Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu

V. Určitý integrál

In: Karel Hruša (author): Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu. (Czech). Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. pp. 85–107.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403348

37. Úplnou indukcí dokažte, že

$$\frac{(u_1 . u_2 \dots u_n)'}{u_1 . u_2 \dots u_n} = \frac{u'_1}{u_1} + \frac{u'_2}{u_2} + \dots + \frac{u'_n}{u_n},$$

pokud jsou jmenovatelé různí od nuly. Odvoďte odtud znovu vzorec ze cvič. 36.

38. Funkce f se nazývá $\begin{matrix}\text{sudá,}\\ \text{lichá,}\end{matrix}$ má-li tuto vlastnost: Je-li definována v bodě x, je definována také v bodě $-x$ a $\begin{matrix} f(-x) = f(x). \\ f(-x) = -f(x). \end{matrix}$ (Na př. x^n pro n sudé nebo $\cos x$ jsou funkce sudé, x^n pro n liché nebo $\sin x$ jsou funkce liché.)

Dokažte větu: Derivace $\begin{matrix}\text{sudé}\\ \text{liché}\end{matrix}$ funkce je $\begin{matrix}\text{lichá}\\ \text{sudá}\end{matrix}$ funkce.

39. Stanovte body, v kterých je daná funkce rostoucí nebo klesající, a body, ve kterých nabývá maxima nebo minima, v případech: a) $x^3 - x$, b) $(x^2 - 1)^2$, c) $\frac{1}{1 + x^2}$, d) $\frac{x}{(1 - x)^2}$, $x \neq 1$, e) $|x + 1| + |x - 1|$, f) $x + \sin x$, g) $|\sin x| + |\cos x|$.

40. Pomocí věty o přírůstku funkce dokažte, že pro $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ je a) $\sin x < x$, b) $\operatorname{tg} x > x$.

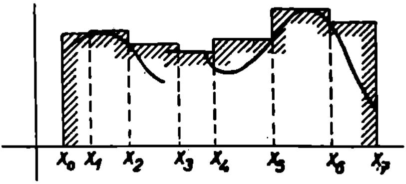
V. URČITÝ INTEGRÁL

Budiž dána funkce f definovaná pro všechna x z jakéhosi intervalu $\langle a, b\rangle$ a v tomto intervalu omezená. Zvolme libovolných $n - 1$ čísel $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, tak, aby $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$, a pro úplnost ještě doplníme označení $a = x_0$, $b = x_n$. Tím jsme rozdělili interval $\langle a, b\rangle$ na n dílčích intervalů $\langle x_0, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \dots, \langle x_{n-1}, x_n\rangle$ (obr. 50, v němž je $n = 7$). Délky těchto intervalů označme $\Delta x_1 = x_1 - x_0$,

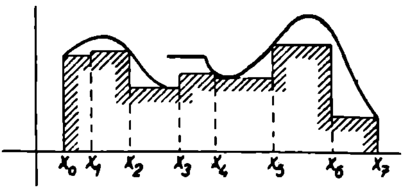
$\Delta x_2 = x_2 - x_1, \ldots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$. Obecně k-tý interval je $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$ a jeho délka $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Vždy je $\Delta x_k > 0$ a

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n = b - a.$$

Množinu dělicích bodů $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ nazveme *rozdělením* intervalu $\langle a, b \rangle$. Abychom se mohli jasně vyjadřovat, označme toto rozdělení nějakým písmenem, třeba D.



