5. Nazveme sudou permutací π' všech přirozených čísel 1, 2, ... každou sudou permutaci π nějakých n čísel, která byla doplněna předpisem $\pi'(n+1) = n+1$, $\pi'(n+2) = n+2$, ... atd. bez omezení. (Zatím co $\pi'(k) = \pi(k)$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$.) Je tedy π' předpis, přiřazující každému přirozenému číslu přesně jedno přirozené číslo, při čemž jen konečně mnoho čísel obdrží tímto přiřazením číslo od daného čísla různé; (sudá permutace všech přirozených čísel nechává stát skoro všechna čísla, až na konečný počet výjimek; tato výjimečná čísla jsou podrobena jisté sudé permutaci v obvyklém smyslu).

Dokažte, že sudé permutace přirozených čísel tvoří (nekonečnou nekomutativní) grupu $\mathfrak{A}$ při definici násobení

$$[\pi' \,.\, \varrho'](r) = \pi'(\varrho'(r)) \text{ pro } r = 1, 2, \ldots$$

Dokažte, že grupa $\mathfrak{A}$ obsahuje podgrupy $\mathfrak{A}'_n$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ vesměs isomorfní s grupami $\mathfrak{A}_n$ všech sudých permutací prvních n čísel 1, 2, ..., n; dále dokažte, že každý prvek z grupy $\mathfrak{A}$ (sudá permutace přirozených čísel) je obsažen v některé z podgrup $\mathfrak{A}'_n$.

6.*Dokažte, že nekonečná grupa $\mathfrak{A}$ neobsahuje vlastní normální podgrupu čili že je *příkladem nekonečné jednoduché grupy*. (*Návod*: Kdyby $\mathfrak{N}$ byla normální podgrupa v $\mathfrak{A}$, pak průnik $\mathfrak{A}'_n \cap \mathfrak{A}$ by byla normální podgrupa v podgrupě $\mathfrak{A}'_n$ (jak víme z 2.věty o isomorfii). Následkem jednoduchosti podgrup $\mathfrak{A}'_n$ pro $n = 5, 6, 7, \ldots$ (dle cvič. 6) musí *buďto*: $\mathfrak{A}'_n \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{A}'_n$ čili $\mathfrak{A}'_n$ je podgrupou i v normální podgrupě $\mathfrak{N}$, *anebo*: $\mathfrak{A}'_n \cap \mathfrak{N}$ obsahuje jen identickou permutaci (jednotku). Nastává-li *druhá* možnost pro všechna $n = 5, 6, 7$ pak snadno ukážete, že $\mathfrak{N}$ obsahuje jen jednotku. V *opačném* případě $\mathfrak{A}'_m \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{A}'_m$ pro jisté $m > 5$ zase snadno ukážete, že $\mathfrak{N}$ obsahuje každou podgrupu $\mathfrak{A}'_r$ pro $r > m$ a tedy že $\mathfrak{N}$ je rovna celé grupě $\mathfrak{A}$.)

7. Dokažte jednoduchost všech alternujících grup $\mathfrak{A}_n$ pro $n \neq 4$.

1,8. KOMPOSIČNÍ ŘADY. DIREKTNÍ ROZKLADY. p-GRUPY A SYLOWOVY PODGRUPY. GRUPY A TOPOLOGIE. ZÁVĚR.

Jedním z hlavních úkolů theorie grup, jak již bylo poznamenáno, je probádat, jak jsou grupy budovány ze svých podgrup. Jsou dva hlavní způsoby, kterými sledujeme jak podgrupy skládají grupu: t. zv. komposiční řada a t. zv. direktní rozklad grupy.

Oč běží při komposiční řadě?

Chceme-li alespoň hrubě přirovnat tvoření (klesající) komposiční řady podgrup k něčemu názornému, napadá nás obdoba s postupným vysunováním částí z částí při rozkládání nohy trubkového skládacího fotografického stativu: Nejprve se vysune z celku v něm obsažená co nejobjemnější část, z této části opět v ní obsažená co největší část — a to se opakuje tolikrát, až naposledy vysunutá trubková část v sobě již nemá další vysunovatelnou část, a až je jisto, že žádné dvě trubky již nejsou do sebe zasunuty.

V grupě se postupně vysunovanými částmi ovšem rozumějí podgrupy. Opravdu přehledná zákonitost se však při tom objevuje jen tehdy, když předpokládáme ještě, že „vysunovaná" podgrupa je vždy normální podgrupou (nikoli nutně v celé grupě, ale) v té podgrupě, z níž je právě vysunována.

Přistupme od podobenství k definici.

