Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu

IX. Logaritmus a obecná mocnina

In: Karel Hruša (author): Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu. (Czech). Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. pp. 151–170.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403352

79. Integrací po částech vypočtěte: a) $\int x \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$, b) $\int \arcsin x \, \mathrm{d}x$, c) $\int x \arcsin x \, \mathrm{d}x$, d) $\int \sqrt{3 - 2x^2} \, \mathrm{d}x$, e) $\int \sqrt{6 - 5x - x^2} \, \mathrm{d}x$.

80. Vypočtěte integrály: a) $\int_0^1 \sqrt[m]{x^n} \, \mathrm{d}x$, m, n celá čísla, $m > 0$, $m > -n$, b) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 3}$, c) $\int_0^{\frac{1}{2}a} \frac{x \, \mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $a \neq 0$,

d) $\int_0^{\frac{1}{2}a} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $a > 0$, e) $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, \mathrm{d}x$, $a > 0$.

IX. LOGARITMUS A OBECNÁ MOCNINA

Dovedeme již integrovat funkci x^n v intervalu $(0, \infty)$ pro každé racionální číslo $n \neq -1$ podle vzorce (46). Zbývá nám ještě výjimka pro $x = -1$. Této výjimky si v této kapitole všimneme blíže. Je-li tedy $n = -1$, jde o funkci $f(x) = \frac{1}{x}$. Tato funkce je, jak víme, spojitá v intervalech $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ (věta 16). Vezmeme si jeden z nich. Bude to interval $(0, \infty)$. Jsou-li a, x dvě čísla z tohoto intervalu, existuje podle věty 33 integrál

$$F(x) = \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Věta 33 sice předpokládá, že je $a < x$, ale tento předpoklad není podstatný vzhledem k definicím (31) a (32). Považujeme-li x za proměnnou, je $F(x)$ funkce této proměnné spojitá v každém bodě intervalu $(0, \infty)$ (věta 37). Poněvadž dále funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je spojitá v každém bodě x intervalu $(0, \infty)$, funkce F má v každém tomto bodě derivaci, při čemž je $F'(x) = f(x)$ (věta 38), a funkce $F(x)$ je tedy primitivní funkce k funkci $f(x) = \frac{1}{x}$. Tím je dokázáno, že v intervalu $(0, \infty)$ existuje primitivní funkce k funkci $f(x) = \frac{1}{x}$. Potom podle věty 39 existuje primitivních funkcí nekonečně mnoho a všecky tyto funkce se navzájem liší o integrační konstantu. Vezmeme si jednu určitou z nich a integrační konstantu budeme fixovat tak, že budeme žádat, aby pro $x = 1$ byla hodnota této funkce rovna nule. Takto definovaná funkce je velmi důležitá v diferenciálním a integrálním počtu a nazývá se *přirozený logaritmus* čísla x (značka $\lg x$); při tom je x libovolné číslo z intervalu $(0, \infty)$. Tak dospíváme ke vzorcům

$$(\lg x)' = \frac{1}{x} \text{ pro } x > 0, \ \lg 1 = 0, \tag{52}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lg x \text{ v intervalu } (0, \infty), \ \lg 1 = 0.$$

Oba poslední řádky vyjadřují jedno a totéž. Vedle toho je podle (33)

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \lg x - \lg 1 = \lg x$$

čili

$$\lg x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}, \text{ kde } x > 0. \tag{53}$$

Tím je pro každé $x > 0$ definováno určité číslo $\lg x$; pro $x \leqq 0$ hodnota $\lg x$ definována není.

Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je však také spojitá v intervalu $(-\infty, 0)$; proto také v tomto intervalu k ní existuje primitivní funkce. Je-li $x < 0$, je $-x > 0$, a pak je definována hodnota $\lg(-x)$. Pak podle (42) je

$$[\lg(-x)]' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

To však znamená, že primitivní funkcí k funkci $f(x) = \frac{1}{x}$ v intervalu $(-\infty, 0)$ je funkce $\lg(-x)$. Pro $x < 0$ však je $-x = |x|$; pro $x > 0$ je $|x| = x$. Proto funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ má za primitivní funkci funkci $\lg|x|$ v každém z obou intervalů, v němž je funkce $f(x)$ spojitá, t. j. platí

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lg|x| \text{ v intervalech } (-\infty, 0), (0, \infty). \tag{54}$$

Nyní si odvodíme některé vlastnosti funkce $\lg x$.