Obr. 50



Obr. 51

Protože funkce f je omezená v intervalu $\langle a, b \rangle$, je omezená i v každém dílčím intervalu $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$. Proto má v každém dílčím intervalu určité supremum a určité infimum. Toto supremum v k-tém dílčím intervalu označme M_k, infimum v témž intervalu označme m_k. Je ovšem vždy $M_k \geqq m_k$. Utvořme nyní součty

$$S(D) = M_1 \,.\, \Delta x_1 + M_2 \,.\, \Delta x_2 + \ldots + M_n \,.\, \Delta x_n,$$
$$s(D) = m_1 \,.\, \Delta x_1 + m_2 \,.\, \Delta x_2 + \ldots + m_n \,.\, \Delta x_n.$$

Je-li $f(x) \geqq 0$ pro každé x z $\langle a, b\rangle$, je geometrický význam součtů $S(D)$ a $s(D)$ znázorněn vyčárkovanou plochou na obr. 50 a 51. Jejich hodnota závisí jednak na průběhu funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$, jednak na tom, jak zvolíme rozdělení D. Ježto $M_k \geqq m_k$, je $S(D) \geqq s(D)$. Proto součet $S(D)$ nazveme *horním součtem* a součet $s(D)$ *dolním součtem* příslušným k rozdělení D.

Ponecháme nyní funkci f beze změny a budeme zkoumat, jak závisí hodnoty $S(D)$ a $s(D)$ na rozdělení D.

Jestliže v určitém rozdělení ponecháme všecky dělicí body $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ beze změny a zavedeme tam ještě další dělicí body, vznikne nové rozdělení D_1, které nazveme *zjemněním* rozdělení D.

Pomocná věta. Je-li D_1 zjemněním rozdělení D, pak $S(D) \geqq S(D_1) \geqq s(D_1) \geqq s(D)$; jsou-li D a D' dvě libovolná rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, je vždy $S(D) \geqq s(D')$.

Důkaz prvé části provedeme tak, že si budeme myslit, že rozdělení D_1 vznikne z rozdělení D tak, že k dělicím bodům rozdělení D přidáváme další dělicí body rozdělení D_1 postupně jeden po druhém. Všimněme si nejprve jen dílčího intervalu $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$, který do součtu $S(D)$ přispívá příspěvkem $M_k \,.\, \Delta x_k$ a do součtu $s(D)$ příspěvkem $m_k \,.\, \Delta x_k$. Přidáme-li sem další dělicí bod ξ tak, že $x_{k-1} < \xi < x_k$, dostaneme z intervalu $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$ dva intervaly $\langle x_{k-1}, \xi\rangle$, $\langle \xi, x_k\rangle$. V intervalu $\langle x_{k-1}, \xi\rangle$ má funkce f supremum M_k' a infimum m_k' a v intervalu $\langle \xi, x_k\rangle$ má supremum M_k'' a infimum m_k''. Tyto dva intervaly přispívají do součtu $S(D_1)$ hodnotou

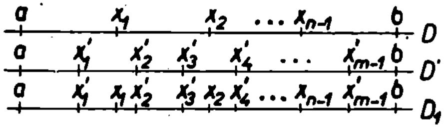
$$M_k'(\xi - x_{k-1}) + M_k''(x_k - \xi) \leqq M_k(\xi - x_{k-1}) + \\ + M_k(x_k - \xi) = M_k(x_k - x_{k-1}) = M_k \,.\, \Delta x_k,$$

neboť M_k je supremum v celém k-tém dílčím intervalu, takže $M_k' \leqq M_k$, $M_k'' \leqq M_k$. Podobně oba intervaly přispívají k součtu $s(D_1)$ hodnotou

$$m_k'(\xi - x_{k-1}) + m_k''(x_k - \xi) \geqq m_k(\xi - x_{k-1}) + \\ + m_k(x_k - \xi) = m_k(x_k - x_{k-1}) = m_k \,.\, \Delta x_k,$$

neboť m_k je infimum v celém k-tém dílčím intervalu, takže $m'_k \geqq m_k$, $m''_k \geqq m_k$. Totéž platí, přidáme-li kterýkoli další dělicí bod, takže $S(D_1) \leqq S(D)$ a $s(D_1) \geqq s(D)$. Ježto dále vždy $S(D_1) \geqq s(D_1)$, máme celkem $S(D) \geqq S(D_1) \geqq s(D_1) \geqq \geqq s(D)$.