Mějme v grupě G jistý počet n podgrup $G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n$ tak, že jsou splněny tyto podmínky:

1. G_1 je celá grupa G, G_n je podgrupa (j), která se skládá jen z jednotky j grupy G.

2. G_{i+1} je netriviální normální podgrupa v G_i ($i = 1, 2, \ldots, n - 1$).

3. Neexistuje již žádná podgrupa G' v G, která by se dala vložit mezi některé dvě podgrupy G_i a G_{i+1} tak, aby G' byla netriviální normální podgrupou v G_i a sama aby obsahovala G_{i+1} jako netriviální normální podgrupu.

Potom říkáme, že podgrupy $G_1, G_2, G_3, \ldots, G$e tvoří t. zv. komposiční řadu grupy G. Počtu n podgrup v komposiční řadě vystupujících se říká délka komposiční řady. Podílovým grupám $\frac{G_i}{G_{i+1}}$ říkáme někdy faktory komposiční řady. Je důležité si povšimnout, že podmínku 3 lze právě tak dobře nahradit podmínkou

3'. Faktory komposiční řady, t. j. podílové grupy $\frac{G_i}{G_{i+1}}$, jsou jednoduché grupy. (Neboť každá normální podgrupa G' grupy G_i, obsahující grupu G_{i+1} dává vznik normální podgrupě $\frac{G'}{G_{i+1}}$ podílové grupy $\frac{G_i}{G_{i+1}}$ a obráceně).

Uveďme si alespoň dva příklady komposiční řady:

1. Symetrická grupa $\mathfrak{S}_n$ pro $n \geqq 5$ má komposiční řadu $\mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{A}_n$, (i) (i nechť je identická permutace, (i) grupa skládající se jen z i) délky 3, a dá se dokonce snadno ukázat, že jiných komposičních řad nemá. Alternující podgrupa $\mathfrak{A}_n$ v $\mathfrak{S}_n$ je tam totiž normální podgrupou, neboť se sudou permutací ϱ je i každá s touto konjugovaná permutace $\pi\varrho\pi^{-1}$ sudá — a podílová grupa $\frac{\mathfrak{S}_n}{\mathfrak{A}_n}$ je, jak víme, cyklická grupa řádu 2, tedy grupa jednoduchá; alternující grupa $\mathfrak{A}_n$ je pak sama již, jak víme z předchozího par., jednoduchá grupa.

2. Cyklická grupa řádu 12, skládající se z mocnin

$$a, a^2, a^3, \ldots, a^{12} = j$$

má komposiční řadu složenu ze 4 následujících cyklických podgrup; celá grupa (a) sama (tvořena všemi mocninami prvku a), podgrupa (a^3) vytvořená 4-mi různými mocninami $a^3, a^6, a^3, a^{12} = j$ prvku a^3, podgrupa (a^6) této podgrupy, tvořená dvěma různými mocninami $a^6, a^{12} = j$ prvku a^6 a konečně jednotková podgrupa (j).

Avšak to není jediná komposiční řada. Jiná komposiční řada se skládá z podgrup (a), (a^2) (a^6), (j) — při stejném vyznačování cyklických grup. (O normálnost podgrupy v předchozí podgrupě komposiční řady se zde netřeba starat — vzhledem ke komutativitě dané grupy.)

O komposičních řadách platí nyní pozoruhodná věta Jordan-Hölderova, která dalekosáhle odhaluje strukturní uložení podgrup v grupě:

Délka dvou různých komposičních řad téže grupy je táž. Co více, ke každému faktoru jedné komposiční řady existuje s ním isomorfní faktor druhé komposiční řady, takže faktory obou komposičních řad jsou až na isomorfismus a pořadí tytéž.[31]

(Povšimneme si, že Jordan-Hölderova věta sama nás nepoučuje o tom, zda daná grupa vůbec komposiční řadu má, ona jen vypovídá o vlastnostech komposičních řad v případě, že nějaké máme. Existence komposičních řad je zřejma v případě konečných grup. V zobecnění na nekonečné grupy je podstatné, zda jdeme od větších podgrup k menším (klesající komposiční řada) anebo naopak, od menších podgrup k větším (stoupající komposiční řada). Pro klesající komposiční řady i „nekonečné" (nemůžeme zde tento pojem blíže vysvětlovat, neboť bychom k tomu potřebovali pojem nekonečného pořadového čísla, viz Pospíšilovo „Nekonečno v matematice" ve sbírce „Cesta k vědění") věta Jordan-Hölderova platí, pro stoupající nikoli. Jordan-Hölderova věta má rovněž značný význam ve zmíněné již Galoisově theorii algebraických rovnic; v souvislosti s ní byla tato věta objevena koncem minulého století.

