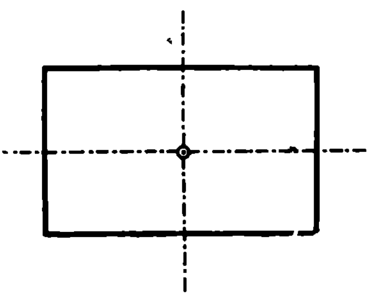
ČÁST I.

THEORIE GRUP

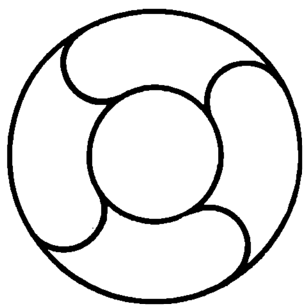
1,1. POJEM ZÁKRYTOVÉHO POHYBU

U čar a u plošných i prostorových útvarů, ať již vytvořených přírodou nebo lidmi, se setkáváme často s vlastností, které říkáme *geometrická pravidelnost*, ve zvláštním případě (středová, osová, rovinná) *souměrnost*. (Listy a květy rostlin, krystaly nerostů; ornamenty, stavby.)

V čem záleží (jak je definována) geometrická pravidelnost? Bez obšírných úvah lze říci, že útvar shledáváme geometricky pravidelným, jestliže lze udat t. zv. *zákrytové pohyby*, jimiž se ztotožní útvar jako celek sám se sebou, aniž se tedy obecně jeho jednotlivé body vrátily do svých původních poloh. Vystižení geometrické pravidelnosti útvaru je potřebí tedy hledat v souhrnu jeho zákrytových pohybů. Tak na př. obdélník (obr. 1) má tři takové zákrytové pohyby, t. j. dvojí překlopení (dle každé z obou os souměrnosti) a jejich kombinaci,

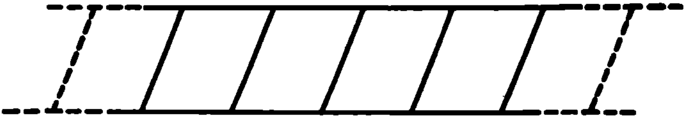


Obr. 1.



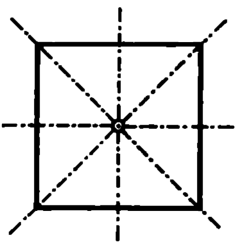
Obr. 2.

t. j. otočení o 180°. Útvar na obr. 2 má rovněž přesně tři zákrytové pohyby, ale jiné, totiž otočení roviny o 1, 2, 3 pravé úhly. Nekonečný pás na obr. 3 má nekonečně mnoho zákrytových pohybů. Jsou to posuvy o celistvé násobky jednoho dílku pásu — a jiné zákrytové pohyby nemá. Čtverec (obr. 4) má 7 zákrytových pohybů (4 překlopení kolem os souměrnosti a 3 otočení o 90°, 180°, 270°).



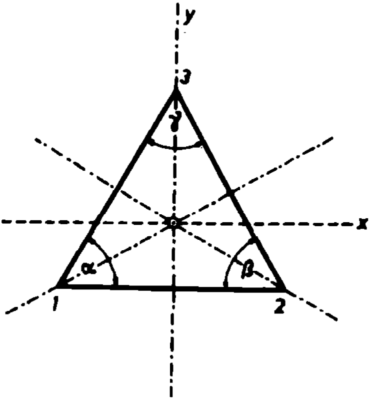
Obr. 3.

Aby později nevzniklo nedorozumění, je dobře výslovně objasnit geometrický ráz pojmu zákrytový pohyb. Na rozdíl od skutečného (fysikálního) pohybu při zákrytovém pohybu nepřihlížíme ani k časovému průběhu pohybu (k rychlosti), ani k tomu, po jaké dráze se jednotlivé body (geometricky pravidelného, tuhého) útvaru dostaly z původní do nové polohy. To znamená, že dva zákrytové pohyby platí za stejné, jestliže vedou z téže výchozí polohy útvaru do téže polohy konečné. Tak na př. v obr. 2 otočení o úhel 90° a otočení o úhel 450° = 360° + 90° (v témže smyslu) považujeme za tentýž zákrytový pohyb. Pak je však důsledné připouštět za zákrytový pohyb i takový pohyb, při němž se každý jednotlivý bod vrátí odkud vyšel (ztotožní se se sebou samým). Takovému pohybu, danému na př. otočením rovinného obrazce o 360°, říkáme pohyb identický, takže útvar na obr. 2 právě tak jako obdélník, mají ve skutečnosti po čtyřech zákrytových pohybech a při pásu na obr. 3 připouštíme i zákrytový posuv o nulovou délku. (Pak ovšem i geometricky zcela nepravidelné útvary mají zákrytový pohyb, totiž jediný, identický zákrytový pohyb.)



Obr. 4.

Souhrn zákrytových pohybů libovolného daného útvaru má některé důležité a jednoduché základní vlastnosti. Tak na př. pozorujeme, že dva zákrytové pohyby provedeny po sobě (složeny) dají opět zákrytový pohyb, že ke každému zákrytovému pohybu existuje zákrytový pohyb zpětný, uvádějící útvar v každém jeho bodu do původní polohy (tedy skládající s daným pohybem pohyb identický) a pod. Studium způsobů skládání zákrytových pohybů a těch souvislostí mezi těmito pohyby, které jsou skládáním dány (pouhý počet zákrytových pohybů říká příliš málo, jak jsme viděli na příkladě obdélníka a útvaru na obr. 1), tvoří matematický obsah theorie geometrické pravidelnosti. Tak jsme vedeni k pojmu **grupy zákrytových pohybů**, kterýmžto názvem označme prozatím zhruba souhrn zákrytových pohybů daného útvaru vzhledem k tomu, jak se zákrytové pohyby skládají. Tento pojem si objasníme blíže pomocí příkladu zákrytových pohybů rovnostranného trojúhelníka.



Obr. 5.

Cvičení k 1,1.

1. Určete zákrytové pohyby: a) pravidelného šestiúhelníka, b) vlnovky $y = \sin x$, c) neomezené čtverové sítě v rovině, d) téže sítě opatřené ještě úhlopříčkami.

2. Ukažte, jak vynecháním a) vhodných bodů, b) vhodných úseček vznikne z rovnostranného trojúhelníka (obr. 5) útvar o 3 zákrytových pohybech (kterých?).

1,2. GRUPA ZÁKRYTOVÝCH POHYBŮ ROVNOSTRANNÉHO TROJÚHELNÍKA. AXIOMY GRUPY.

Abychom mohli sledovat skládání zákrytových pohybů rovnostranného trojúhelníka (obr. 5)[1] vyznačme si pro jedno-

[1] Čtenář učiní dobře, když si vystřihne z papíru rovnostranný troj-