Máme-li dále dvě libovolná různá rozdělení D a D' intervalu $\langle a, b \rangle$, existuje vždy takové rozdělení D_1, které je současně zjemněním obou. Stačí totiž zahrnout do rozdělení D_1 všecky dělicí body rozdělení D i všecky dělicí body rozdělení D' (viz obr. 52). Takto vzniklé rozdělení D_1 obsahuje všecky



Obr. 52

dělicí body rozdělení D a je tedy jeho zjemněním. Rozdělení D_1 však také obsahuje všecky dělicí body rozdělení D' a je tedy také jeho zjemněním. Proto podle toho, co bylo výše dokázáno, je $S(D) \geqq S(D_1)$ a zároveň $s(D_1) \geqq s(D')$ čili $S(D) \geqq s(D')$, neboť $S(D_1) \geqq s(D_1)$, t. j. žádný horní součet není nikdy menší než kterýkoli dolní součet.

Nejjednodušší rozdělení D_0 vzniká pro $n = 1$, t. j. pro $x_0 = a$, $x_1 = b$, tedy když necháme interval $\langle a, b \rangle$ nerozdělený. Pak horní součet $S(D_0)$ má pouze jediný člen $M(b - a)$, kde M je supremum funkce f v celém intervalu $\langle a, b \rangle$, a také dolní součet $s(D_0)$ má pouze jediný člen $m(b - a)$, kde m je infimum funkce f v intervalu $\langle a, b \rangle$. Poněvadž každé rozdělení D možno považovat za zjemnění rozdělení D_0, je vždy

$$M(b - a) \geqq S(D) \geqq s(D) \geqq m(b - a).$$

Množina všech horních součtů i množina všech dolních součtů jsou tedy množiny omezené, které podle vět na str. 12

mají určité supremum a infimum. Infimum množiny horních součtů označujeme názvem *horní integrál* funkce f od a do b a užíváme pro ně znaku

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

a podobně supremum množiny dolních součtů označujeme názvem *dolní integrál* funkce f od a do b a užíváme pro ně znaku

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jestliže se obě takto definovaná čísla sobě rovnají, užíváme pro ně společného názvu *integrál* funkce f od a do b (někdy říkáme také *určitý integrál* funkce f od a do b) a značíme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Funkce f se jmenuje *funkce integrovaná*, číslo a se jmenuje *dolní mez*, číslo b se jmenuje *horní mez*, písmeno x se nazývá *integrační proměnná*.

Poznámka. Aby měly vyslovené definice smysl, je jasné, že funkce f musí být v intervalu $\langle a, b\rangle$ omezená; kdyby totiž omezená nebyla, neměly by její hodnoty v intervalu $\langle a, b\rangle$ suprema nebo infima a nemělo by smysl hovořit o horních nebo o dolních součtech (nebo o obojím).

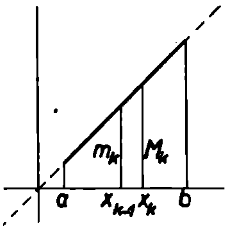
Věta **32.** Je-li funkce f omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$, je

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geqq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Je-li funkce f omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$, pak podle předcházející poznámky oba integrály existují. Je zřejmé, že horní integrál nemůže být menší než dolní integrál, neboť kdyby bylo $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x < \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$, znamenalo by to, že existuje číslo K, které má tu vlastnost, že

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x < K < \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Číslo K je předně větší než infimum množiny horních součtů, a proto podle věty na str. 12 existuje takové rozdělení D, že $S(D) < K$. Číslo K je za druhé menší než supremum množiny dolních součtů, a proto podle věty na str. 12 existuje takové rozdělení D', že $s(D') > K$ čili $S(D) < s(D')$. To však není možné, neboť to odporuje výše dokázané pomocné větě.