Od postupného rozkladu vysouváním podgrup rozkládané grupy se obraťme k jinému druhu rozkladu, který spíše připomíná rozklad přirozeného čísla v součin mocnin prvočísel: je to t. zv. direktní rozklad grupy.

Ze školy je, resp. má nám být dobře známo, že každé přirozené číslo se dá psát jednoznačně (až na pořadí činitelů) jako součin mocnin různých přirozených prvočísel $p_1, p_2, \ldots, \ldots, p_r$, tedy

---

[31] Francouz C. Jordan objevil rovnost délek komposičních řad téže grupy. Němec O. Hölder později objevil tvrzení o „rovnosti" (t. j. isomorfismu) faktorů. Dalekosáhlé zobecnění na komposiční řady „nekonečné" délky podal nedávno sovětský matematik A. Kuroš. Dalším vyšetřováním platnosti zobecněné Jordan-Höldérovy věty (ve svazech) se zabývá v přítomné době u nás prof. Vl. Kořínek.

$$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}.$$

Rozkládáme-li takto přirozené čitatele i jmenovatele kladných zlomků a připouštíme-li za mocnitele prvočísel i čísla záporná, pak napsaný rozklad v mocniny prvočísel platí i pro každé kladné číslo lomené a, tedy pro každý prvek násobící grupy kladných zlomků. Při tom všechny mocniny jednoho a téhož prvočísla p s kladnými i zápornými mocniteli $\dots, p^{-2}, p^{-1}, p^0 = j, p^1, p^2, \dots$ tvoří zřejmě normální (nekonečnou cyklickou) podgrupu v násobící grupě všech kladných zlomků. Každé kladné lomené číslo je tedy až na pořadí činitelů jednoznačně daným součinem činitelů vzatých z jednotlivých takových normálních podgrup, dvě takové normální různé podgrupy nemají více společných prvků (lomených čísel), než jen jednotku, a čísla (prvky), patřící do jedné takové normální podgrupy (tvořené všemi mocninami určitého prvočísla) se již takto dále rozkládat na nesoudělné činitele nedají.

Od takovéhoto pohledu na rozklad lomených čísel v součin mocnin prvočísel dojdeme snadno k příslušnému zobecnění na grupy vůbec, t. j. k pojmu direktního rozkladu grupy v direktně nerozložitelné podgrupy:

Budiž G nějaká grupa. Může se stát, že existují netriviální normální podgrupy $G_1, G_2, \dots$, grupy G tak, že každý prvek g z grupy G se dá až na pořadí činitelů *jediným způsobem* psát jako součin konečného počtu činitelů $g = g_1 \cdot g_2 \dots g_n$, kde činitel g_i ($i == 1, 2, \dots$) patří do normální podgrupy G_i.

Říkáme, že tím je dán direktní rozklad grupy G a píšeme

$$G = G_1 \times G_2 \times \dots$$

Normální podgrupy G_i se pak jmenují direktní faktory (direktního) rozkladu. Jestliže se tyto direktní faktory G_i samy již nedají stejným direktním způsobem rozložit, říkáme, že jsou to (direktně) nerozložitelné (ireducibilní) grupy. (Pozor, nerozložitelnost je tedy něco jiného (pro grupy), než jednoduchost; jednoduchá grupa je jistě nerozložitelná, ne vždy však obráceně, jak je vidět na nekonečné cyklické grupě: Ta je direktně nerozložitelná, není však jednoduchá.)

Máme tu tedy dvojí obdobu s rozkladem čísel v součin mocnin prvočísel: Jednak rozklad *samotné grupy* v direktní faktory a jednak jím určený *rozklad prvku* grupy v součin činitelů, vzatých z direktních faktorů.

V příkladě násobící grupy kladných zlomků byly jednotlivými, nerozložitelnými faktory direktního rozkladu vesměs nekonečné cyklické podgrupy (mocnin jednotlivých prvočísel), a bylo jich nekonečně mnoho. Jen o málo složitější je direktní rozklad násobící grupy *všech* zlomků, t. j. racionálních čísel, různých od nuly. Zde totiž přistupuje ještě jeden direktní a nerozložitelný faktor, cyklická grupa řádu 2, vytvořená číslem -1.

Většině čtenářů je v podstatě znám jiný příklad direktního rozkladu grupy: sečítací grupa komplexních čísel $x + i . y$ ($i = \sqrt{-1}$). (Nechť čtenáře nemate okolnost, že grupovým násobením je zde sečítání čísel!) Tato grupa se přímo definuje pomocí obou svých direktních faktorů, jimiž jsou dvě od sebe odlišné sečítací grupy reálných čísel, tvořené jednak t. zv. reálnými částmi x, jednak t. zv. imaginárními částmi y komplexního čísla $x + i . y$.