Je-li $a > 0$, $b > 0$, je také $ab > 0$. Potom existují integrály $\int_1^a \frac{\mathrm{d}t}{t}$ a $\int_a^{ab} \frac{\mathrm{d}t}{t}$, a proto podle (53) a podle věty 36 je

$$\lg ab = \int_1^{ab} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^{a} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_a^{ab} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

První integrál vpravo je $\lg a$. Druhý integrál upravíme substitucí $t = au$, $\mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}u$. Odtud $u = t : a$, takže pro $t = a$ je $u = 1$ a pro $t = ab$ je $u = b$. Máme tedy

$$\int_a^{ab} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^{b} \frac{a\,\mathrm{d}u}{au} = \int_1^{b} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \lg b.$$

Tím dostáváme vzorec

$$\lg ab = \lg a + \lg b, \tag{55}$$

platný pro každé $a > 0$, $b > 0$.

Dosadíme-li do vzorce (55) $ab = a_1$, je $a = a_1 : b$, neboť $b > 0$ podle předpokladu učiněného na počátku. Dostáváme tak

$$\lg a_1 = \lg \frac{a_1}{b} + \lg b$$

a odtud opět pro každé $a > 0$, $b > 0$

$$\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b \tag{56}$$

(v posledním vzorci je psáno a místo a_1).

Je-li dále b libovolné racionální číslo a $a > 0$, je

$$\lg a^b = \int_1^{a^b} \frac{dt}{t}.$$

Zavedeme substituci $t = u^b$; pak podle (46) je $dt = bu^{b-1}\,du$. Potom $u = t^{\frac{1}{b}}$, takže pro $t = 1$ je $u = 1$ a pro $t = a^b$ je $u = a$. Máme tedy

$$\lg a^b = \int_1^a \frac{bu^{b-1}du}{u^b} = b \int_1^a \frac{du}{u} = b \,.\, \lg a,$$

t. j.

$$\lg a^b = b \,.\, \lg a, \tag{57}$$

pro každé racionální číslo b a pro $a > 0$.

Věta **46**. Funkce $\lg x$ je spojitá a rostoucí v intervalu $(0, \infty)$; je-li $x > 1$, je $\lg x > 0$, je-li $0 < x < 1$, je $\lg x < 0$; vedle toho je $\lim\limits_{x\to\infty} \lg x = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} \lg x = -\infty$.

Důkaz. To, že funkce $\lg x$ je spojitá v intervalu $(0, \infty)$, bylo dokázáno již na str. 151. Je třeba dále dokázat, že je rostoucí. Zvolme dvě čísla $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. Platí

$$\lg x_2 = \int_1^{x_2} \frac{dt}{t} = \int_1^{x_1} \frac{dt}{t} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{t} = \lg x_1 + \int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{t} \qquad \text{(a)}$$

podle věty 36. Je-li $x_1 < x_2$ a je-li t libovolný bod z intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$, pak pro každé toto t platí $t \leqq x_2$, $\frac{1}{t} \geqq \frac{1}{x_2}$. Potom podle věty 34

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{t} \geqq \int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{x_2} \quad \text{čili} \quad \int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{t} \geqq \frac{x_2 - x_1}{x_2}.$$

Avšak $x_2 - x_1 > 0$, proto $\int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{t} > 0$. Plyne tedy z podmínky (a)

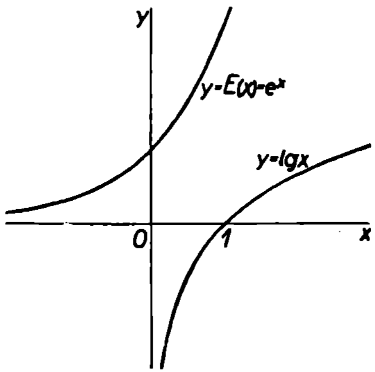
$$\lg x_2 = \lg x_1 + \int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{t} > \lg x_1.$$

To však značí, že funkce $\lg x$ je rostoucí v intervalu $(0, \infty)$. Je-li $x > 1$, je tedy $\lg x > \lg 1 = 0$, je-li $0 < x < 1$, je $\lg x < \lg 1 = 0$.

Ještě zbývá dokázat, že $\lim_{x \to \infty} \lg x = \infty$, t. j. že ke každému číslu $k > 0$ dovedeme nalézt takové číslo $a > 0$, že pro všechna $x > a$ je $\lg x > k$ (viz str. 36). Abychom to dokázali, všimněme si, že $2 > 1$, a proto $\lg 2 > 0$. Je-li dáno libovolné číslo $k > 0$, existuje takové celé a kladné číslo n, že $n \lg 2 > k$ čili $\lg 2^n > k$. Pak pro každé $x > 2^n$ je $\lg x > \lg 2^n > k$. Je tedy $a = 2^n$ a tvrzení je dokázáno. Vedle toho podle (56)

je $\lg \frac{1}{x} = -\lg x$, neboť $\lg 1 = 0$. Podle toho $\lim\limits_{x \to 0+} \lg x =$
$= -\lim\limits_{\frac{1}{x} \to \infty} \lg \frac{1}{x} = -\infty$. Tím je dokázána celá věta 46.