Obr. 53

Příklad 35. Vypočteme horní a dolní integrál funkce $f(x) = x$ od a do b, kde $a < b$. Tato funkce je v intervalu $\langle a, b\rangle$ omezená, a proto oba integrály existují. Abychom si zjednodušili počet, volíme rozdělení D_n tak, že interval $\langle a, b\rangle$ rozdělíme na n stejných dílů. Délku každého dílčího intervalu označíme $\delta = \dfrac{b-a}{n}$; to značí, že $\Delta x_k = \delta$ pro všecka přirozená čísla k od 1 do n. Supremum funkce f v k-tém dílčím intervalu je $M_k = a + k\delta$ a infimum v témže intervalu je $m_k = a + (k-1)\,\delta$ (obr. 53). Pak je

$$S(D_n) = (a+\delta)\,\delta + (a+2\delta)\,\delta + (a+3\delta)\,\delta + \ldots + (a + n\delta)\,\delta = na\delta + (1+2+3+\ldots+n)\,\delta^2 = na\delta + \tfrac{1}{2}n(n+1)\,\delta^2,$$

$$s(D_n) = a\delta + (a+\delta)\,\delta + (a+2\delta)\,\delta + \ldots + [a + (n-1)\,\delta]\,\delta = na\delta + [1+2+\ldots+(n-1)]\,\delta^2 = na\delta + \tfrac{1}{2}n(n-1)\,\delta^2,$$

neboť podle příkladu 9 je $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$, $1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{1}{2}(n-1)\,n$. Protože $n\delta = b - a$, proto

$$S(D_n) = a(b-a) + \tfrac{1}{2}(b-a)^2 + \tfrac{1}{2}(b-a)\,\delta = \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2) + \\ + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(b-a)^2}{n},$$

$$s(D_n) = a(b-a) + \tfrac{1}{2}(b-a)^2 - \tfrac{1}{2}(b-a)\,\delta = \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2) - \\ - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(b-a)^2}{n}.$$

Pro různá n dostáváme různé hodnoty $S(D_n)$ a $s(D_n)$. Nám jde o infimum množiny horních součtů pro všecka možná rozdělení a o supremum množiny dolních součtů opět pro všecka možná rozdělení. Určitě je

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq \lim_{n\to\infty} S(D_n), \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geqq \lim_{n\to\infty} s(D_n),$$

neboť zvětšováním n vybíráme z množiny všech rozdělení určitou posloupnost. Protože však $\lim_{n\to\infty} S(D_n) = \lim_{n\to\infty} s(D_n) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ a dolní integrál nemůže být podle věty 32 větší než horní integrál, musí se oba integrály sobě rovnat. Pak také existuje integrál funkce $f(x) = x$ od a do b. Dostáváme tedy

$$\overline{\int_a^b} x\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} x\,\mathrm{d}x = \int_a^b x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

V další kapitole však odvodíme mnohem jednodušší methodu pro výpočet určitých integrálů.

Příklad 36. Funkce f budiž definována takto:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{je-li } x \text{ racionální}, \\ 0, & \text{je-li } x \text{ iracionální}. \end{cases}$$

Hledáme opět horní a dolní integrál této funkce od a do b ($a < b$). Interval $\langle a, b\rangle$ rozdělíme rozdělením D na n dílčích intervalů o šířkách $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, při čemž $\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n = b - a$. V každém dílčím intervalu je $M_k = 1$, $m_k = 0$, neboť každý dílčí interval obsahuje jak hodnoty racionální, tak i iracionální. Proto

$$S(D) = 1 \,.\, \Delta x_1 + 1 \,.\, \Delta x_2 + \ldots + 1 \,.\, \Delta x_n = b - a,$$
$$s(D) = 0 \,.\, \Delta x_1 + 0 \,.\, \Delta x_2 + \ldots + 0 \,.\, \Delta x_n = 0.$$

Poněvadž žádný z těchto součtů není závislý na rozdělení D, je

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = b - a, \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

V tomto příkladě je tedy horní integrál různý od dolního integrálu.