Poněkud obecněji je direktním rozkladem ve tři vzájemně rozlišené sečítací grupy reálných čísel dána sečítací grupa všech vektorů v prostoru $x . i + y . j + z . k$ (i, j, k jsou t. zv. jednotkové vektory).

V obou posledních příkladech šlo o direktní rozklad ve faktory, které jsou dále direktně rozložitelné.

Je důležité zdůraznit, že rozklad *samotné grupy* v direktní faktory nemusí být nijak jednoznačný (v tom je obdoba s rozkladem celých *přirozených* čísel v mocniny prvočísel neúplná). Jestliže však již direktní faktory jsou určeny, potom je odpovídající rozklad prvků v součin činitelů, vzatých z jednotlivých direktních faktorů jednoznačně určen (v tom je úplná obdoba rozkladu *racionálních* čísel v mocniny prvočísel). Příklad direktního rozkladu ve dva direktně nerozložitelné faktory to objasní. Vezměme za rozkládanou grupu G násobící grupu všech racionálních čísel tvaru $2^k 3^h$, tedy čísel $1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}, 6, \frac{1}{6}, 9, \frac{1}{9}, \ldots$ Za jeden faktor direktního rozkladu grupy G položme podgrupu $G_1 = (2^k)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ (t. j. nekonečnou cyklickou grupu vytvořenou všemi celými mocninami čísla 2). Za druhý faktor direktního rozkladu pak zřejmě můžeme vzít podobně (násobící) grupu $G_2 = (3^h)$ všech čísel, vytvořených mocninami čísla 3 s celistvými mocniteli. Můžeme psát zřejmý direktní rozklad

$$G = G_1 \times G_2 = (2^k) \times (3^h)$$

s direktně nerozložitelnými faktory.

Za druhý direktní faktor k faktoru G_1 můžeme však vzít též na př. grupu $G_2' = (6^r)$ $(r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ mocnin čísla 6. Neboť je

$$2^k 3^h = 2^{k-h} 2^h 3^h = 2^{k-h} 6^h$$

a rozklad čísla $2^k 3^h$ v součin mocnin čísla 2 a čísla 6 je jednoznačný. (Jestliže totiž je $2^r 6^s = 2^{r'} 3^{s'}$, pak je

$$1 = 2^{r-r'} 6^{s-s'} = 2^{r-r'+s-s'} 3^{s-s'},$$

a to značí, že $s - s' = 0$, $r - r' + s - s' = 0$, tedy $s = s'$, a z toho $r = r'$.) Máme tedy i další direktní rozklad $G = (2^r) \times (6^s)$ v direktně nerozložitelné faktory. A přece různé direktní rozklady téže grupy v direktně nerozložitelné faktory jsou v jistém smyslu rovnocenné. O tom nás poučuje základní věta theorie direktního rozkladu grup, t. zv. věta Remak-Schmidtova.[32] Tuto větu, která je protějškem k větě

[32] Větu dokázali téměř současně a nezávisle na sobě německý matematik R. Remak (v r. 1911) a ruský matematik O. Schmidt (1913) — týž, který proslul jako sovětský polární badatel. Zobecnění věty Remak-Schmidtovy podal — mezi jinými — z našich matematiků prof. Kořínek.

Jordan-Hölderově, podáme v poněkud zjednodušené formě:

Buďtež

$$G = G_1 \times G_2 \times G_3 \times \ldots \times G_n = G_1' \times G_2' \times \ldots \times G_m'$$

dva direktní rozklady grupy G v direktně nerozložitelné faktory G_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ a G_j' $(j = 1, 2, \ldots, m)$. Potom počet direktně nerozložitelných faktorů v obou rozkladech je týž, $n = m$, a ke každému faktoru G_i jednoho rozkladu existuje s ním isomorfní faktor G_j' druhého (direktního) rozkladu. Dokonce lze z jednoho direktního rozkladu pomocí druhého direktního rozkladu sestrojovat další direktní rozklady tak, že libovolné faktory jednoho direktního rozkladu nahradíme vhodnými faktory druhého direktního rozkladu.

Věta Remak-Schmidtova nám ovšem nezaručuje existenci direktního rokladu libovolné grupy v nerozložitelné faktory. (V případech konečných grup je však existence alespoň jednoho direktního rozkladu v nerozložitelné faktory téměř zřejma: Stačí prostě rozkládat postupně jednotlivé faktory jakéhokoli direktního rozkladu tak dlouho, pokud se rozkládat dají. Vzhledem ke konečnosti grupy to jednou musí skončit u direktního rozkladu v nerozložitelné faktory.) Tato věta jen udává úzký vztah mezi jakýmikoli dvěma direktními rozklady téže grupy v nerozložitelné faktory, jestliže již rozklady máme. V předchozím příkladě násobící grupy G všech čísel tvaru $2^k 3^h$ nám říká m. j. to, že každý direktní rozklad grupy G v direktně nerozložitelné faktory tvoří dvě nekonečné cyklické grupy (podgrupy v G).

