímkách, rovinách a po případě i na jejich vícerozměrných zobecněních.

Užíváme tedy v theorii svazů geometrického názvosloví o spojení a průseku i v abstraktním smyslu, hovoříce o spojování a protínání i tam, kde o bezprostředně geometrické spojování a protínání nejde — podobně jako jsme hovořili o násobení v grupě, jejímiž prvky nikterak nebyla čísla. S takovým dalekosáhle zobecněným spojováním a protínáním, jakožto se dvěma úkony, které jsou spolu nerozlučně spojeny, máme co činit vždy, když jsou splněny (v souhrnu spojových a protínaných předmětů) jisté charakteristické axiomy, t. zv. axiomy theorie svazů, či stručněji svazové axiomy. Tyto axiomy, které si brzy vysvětlíme, jsou zčásti podobné axiomům theorie grup, zčásti jsou však úplně jiného rázu.

Pro souhrn matematických předmětů — opět t. zv. prvků, které lze ve smyslu zmíněných axiomů theorie svazů bez omezení spojovat a protínat, užíváme prostě názvu svaz, podobně jako jsme obecně rozuměli pod slovem grupa souhrn jakýchkoli předmětů, které bylo lze mezi sebou „násobit“ ve smyslu axiomů theorie grup.

Základy abstraktně-algebraického pojetí theorie svazů položil německý matematik R. Dedekind na počátku tohoto století. Speciální druh svazů, t. zv. Booleovy algebry, však poznal a studoval již v 1. pol. 19. stol. anglický matematik G. Boole. Dedekindovy práce upadly v zapomenutí až do desítiletí 1930—1940. Od té doby se theorie svazů neobyčejně rozrostla do šířky i do hloubky. Ukázalo se, že pojem svazu se vyskytuje v mnoha zdánlivě odlehlých odvětvích matematiky a má užití nejen v různých matematických theoriích samotných, nýbrž přímo i v elektrotechnické a statistické praxi. Dá se říci, že úloha theorie svazů v současné matematice je podobná úloze theorie grup (i když je menší; ostatně mezi oběma theoriemi jsou i četné vnitřní souvislosti). To vše jsou důvody, proč jsem považoval za vhodné napsat uvedení do nejzákladnějších pojmů teorie svazů do této knížky, a umístit je právě za část, pojednávající o grupách.

2,2. ČÁSTEČNÉ USPOŘÁDÁNÍ A POLOUSPOŘÁDÁNÍ. POJEM SVAZU NA ZÁKLADĚ POJMU POLOUSPOŘÁDÁNÍ.

Přirozená cesta, kterou jsme zvolili, abychom se dostali k obecnému pojmu grupy, vyšla z pojmu (geometrické) pravidelnosti, tedy z pojmu, jenž je velmi obecný a každému povědomý.

Přirozeným východiskem cesty k obecnému pojmu svazu je pojem snad ještě názornější a každému dobře známý. Je to pojem částečného uspořádání. Zdržíme se poněkud u tohoto pojmu pro jeho značnou (na theorii svazů nezávislou) samostatnou důležitost.

Nejprve, co rozumíme uspořádáním, t. j. úplným uspořádáním nějakého souboru nějakých prvků. (Přívlastek „úplný" se však vynechává a rozumí se sám sebou.)

Čtenáři je dobře známo, že celá, racionální, reálná čísla jsou přirozeným způsobem uspořádána dle velikosti, t. j. o každých dvou takových číslech x a y lze říci, zda je $x < y$ (x menší než y čili na číselné ose leží x před y) anebo zda je naopak $y < x$, y před x.

Uspořádání čísel podle velikosti splňuje tyto tři zřejmé zásady (principy):

I. *Žádný prvek (číslo) a není sám před sebou, t. j. nikdy není* $a < a$. (Zásada irreflexivity.)

II. *Jsou-li a, b dva různé prvky (čísla), pak vždy platí jedna*