Poslední tvrzení této věty znamená toto: Roste-li x nade všecky meze, roste také $\lg x$ nade všecky meze; blíží-li se x



Obr. 64

k nule (ovšem zprava), klesá $\lg x$ pod jakoukoli hodnotu. Průběh funkce $y = \lg x$ (spolu s funkcí k ní inversní) je znázorněn na obr. 64.

Příklad 61. Stanovit derivaci funkce $f(x) = \lg(x^2 + 1)$.

Pro každé x je $x^2 + 1 > 0$, a proto je funkce $f(x)$ definována pro každé x. Podle (42) a (52) je

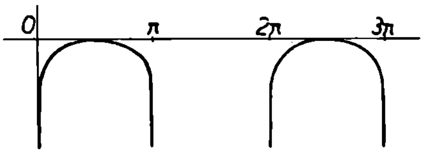
$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2 + 1} \text{ pro každé } x.$$

Příklad 62. Vyšetřit průběh funkce $f(x) = \lg \sin x$.

Poněvadž $\sin x > 0$, pokud x vyhovuje nerovnostem $2k\pi < x < (2k+1)\pi$, kde k je celé, je funkce $f(x) = \lg\sin x$ definována jen pro tato x. Pro tato x je podle (52) a (42)

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \operatorname{cotg} x.$$

Pro $x = 2k\pi + \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}(4k+1)\pi$ je $f'(x) = \operatorname{cotg} x = 0$, kdežto pro každé x z intervalu $(2k\pi, \frac{1}{2}(4k+1)\pi)$ je $f'(x) =$



Obr. 65

$= \operatorname{cotg} x > 0$ a pro každé x z intervalu $(\frac{1}{2}(4k+1)\pi, (2k+1)\pi)$ je $f'(x) = \operatorname{cotg} x < 0$. Proto funkce $f(x) = \lg\sin x$ nabývá maxima pro $x = \frac{1}{2}(4k+1)\pi$. Toto maximum je rovno nule. Průběh dané funkce je znázorněn na obr. 65.

Příklad 63. Abychom určili integrál $\int \lg x \, dx$, který je definován v intervalu $(0, \infty)$, neboť v tomto intervalu je funkce $\lg x$ spojitá, užijeme methody integrace po částech. Položíme $u = \lg x$, $v' = 1$; pak je $u' = \frac{1}{x}$, $v = x$, takže $\int \lg x \, dx =$

$$= x \lg x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx = x \lg x - x + c \text{ v intervalu } (0, \infty).$$

Příklad 64. Integrál $\int \frac{dx}{\sin x}$, který má smysl v těch intervalech, v nichž je $\sin x \neq 0$, t. j. v intervalech $(k\pi, (k+1)\pi)$, kde k je číslo celé, určíme takto:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin^2 \frac{1}{2}x + \cos^2 \frac{1}{2}x}{2 \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{\sin \frac{1}{2}x}{\cos \frac{1}{2}x}\, dx + \\ + \frac{1}{2} \int \frac{\cos \frac{1}{2}x}{\sin \frac{1}{2}x}\, dx,$$

neboť $\sin x = 2 \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x$ podle (10) a $1 = \sin^2 \frac{1}{2}x + \cos^2 \frac{1}{2}x$ podle (12). Abychom ustanovili první integrál, položíme $\cos \frac{1}{2}x = t$; pak je $dt = -\frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}x\, dx$. Proto

$$\frac{1}{2} \int \frac{\sin \frac{1}{2}x}{\cos \frac{1}{2}x}\, dx = -\int \frac{dt}{t} = -\lg|t| = -\lg|\cos \tfrac{1}{2}x|$$

podle (54). Druhý integrál určíme substitucí $\sin \frac{1}{2}x = u$, $du = \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}x\, dx$, takže

$$\frac{1}{2} \int \frac{\cos \frac{1}{2}x}{\sin \frac{1}{2}x}\, dx = \int \frac{du}{u} = \lg|u| = \lg|\sin \tfrac{1}{2}x|.$$

Je tedy celkem

$$\int \frac{dx}{\sin x} = -\lg|\cos \tfrac{1}{2}x| + \lg|\sin \tfrac{1}{2}x| = \lg|\mathrm{tg}\, \tfrac{1}{2}x| + c$$

podle (56).