Obraťme se konečně ke třetímu hlavnímu způsobu, jakým v případě *konečných grup* sledujeme výstavbu složité grupy z jejich jednodušších podgrup. (I tato methoda má sice jisté rozšíření na nekonečné grupy, které se však daleko vymyká z rámce této knížky.)

Již jsme se zmínili, že nejjednoduššími konečnými grupami jsou grupy prvočíselného řádu, protože nemají vůbec žádných netriviálních podgrup. Pojem jednoduchosti vznikl rozšířením tohoto příliš úzkého pojmu jednoduchosti grupy: Grupa je jednoduchá, nemá-li netriviální normální podgrupy. Jiné rozšíření takové přílišné jednoduchosti grupy, jakou vidime na grupách prvočíselného řádu, máme v grupách, jejichž řád je mocninou prvočísla p. To jsou t. zv. p-grupy. Theorie p-grup se dosud nedá soustředit do jedné nebo několika málo jednoduchých vět, které by shrnovaly podstatné poznatky o věci; ostatně také výklad byť i jen základních výsledků theorie p-grup by si vyžádal zavedení mnoha pojmů, o nichž dosud nebyla řeč. Omezíme se proto na uvedení několika jednoduchých vlastností p-grup.

Předně jsou p-grupy, zhruba řečeno, příbuzné komutativním grupám, ale tato příbuznost se stává stále složitější, čím větší je mocnitel n v řádu p^n (p je prvočíslo) dané p-grupy. Tak nejen pro $n = 1$, nýbrž i pro $n = 2$ je každá p-grupa komutativní. (Tak na př. třeba grupy řádu $13^2 = 169$ jsou komutativní.) Pro $n = 3$ již máme jen jistou slabou náhražku komutativity. (Ta spočívá v tom, že co nejmenší normální podgrupa taková, že podílová grupa dle ní je komutativní, sestává právě ze všech prvků, které jsou komutativní s každým prvkem grupy (stručně se říká, že komutátorová podgrupa je rovna centru grupy).

Z p-grup, které jsou stavebními kameny složitějších grup, jsou důležité t. zv. Sylowovy podgrupy dané grupy. Jsou to p-grupy s co největším mocnitelem n řádu p^n, které jsou obsaženy v dané konečné grupě. Theorie Sylowových podgrup vychází z pozoruhodného zjištění, že ke každé nejvyšší mocnině p^n prvočísla p, která je činitelem řádu dané konečné grupy, existuje Sylowova podgrupa řádu p^n.

Běží pak dále o to určit co nejblíže povahu dané konečné grupy z podmínek, kladených na její Sylowovy podgrupy.

Tak na př. jsou dokonale popsány typy isomorfismu konečných grup, jejichž Sylowovy podgrupy jsou cyklické grupy. Speciálně jsou tím odkryty všechny možné grupy, jichž řád obsahuje prvočísla vesměs jen v první mocnině. (Jako aplikace Galoisovy theorie rovnic pak vyplývá, že rovnice, jichž grupy mají vesměs cyklické Sylowovy podgrupy, se dají řešit pomocí šesti základních početních úkonů algebry.)

Tím uzavíráme zběžný pohled na způsoby, jakými se studuje v theorii grup budování složitějších grup z jednodušších podgrup.

Na ukončenou I. části knížky se obraťme alespoň k nejhrubšímu náčrtu jisté theoreticky důležité aplikace theorie grup, totiž aplikace na t. zv. topologii. Jde o spojení theorie grup s vyšetřováním nejzákladnějších geometrických pojmů, které je stejně hluboké a obtížné, jako překvapující.

Nejprve několik přibližných slov o tom, co je to topologie.

Topologie[33] je od geometrie odštěpená theorie těch základních vlastností geometrických útvarů, které zůstávají zachovány při jejich spojitých a vzájemně jednoznačných transformacích, chceme-li, deformacích. Podat přesnou definici pojmu spojité, vzájemně jednoznačné transformace, čili t. zv. topologické transformace (deformace) není jednoduché. Spokojíme se zde s přibližným objasněním tohoto pojmu na názorných příkladech.

Mysleme si geometrický útvar, na př. kruh v rovině z dokonale roztažitelného materiálu, na př. na povrchu gumy.

[33] Slovo topologie je z řeckého topos = místo a logos = slovo, nauka. Dříve se užívalo termínu analysis situs = lat. rozbor uložení. Založena v podstatě francouzským matematikem H. Poincarém a holandským matematikem L. Brouwerem koncem minulého a začátkem tohoto století, stala se topologie jednou z nejdůležitějších základních theorií moderní matematiky. Z vynikajících současných topologů jmenujme sovětské topology Alexandrova a Pontrjagina, z Američanů Alexandera a Lefschetze. Z našich současných matematiků podstatně přispěl k rozvoji moderní topologie laureát státní ceny z matematiky 1951 prof. Čech, v nedávné době pak doc. Katětov.

Gumu s nakresleným kruhem smíme jakkoli roztahovat, stlačovat, mačkat a podobně deformovat, jen nesmíme nikde gumu přetrhnout (tím by deformace přestala být spojitou) a nikde nesmíme dvě místa povrchu gumy spojit v jedno (slepit) (tím by deformace přestala být vzájemně jednoznačnou). Tak lze topologicky deformovat kruh v trojúhelník nebo čtverec, ale na př. nikdy ne v úsečku nebo v mezikruží. Ať gumovou rovinu deformujeme topologicky jakkoli, vždy to, co vznikne z kružnice, bude nepřetržitá, do sebe uzavřená a sebe neprotínající čára (tedy na př. to nikdy nebude osmička), která bude rozdělovat to, co topologickou deformací vzniklo z roviny, ve dvě souvislé plošné části: ve vnitřek a ve vnějšek toho, co takto vzniklo z kružnice.

Topologie je tedy exaktním rozborem toho, čemu v nejobecnějším a poněkud neurčitém smyslu slova říkáme tvar, vzájemná poloha a spojitost bez ohledu na délky, šířky a vzdálenosti vůbec.

Abychom měli na očích alespoň jeden příklad topologické rovnocennosti a topologické odlišnosti ploch v prostoru, představme si obyčejný hliněný hrnec s jedním uchem před vypálením. Topologickou deformací jej můžeme převést až na př. v těleso podoby prstence (t. zv. anuloid). Tedy povrch hliněného hrnce s jedním uchem je na př. topologicky rovnocenný s povrchem nafouklé duše pro jízdní kolo (včetně ventilku, který nic nemění na topologické povaze prstencovitého povrchu). Naproti tomu se nám nikdy nepodaří topologickou deformací uhníst z hliněného hrnce s jedním uchem před vypálením kouli; stejně tak se nám ale nepodaří topologickým hnětením opatřit jmenovaný hrnec druhým uchem. Koule, hrnec s jedním uchem a hrnec se dvěma uchy jsou tělesa a mají povrchy topologicky odlišné. Koule je však topologicky rovnocenná s hliněným hrncem *bez ucha*, s krychlí, s trojbokým jehlanem. Hrnec s jedním uchem je topologicky rovnocenný s prstencem (anuloidem).

K vyšetřování topologických vlastností ploch, těles a obecnějších útvarů, i takových, které jsou uloženy v prostorech více než trojrozměrných, se užívá t. zv. kombinatorické methody. Ta je právě oním mostem, který spojuje abstraktní pojem grupy s hlubokým rozborem našich nejzákladnějších geometrických t. zn. topologických pojmů tvaru, rozprostření a (vzájemného) uložení a spojitosti. Pokusme se pochopit základní myšlenku kombinatorické methody na příkladě.

Představme si již zmíněný povrch prstence. Topologickou podstatu tohoto tvaru si dostatečně jasně uvědomujeme globálním prostorovým názorem. Avšak tento názor nás snadno může zavést na scestí svou ohraničeností a povrchností, na příklad již tehdy, máme-li na mysli složitým způsobem topologicky zdeformovaný povrch našeho prstence. Tím spíše se to může stát při topologicky složitých plochách nebo tělesech, kde globální názor selhává. Zde nutno k celkové topologické povaze plochy dojít jejím složením z vhodných topologicky jednoduchých částí; při tom topologický charakter útvaru vynikne ze způsobu, jakým spolu souvisí jednotlivé části. Naprosto nutný je pak takový kombinatorický postup při více než trojrozměrných útvarech, kde nám bezprostřední geometrický názor chybí vůbec. Mysleme si tedy na povrchu našeho prstence jakousi „dopravní síť“, skládající se z konečného počtu bodů — jakýchsi dopravních uzlů (a zároveň jediných stanic) a ze „spojů“, t. j. na povrchu prstence vedených jednoduchých čar, spojujících nějakým způsobem tyto uzly. Sledováním cestovních možností v takových sítích dospíváme již k některým topologickým poznatkům o dané ploše. Neboť topologickou deformací plochy se sice mění vzdálenosti dopravních uzlů, křivosti, délky a vzdálenosti jednotlivých spojů, ale nevznikají ani nové dopravní uzly, ani nová dopravní spojení, a žádná dopravní spojen se tím neruší. Tak se projeví topologická rozdílnost povrchu našeho prstence od povrchu koule na př. takto: Mysleme si na povrchu prstence jakýkoli z pevného dopravního uzlu vycházející a do něho se vracející cestovní okruh sestavený z jednotlivých spojů tak, že každým zvoleným uzlem (stanicí) se projíždí jen jednou.