Kontrola: Je-li x v intervalu $(k\pi, (k + 1)\pi)$, kde k je celé, je $\frac{1}{2}k\pi < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}(k + 1)\pi$. Jsou dvě možnosti: (1) Je-li k sudé, t. j. je-li $k = 2h$, kde h je opět celé, je $h\pi < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}(2h + 1)\pi$. Pak je $\mathrm{tg}\, \frac{1}{2}x > 0$ a $|\mathrm{tg}\, \frac{1}{2}x| = \mathrm{tg}\, \frac{1}{2}x$, takže

$$(\lg|\mathrm{tg}\, \tfrac{1}{2}x|)' = (\lg \mathrm{tg}\, \tfrac{1}{2}x)' = \frac{1}{\mathrm{tg}\, \frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} = \\ = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x} = \frac{1}{\sin x}.$$

(2) Je-li k liché, t. j. je-li $k = 2h - 1$, kde h je celé, je $\frac{1}{2}(2h - 1)\pi < \frac{1}{2}x < h\pi$. Pak je $\mathrm{tg}\, \frac{1}{2}x < 0$ a $|\mathrm{tg}\, \frac{1}{2}x| = -\mathrm{tg}\, \frac{1}{2}x$, takže

$$(\lg|\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}x|)' = [\lg(-\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}x)]' =$$

$$= \frac{1}{-\mathrm{tg}\frac{1}{2}x} \cdot \frac{-1}{\cos^2\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x} = \frac{1}{\sin x}.$$

Bylo tedy počítáno správně.

Příklad 65. Integrál $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}}$, kde $a \neq 0$ je konstanta, existuje, pokud $x^2 > -a$, t. j. pro $a > 0$ v intervalu $(-\infty, \infty)$ a pro $a < 0$ v intervalech $(-\infty, -\sqrt{-a})$ a $(\sqrt{-a}, \infty)$. Pro výpočet daného integrálu je vhodná substituce

$$\sqrt{x^2+a} = t - x \tag{b}$$

čili

$$t = x + \sqrt{x^2+a}. \tag{c}$$

Tím je ke každému x jednoznačně přiřazeno určité t. Pokud $a \neq 0$, je také $t \neq 0$, neboť pro $t = 0$ bychom dostali $\sqrt{x^2+a} = -x$; tento vztah může být splněn jen tehdy, když je $x^2 + a = x^2$ čili když $a = 0$, ale to podle našeho předpokladu není. Z rovnice (b) plyne

$$x^2 + a = t^2 - 2tx + x^2$$

a odtud

$$x = \frac{t^2 - a}{2t}, \text{ neboť } t \neq 0.$$

Tím je ke každému t jednoznačně přiřazeno určité x. Odtud vyplývá

$$\sqrt{x^2+a} = t - x = t - \frac{t^2-a}{2t} = \frac{t^2+a}{2t}$$

a vedle toho

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{2t \cdot t - (t^2 - a) \cdot 1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2+a}{2t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Číslo $t^2 + a = 2t\sqrt{x^2 + a}$ je vždy různé od nuly. Kdyby totiž $t^2 + a = 0$, bylo by $\sqrt{x^2 + a} = 0$, a to není, neboť $x^2 > -a$. Je tedy

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a}} = \int \frac{\frac{t^2 + a}{2t^2}}{\frac{t^2 + a}{2t}} \mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \lg|t| = \lg|x + \sqrt{x^2 + a}|.$$

Nalezli jsme tedy výsledek

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a}} = \lg|x + \sqrt{x^2 + a}| \tag{58}$$

v intervalu $(-\infty, \infty)$ pro $a > 0$ a

v intervalech $(-\infty, -\sqrt{-a})$, $(\sqrt{-a}, \infty)$ pro $a < 0$.

Podle věty 46 je funkce $\lg x$ rostoucí a spojitá v intervalu $(0, \infty)$. Poněvadž $\lim\limits_{x \to \infty} \lg x = \infty$, $\lim\limits_{x \to 0+} \lg x = -\infty$, vyplňují všecky hodnoty $\lg x$ interval $(-\infty, \infty)$, a proto také ke každému číslu y existuje jediné číslo x tak, že $\lg x = y$ (viz větu 43). To znamená, že k funkci $\lg x$ existuje funkce inversní. Tuto inversní funkci označíme (prozatím) $E(x)$; jejím oborem je interval $(-\infty, \infty)$ a v tomto intervalu je to podle věty 44 funkce rostoucí a spojitá. Pro $y > 1$ je $x = \lg y > 0$, pro $0 < y < 1$ je $x = \lg y < 0$, $\lg 1 = 0$; proto pro $x > 0$ je $y = E(x) > 1$, pro $x < 0$ je $0 < y = E(x) < 1$, $E(0) = 1$. Vedle toho je $\lim\limits_{x \to \infty} E(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} E(x) = 0$. Průběh funkce $y = E(x)$ je vedle funkce $y = \lg x$ znázorněn na obr. 64.