Pak ať si vyhlédneme jakékoli dva další dopravní uzly (mimo zmíněný okruh), můžeme vždy buďto vyhledat anebo v nejhorším případě zavést nové spoje tak, abychom se dostali z jednoho do druhého uzlu, aniž dojde ke křižování, nebo aniž bychom dokonce měli kus společné dráhy s dříve vytčeným uzavřeným cestovním okruhem. Naproti tomu na kouli to zřejmě možné není: Jakmile si zvolíme jeden bod uvnitř a druhý bod vně uzavřeného cestovního okruhu na povrchu koule, nedostaneme se po povrchu koule žádným způsobem z jednoho do druhého, aniž křižujeme daný do sebe uzavřený cestovní okruh, nebo aniž s ním máme část dráhy společnou.

Nyní jde o to, jak systematicky prozkoumat cestovní možnosti v takové dopravní síti na dané ploše. K tomu cíli si zvolme určitý bod (dopravní uzel a stanici) za východisko a po jakkoli složitém cestování v něm vždy naši cestu ukončíme. Tak vznikají t. zv. uzavřené cesty, které jsou sledem na sebe navazujících spojů, při čemž je dán a zdůrazněn smysl postupu vpřed. Jinak nečiníme našemu cestování po ploše žádné omezení, takže můžeme jedním a týmž spojem nebo více spoji, nebo i částečným do sebe uzavřeným okruhem procházet vícekrát — ať již v původním nebo v opačném smyslu; můžeme speciálně projít týmž uzavřeným celým okruhem několikrát v jednom i opačném smyslu, můžeme se bezprostředně vracet do našeho východiska přesně po svých stopách — to vše budou uzavřené cesty. Pojem uzavřené cesty není tedy pouhým souhrnem prošlých spojů a stanic. Kdybychom chtěli názorně vyznačit naši výzkumnou (uzavřenou) cestu, učinili bychom tak způsobem, jehož s úspěchem použil antický hrdina Herakles v bludišti Minotaurově: Vyznačovali bychom naši pouť nití, kterou bychom po cestě odvíjeli, vyznačujíce smysl našeho postupu třeba pomocí pravotočivého předení nitě. Pak ovšem úseky, kterými jsme prošli několikrát, budou proloženy nití vícenásobně a v příslušném smyslu.

A nyní přijde to podstatné, co dovoluje užít pojmu grupy: Kdybychom si počínali přesně jako Herakles, navíjeli by chom opět naši niť vždy pokud bychom se přímo a bez přerušení vraceli v nějaké části naší cesty přesně po vlastních stopách, obrátivše se v některé „stanici" čelem vzad. Pak by však více cestám odpovídala jediná t. zv. redukovaná stopa. Všechny cesty by se nám tím rozpadly do tříd cest, při čemž do jedné a téže třídy bychom kladli cesty s touž redukovanou stopou.

Je přirozené považovat (s hlediska našeho cíle) uzavřené cesty s toutéž redukovanou stopou za rovnocenné? Je to přirozené a my to učiníme. Neboť nám nejde, jako o to šlo Heraklovi, o to, abychom se vrátili přesně po svých stopách, a tím se uchránili zbloudění. Nám jde naopak o to, abychom bludiště našich spojů probádali co do možnosti spojení a k tomu nám prosté cestování tam a zpět neustále ve vlastních stopách nepřispívá. Zvláště pak ty uzavřené cesty, jež se přesně po vlastních stopách vracejí do našeho východiska, nikde od nich neodbočujíce, budeme považovat za rovnocenné s „cestováním", při němž setrváváme v našem východišti. Za podstatně různé budeme považovat jen takové cesty, které zanechávají různé redukované niťové stopy, tak, jako dva zlomky považujeme za různé jen tehdy, když výsledky dělení čitatele jmenovatelem jsou různé.

A tím jsme u t. zv. grupy uzavřených cest, lépe grupy tříd vzájemně neodlišných cest naší sítě, které se říká komplex drah.

Vskutku,

1. Každé dvě uzavřené cesty můžeme v daném pořadí „znásobit" tak, že navážeme jednu na druhou. Při tom nemůžeme dostat podstatně různé cesty, jestliže nebude alespoň jedna z obou znásobených cest nahrazena cestou od této podstatně různou. (To si snadno představíme, když si uvědomíme, že redukovaná niťová stopa součinu obou cest se dostane tak, že prostě projdeme obě cesty v daném pořadí po sobě a redukujeme po způsobu Heraklově.) — První axiom jednoznačnosti a neomezenosti grupového násobení je splněn.

2. Druhý axiom theorie grup, axiom asociativity, je splněn téměř samozřejmě, jak si čtenář sám laskavě uvědomí.

3. Třetí axiom, axiom jednotkového prvku, je splněn rovněž téměř samozřejmě; jednotkou naší grupy podstatně různých cest je v podstatě cesta po východišti, neboli zanedbaná cesta tam a zpět ve vlastních stopách.

4. Konečně i axiom inversního prvku je splněn: inversní cestou k dané cestě je táž cesta s obráceným smyslem postupu.

Takovým způsobem se tedy objevuje pojem grupy jako nerozlučný pomocník kombinatorické topologie.

Vše matematicky podstatné z toho, co jsme zde vyložili obrazným způsobem lze ovšem vyslovit způsobem přesným a abstraktním, ale od toho tu upouštíme. Grupy cest, jež takto vznikají, jsou nekonečnými nekomutativními grupami, jež mají veliký význam pro theorii grup samotnou. Jsou to t. zv. volné grupy; tímto názvem vyznačujeme přesně definovanou a tyto grupy charakterisující vlastnost, která — zběžně řečeno — značí, že prvky takové grupy jsou vzájemně vázány (pomocí grupového násobení) co nejslabšími vztahy, t. j. jen takovými, které již nutně vyplývají ze splnění axiomů grupy.

Volné grupy cest jsou ovšem sotva počátkem kombinatorické topologie. Jsou oním základním schematem, které dovoluje vyjadřovat topologické vlastnosti ploch pomocí jistých rovností mezi prvky grupy cest, anebo lépe (což je ale logicky totéž) pomocí jistých, podílových grup utvořených z grupy cest. Vlastním prostředkem topologie jsou teprve tyto podílové grupy. Nejdůležitější na věci je, že tyto podílové grupy závisejí jen na topologické povaze útvaru (na př. plochy) a nikoli na soustavě cest, pomocí níž vznikly.

Tolik alespoň zhruba k naznačení, jak grupová zákonitost nabývá v kombinatorické topologii hlubokého významu geometrického. — Dodejme, že existují i jiné, snad méně názorné, ale pro většinu úkolů topologie jednodušší způsoby, jakými se objevují potřebné, plochu topologicky charakterisující podílové grupy, jež sestrojujeme v grupě cest pomocí zmíněných rovností. Tyto podílové grupy, t. zv. grupy Bettiho, jsou komutativními grupami, takže pro většinu zásadních úkolů topologie vystačíme s mnohem jednodušší theorií komutativních grup. (O tom se čtenář může poučit ve velmi přístupně psané knížce od znamenitého sovětského topologa Alexandrova, která je prozatím u nás dostupná jen v německém jazyce s názvem *Einfachste Grundbegriffe der Topologie*, vyd. Springer Berlin 1932. Úvod do „nekomutativní" topologie, vycházející z volných grup cest, je v knížce K. Reidemeister, *Einführung in die kombinatorische Topologie*, vyd. Vieweg Braunschweig 1932.)

1,9. ZÁVĚR 1. ČÁSTI KNÍŽKY.

V předchozím, posledním paragrafu našich výkladů o grupách, jsme se z dálky (dílem ze značné dálky, která dává bohužel splývat pevným obrysům), podívali na alespoň něco z toho, co jsme si na theorii grup a jejich užitích nestačili prohlédnout zblízka.

Neuškodí však také přehlédnout jediným krátkým pohledem za sebe tu cestu — tu malou počáteční část výstupu k theorii grup — kterou jsme skutečně prošli.

S pojmem grupy jsme se seznámili v jeho zvláště důležitě uskutečněné podobě grupy zákrytových pohybů. Vyzdvihnuvše typické vlastnosti skládání zákrytových pohybů (opět v zákrytové pohyby) ve tvar čtyř axiomů, shledali jsme, že takovouto zákonitostí, takovými vlastnostmi jsou obdařeny i četné jiné druhy skládání. To nás vedlo k obecnému, abstraktnímu pojmu grupy, jakožto souboru nějakých prvků, které lze po dvou „skládat" — říkali jsme: Grupově násobit — tak, že jsou splněny axiomy 1—4.

Zároveň jsme byli vedeni k důležitému pojmu isomorfismu: Dvě grupy platily za isomorfní, když měly nejen stej-