Rovnice $y = E(x)$ je tedy totožná s rovnicí $x = \lg y$, kde $y > 0$. Přepišme nyní rovnice (55) až (57) tak, abychom tam místo funkce $\lg x$ měli funkci inversní $E(x)$. Položme

$$\lg a = r,\ \lg b = s \text{ čili } a = E(r),\ b = E(s).$$

Pak je $ab = E(r) . E(s)$. Podle (55) je $\lg ab = \lg a + \lg b = r + s$, takže $ab = E(r + s)$, čili

$$E(r) . E(s) = E(r + s) \text{ pro každé } r \text{ a } s, \tag{d}$$

což je rovnice ekvivalentní s rovnicí (55).

Podobně přepíšeme rovnici (56). Je $\frac{a}{b} = \frac{E(r)}{E(s)}$. Podle (56) je $\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b = r - s$, takže $\frac{a}{b} = E(r - s)$, čili

$$\frac{E(r)}{E(s)} = E(r - s) \text{ pro každé } r \text{ a } s. \tag{e}$$

Přepišme ještě rovnici (57). Poněvadž $a = E(r)$, proto $a^b = E^b(r)$, kde b je racionální; při tom $E^b(r)$ značí totéž jako $[E(r)]^b$. Podle (57) je $\lg a^b = b \lg a = br$. Proto $a^b = E(br)$, takže

$$E^b(r) = E(br) \text{ pro racionální } b \text{ a pro každé } r. \tag{f}$$

Tato rovnice však má důležitý význam. Hodnota $E(x)$ je definována pro každé x, proto má také pravá strana rovnice (f) smysl pro každé b (a ovšem také pro každé r), a proto má smysl také levá strana. Je-li b racionální, značí levá strana rovnice (f) b-tou mocninu čísla $E(r) = a$, je-li b iracionální, bude nám rovnice (f) sloužit za d e f i n i c i mocniny čísla $E(r) = a$ s iracionálním mocnitelem b.*) Podle toho je tedy

$$a^b = E(br), \text{ kde } r = \lg a, b \text{ libovolné.} \tag{g}$$

Avšak rovnici (g) můžeme přepsat ve tvaru $\lg a^b = br = b \lg a$; proto vzorec (57) platí pro každé $a > 0$ a pro každé b (a ne jen pro b racionální, jak bylo uvedeno na str. 154).

Protože hodnota $E(x)$ je definována pro každé x, je definována i pro $x = 1$. Hodnotu $E(1)$ budeme označovat písme-

*) Iracionální jsou všecka čísla, která nejsou racionální, t. j. všecka čísla, která se nedají vyjádřit ve tvaru zlomku, jehož čitatelem a jmenovatelem jsou čísla celá (viz str. 9).

nem e. Je tedy e takové číslo, že lg e = 1. Číslo e se jmenuje *základ přirozených logaritmů*. Je to číslo irracionální a lze vypočítat, že e = 2,718281828... (tečky značí, že v uvedeném čísle jsou další desetinná místa vynechána). Jestliže tedy v rovnici (g) položíme $r = 1$, je $a = \mathrm{e}$, takže

$$E(b) = \mathrm{e}^b \text{ pro každé } b.$$

Přepíšeme-li podle toho rovnice (d) až (f), máme

$$\mathrm{e}^r \,.\, \mathrm{e}^s = \mathrm{e}^{r+s}, \tag{59}$$

$$\mathrm{e}^r : \mathrm{e}^s = \mathrm{e}^{r-s}, \tag{60}$$

$$(\mathrm{e}^r)^s = \mathrm{e}^{rs} \tag{61}$$

pro každé r, s. Funkci $\mathrm{e}^x = E(x)$ právě definovanou označujeme názvem *exponenciální funkce*. Výsledky našich úvah můžeme tedy vyslovit větou:

Věta **47**. Exponenciální funkce e^x je spojitá a rostoucí v intervalu $(-\infty\ \infty)$; je-li $x > 0$, je $\mathrm{e}^x > 1$, je-li $x < 0$, je $0 < \mathrm{e}^x < 1$; vedle toho je $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$.

Stanovme nyní derivaci funkce e^x v bodě x. Je-li $y = \mathrm{e}^x$, značí to totéž jako $x = \lg y$, kde $y > 0$ Protože inversní funkce $\lg y$ má derivaci v bodě y, která je rovna $1 : y$, je podle věty 45

$$(\mathrm{e}^x)' = \frac{1}{(\lg y)'} = \frac{1}{1 : y} = y = \mathrm{e}^x.$$

Platí tedy vzorec

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x \text{ pro každé } x. \tag{62}$$

Proto také

$$\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \text{ v intervalu } (-\infty, \infty). \tag{63}$$

Obraťme se k mocninám o libovolném základu a o libovolném mocniteli. Podle rovnice (g) je

$$a^b = \mathrm{e}^{b \lg a} \text{ pro každé } a > 0 \text{ a pro každé } b. \tag{64}$$

Proto podle (59) až (61) je

$$a^r \,.\, a^s = e^{r\,\lg a} \,.\, e^{s\,\lg a} = e^{(r+s)\lg a} = a^{r+s},$$

$$a^r : b^s = e^{r\,\lg a} : e^{s\,\lg a} = e^{(r-s)\lg a} = a^{r-s},$$

$$(a^r)^s = (e^{r\,\lg a})^s = e^{rs\,\lg a} = a^{rs}.$$

Vedle toho je ještě $1^r = e^{r\lg 1} = e^0 = 1$ a dále

$$a^r \,.\, b^r = e^{r\,\lg a} \,.\, e^{r\,\lg b} = e^{r\,(\lg a + \lg b)} = e^{r\,\lg ab} = (ab)^r.$$

Pro mocniny definované rovnicí (64) platí tedy beze změny všecka pravidla, která platí pro počítání s mocninami, jejichž mocnitelé jsou čísla racionální. Můžeme tedy všech známých pravidel o počítání s mocninami beze změny užívat i pro mocniny s mocniteli iracionálními.

Jestliže $a^y = x$, kde $a > 0$, $a \neq 1$, y je libovolné a $x > 0$, nazýváme číslo *y logaritmem čísla x o základu a*. Zapisujeme to

$$y = \log_a x. \tag{h}$$

Rovnice (h) značí tedy přesně totéž jako rovnice

$$x = a^y, \text{ kde } a > 0,\ a \neq 1. \tag{i}$$

Utvoříme-li přirozené logaritmy na obou stranách rovnice (i), vychází

$$\lg x = y \lg a.$$

Poněvadž je $a \neq 1$, je $\lg a \neq 0$, proto $y = \lg x : \lg a$, takže

$$\log_a x = \frac{\lg x}{\lg a}. \tag{65}$$

Tím je dán přechod mezi logaritmy o základu a a logaritmy přirozenými. Dosadíme-li do rovnice (65) $x = a$, máme

$$\log_a a = \frac{\lg a}{\lg a} = 1.$$

Je tedy logaritmus základu vždy roven jedné; to byl důvod, proč jsme číslo e, které má tu vlastnost, že $\lg e = 1$, nazvali základem přirozených logaritmů. Pro praktické počítání se užívá nejčastěji logaritmů o základu 10, které se nazývají dekadické. Dekadický logaritmus čísla a označujeme zpravidla znakem $\log a$. Pro diferenciální a integrální počet však vyhovují lépe logaritmy přirozené, neboť, jak ještě uvidíme, mnohé vzorce pro logaritmy přirozené jsou jednodušší než pro logaritmy o jiném základu.

Odvodíme si ještě derivace některých dalších funkcí. Je-li $f(x) = x^n$, kde n je libovolné číslo a $x > 0$, pak $f(x) = e^{n \lg x}$; proto

$$f'(x) = e^{n \lg x} \,.\, n \,.\, \frac{1}{x} = n \,.\, \frac{x^n}{x} = nx^{n-1},$$

takže vzorec

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \; x > 0, \tag{66}$$

který jsme zprvu odvodili jen pro celé n a později jsme jej rozšířili i na n racionální, platí nyní pro libovolné n. Proto také vzorec

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \; n \neq -1 \text{ v intervalu } (0, \infty) \tag{67}$$

platí i pro každé irracionální číslo $n \neq -1$.

Je-li $f(x) = a^x = e^{x \lg a}$, kde $a > 0$ je konstanta různá od 1 a x libovolné, je $f'(x) = e^{x \lg a} \,.\, \lg a = a^x \,.\, \lg a$, takže platí

$$(a^x)' = a^x \,.\, \lg a \text{ pro každé } x \text{ a } 1 \neq a > 0. \tag{68}$$

Odtud lehko vyplývá

$$\int a^x \, dx = \frac{1}{\lg a} \,.\, a^x \text{ pro } 1 \neq a > 0 \text{ v intervalu } (-\infty, \infty). \tag{69}$$

Je-li $f(x) = \log_a x = \dfrac{\lg x}{\lg a}$, je $f'(x) = \dfrac{1}{\lg a} \,.\, \dfrac{1}{x}$, takže

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \lg a}, \; x > 0, \; 1 \neq a > 0. \tag{70}$$

Naše dosavadní úvahy nám ovšem nic neříkají o tom, jak se vypočtou hodnoty funkcí $\lg x$ a e^x, obecněji $\log_a x$ a a^x. Tyto hodnoty bývají sestaveny v různých tabulkách a k jejich výpočtu se užívá prostředku, o němž se v této knížce nezmiňujeme. Jsou to t. zv. nekonečné řady. O nich se lze blíže poučit třeba v knížce J. Vyšína „O nekonečných řadách", která vyšla jako 45. svazek sbírky Cesta k vědění, nebo v každé učebnici diferenciálního počtu.

Příklad 66. Stanovit derivaci funkce $f(x) = x^x$.

Tato funkce je definována pro každé $x > 0$. Je $f(x) = e^{x \lg x}$, a proto podle pravidla pro derivování funkcí složených

$$f'(x) = e^{x \lg x}\left(1 \,.\, \lg x + x \,.\, \frac{1}{x}\right) = x^x(\lg x + 1).$$

Příklad 67. Vypočísti $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\, dx$.

Vypočteme nejprve příslušnou primitivní funkci. Funkce $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ je spojitá pro každé x, proto daný integrál existuje. Pro každé x je $e^x > 0$. Zavedeme substituci $e^x = t$, při čemž $t > 0$. Odtud $e^x\, dx = dt$, takže $\displaystyle\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\, dx = \int \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \,.\, \frac{dt}{t}$.

Avšak $\dfrac{t^2 - 1}{(t^2 + 1)\, t} = \dfrac{2t}{t^2 + 1} - \dfrac{1}{t}$, proto $\displaystyle\int \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \,.\, \frac{dt}{t} = \int \frac{2t\, dt}{t^2 + 1} - \int \frac{dt}{t} = \lg(t^2 + 1) - \lg t = \lg \frac{t^2 + 1}{t} = \lg(e^x + e^{-x}) + c$. Absolutní hodnoty nepíšeme, neboť $t > 0$ a také $t^2 + 1 > 0$. Je tedy celkem $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\, dx =$

$= [\lg(e^x + e^{-x})]_0^1 = \lg(e + e^{-1}) - \lg(e^0 + e^{-0}) = \lg(e + e^{-1}) - \lg 2 = \lg \dfrac{e^2 + 1}{2e}.$

Cvičení.

81. Pro čísla a, b, c platí: $1 \neq a > 0$, $1 \neq b > 0$, $1 \neq c > 0$. Dokažte: a) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$, b) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$, c) $\log_a c = \log_a b \cdot \log_b c$, d) $\log_{ab} c = \dfrac{\log_a c \cdot \log_b c}{\log_a c + \log_b c}$.

82. Dokažte: a) Je-li $0 < x_1 < x_2$ a $a > 1$, je $\log_a x_1 < \log_a x_2$ a $a^{x_1} < a^{x_2}$; b) je-li $0 < x_1 < x_2$ a $0 < a < 1$, je $\log_a x_1 > \log_a x_2$ a $a^{x_1} > a^{x_2}$.

83. a) Dokažte, že $\lg\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqq 1$, $\lg\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1} \geqq 1$, n celé kladné. b) Odtud odvoďte, že $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqq e \leqq \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ a $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. c) Dokažte, že odtud dále plyne $e^x = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

84. Dokažte: a) Je-li $f(x) = \lg g(x)$, je $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$ pro každé x, pro něž $g(x) > 0$. b) $\displaystyle\int \frac{g'(x)\,dx}{g(x)} = \lg|g(x)|$ ve všech intervalech, v nichž je buď $g(x) > 0$, nebo $g(x) < 0$.

85. Nalezněte derivace funkcí: a) $x \lg x - x$, b) $\lg \operatorname{tg} x$, c) $\lg x(x + 1)$, d) $\lg(x + \sqrt{x^2 + a})$, $a \neq 0$, e) $\lg \sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$, f) $\lg\lg x$, g) $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$, h) $e^x(\sin x - \cos x)$, i) $x^{\sin x}$, j) $\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)^{\frac{1-x}{1+x}}$.

86. Určete primitivní funkce k funkcím: a) $\frac{1}{x+1}$, b) $\frac{x+1}{x-1}$, c) $\frac{1}{3x+2}$, d) $\frac{x^2}{x-2}$, e) $\frac{2x}{x^2+1}$, f) $\operatorname{tg} x$, g) $\frac{1}{x \lg x}$, h) $\frac{\lg x}{x}$, i) e^{-x}, j) $\frac{1}{e^x + e^{-x} + 2}$, k) $x \lg x$, l) $x^2 e^x$, m) $e^x \sin x$, n) $e^x \cos x$.

87. Racionální lomenou funkci, jejíž jmenovatel je mnohočlen prvého stupně a čitatel není konstanta, integrujeme tak, že nejprve dělíme čitatele jmenovatelem, čímž dostaneme jednak integrál mnohočlenu, jednak integrál tvaru

$\int \frac{k}{ax+b}\,dx$, kde a, b, k jsou konstanty, při čemž $a \neq 0$.

Určete podle toho: a) $\int \frac{x^3 - 3x + 4}{x}\,dx$, b) $\int \frac{x^2 - x + 1}{x-2}\,dx$, c) $\int \frac{x^4}{x-1}\,dx$, d) $\int \frac{x^3+2}{2x-3}\,dx$.

88. Integrál tvaru $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, kde a, b, c jsou konstanty, při čemž $a \neq 0$, může být trojího typu:

I. Lze-li jmenovatele rozložit v součin dvou různých mnohočlenů prvního stupně (to nastane tehdy, když má rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ dva různé kořeny r a s čili když $b^2 - 4ac > 0$), je

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a(r-s)} \cdot \left(\frac{1}{x-r} - \frac{1}{x-s}\right).$$

Tím převedeme daný integrál v rozdíl dvou integrálů jednodušších.

II. Nelze-li jmenovatele rozložit v součin (to nastane tehdy, když rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ nemá reálné kořeny čili když $b^2 - 4ac < 0$), je $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ a integrál převedeme substitucí $x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \cdot t$ na integrál tvaru (51).

III. Je-li jmenovatel (nejvýše až na multiplikativní konstantu) druhou mocninou mnohočlenu prvního stupně (to nastane, když rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ má dvojnásobný kořen čili když $b^2 - 4ac = 0$), je $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ a integrál počítáme substitucí $x + \frac{b}{2a} = t$.

Jsou-li k, h konstanty, pak integrál

$$\int \frac{kx + h}{ax^2 + bx + c}\,\mathrm{d}x = \frac{k}{2a}\lg|ax^2 + bx + c| + \left(h - \frac{bk}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2 + bx + c}.$$

Dokažte.

Je-li čitatel vyššího stupně než prvního, dělíme nejprve čitatele jmenovatelem jako ve cvič. 87.

Podle tohoto návodu lze počítat každý integrál z racionální funkce lomené, jejímž jmenovatelem je mnohočlen druhého stupně. Vypočtěte podle toho integrály:

a) $\int \frac{5x - 4}{x^2 - 8x + 12}\,\mathrm{d}x$, b) $\int \frac{x^4\,\mathrm{d}x}{4x^2 - 1}$,

c) $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^2 - 5x + 4}$, d) $\int \frac{(x + 1)\,\mathrm{d}x}{3x^2 - x - 2}$,

e) $\int \frac{x^2 + 1}{5x - 2x^2}\,\mathrm{d}x$, f) $\int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2 - 4x + 7}$, g) $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 + 4}\,\mathrm{d}x$,

h) $\displaystyle\int \frac{(x + 5)\,dx}{x^2 + 2x + 7}$, i) $\displaystyle\int \frac{(4x + 3)\,dx}{(x - 3)^2}$,

j) $\displaystyle\int \left(\frac{x - 2}{x + 1}\right)^2 dx$.

89. Integrály tvaru $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, kde a, b, c jsou konstanty, při čemž $a \neq 0$ a $b^2 - 4ac \neq 0$, jsou dvojího typu. Platí

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

I. Je-li $a > 0$, převádíme je na tvar udaný vzorcem (58) substitucí $x + \dfrac{b}{2a} = t$.

II. Je-li $a < 0$, převádíme je na tvar (50) substitucí $x + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{-2a} \cdot t$. Při tom je vždy $b^2 > 4ac$; proč?

Jsou-li k, h konstanty, pak

$$\int \frac{kx + h}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx = \frac{k}{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} + \left(h - \frac{bk}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Dokažte a počítejte podle toho integrály:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 13}}$, b) $\displaystyle\int \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}\,dx$,

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 3x - 5}}$, d) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x - 1}{2x - 3}}\,dx$,

e) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{2x^2+x-3}}\,\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{8-5x-3x^2}}$,

g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}}$, h) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$, i) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4-3x-x^2}}$.

j) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{3-x}{2+x}}\,\mathrm{d}x$.

90. Methodou částečné in tegrace dokažte, že

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4a}(2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c} - \\ - \frac{b^2-4ac}{8a}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Počítejte podle toho a) $\int \sqrt{x^2+3x-4}\,\mathrm{d}x$,
b) $\int \sqrt{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$, c) $\int \sqrt{x(1-x)}\,\mathrm{d}x$.

X. UŽITÍ INTEGRÁLŮ

Integrální počet má velmi četné použití v praxi; na tomto místě si však všimneme pouze dvou jeho aplikací důležitých v geometrii, a to obsahu rovinných oborů a délky rovinné čáry.

Budiž dána funkce $f(x)$, definovaná v jistém uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, která má tu vlastnost, že v celém intervalu $\langle a, b\rangle$ je $f(x) \geqq 0$. Vezměme v úvahu množinu všech bodů v rovině, jejichž souřadnice x, y vyhovují nerovnostem $a \leqq x \leqq b$, $0 \leqq y \leqq f(x)$ (obr. 66, v němž je tato množina naznačena šrafováním). Tuto množinu budeme nazývat *plocha* a přiřadíme jí určité číslo P, které budeme nazývat *obsah plochy*. Z důvodů, které za chvíli vyložíme, budeme definovat