Věta **33.** Je-li funkce f spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$, existuje integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Důkaz. Poněvadž f je funkce spojitá v $\langle a, b\rangle$, je podle věty 20 v tomto intervalu omezená. Proto podle poznámky na str. 89 existuje horní i dolní integrál od a do b. Abychom ukázali, že existuje integrál, musíme dokázat, že horní integrál je roven dolnímu. Zvolme libovolné číslo $\gamma > 0$ a položme $\varepsilon = \dfrac{\gamma}{b - a}$. Pak podle věty 22 existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro každá dvě čísla x_1, x_2 z $\langle a, b\rangle$, která vyhovují nerovnosti $|x_1 - x_2| < \delta$, platí $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Sestrojme nyní takové rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$, aby $\Delta x_k < \delta$ pro každé k. To je zřejmě možné, jen je třeba volit dělicí body rozdělení D dosti hustě. Protože

$$S(D) \geqq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geqq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geqq s(D),$$

proto

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq S(D) - s(D) =$$

$$= (M_1 - m_1)\,\Delta x_1 + (M_2 - m_2)\,\Delta x_2 + \ldots +$$

$$+ (M_n - m_n)\,\Delta x_n,$$

při čemž M_k, m_k je supremum a infimum funkce f v k-tém dílčím intervalu $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$. Těchto hodnot dosáhne funkce f ve dvou bodech ξ_k, η_k tohoto intervalu. Protože je šířka k-tého dílčího intervalu menší než δ, je $|\xi_k - \eta_k| < \delta$. Proto také $M_k - m_k < \varepsilon = \dfrac{\gamma}{b-a}$ (absolutní hodnota je zbytečná, neboť víme, že $M_k \geqq m_k$). Je tedy

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x < \frac{\gamma}{b-a}\,(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots +$$

$$+ \Delta x_n) = \gamma, \tag{a}$$

neboť součet $\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n = b - a$. Číslo γ je zcela libovolné, je omezeno pouze podmínkou $\gamma > 0$. Z toho plyne

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

neboť kdyby byl rozdíl obou integrálů roven jakémukoliv kladnému číslu $k > 0$, pak by nerovnost (a) neplatila pro $\gamma < k$ a to není možné.

Poznamenejme ještě, že obrácená věta neplatí; integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ může existovat a funkce f nemusí být v intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá. Omezíme se však většinou jen na vyšetřování integrálů spojitých funkcí.

Věta **34**. Jestliže pro každé x z intervalu $\langle a, b\rangle$ platí $f(x) \leqq g(x)$ a jestliže existují integrály $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, pak $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Důkaz. Nazveme D libovolné rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Poněvadž obě dané funkce mají integrál v intervalu $\langle a, b\rangle$, mají také horní integrál i dolní integrál a jsou v intervalu $\langle a, b\rangle$ omezené podle poznámky na str. 89. Označíme-li M_k supremum hodnot $f(x)$ v k-tém dílčím intervalu, a M'_k supremum hodnot $g(x)$ v k-tém dílčím intervalu, je $M_k \leqq M'_k$. Kdyby totiž bylo $M_k > M'_k$, existovalo by podle základních vlastností suprema (viz str. 12) takové x_1, pro které by bylo $f(x_1) > M'_k$ a ovšem také $M'_k \geqq g(x_1)$, takže by bylo $f(x_1) > > g(x_1)$, a to není možné. Označíme-li $S(D)$ horní součet příslušný k funkci f, $S'(D)$ horní součet příslušný k funkci g (a k rozdělení D), je zřejmě také $S(D) \leqq S'(D)$. Označíme-li ještě $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $I' = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, je podle definice integrálu $I \leqq S(D)$ a $I' \leqq S'(D)$. Protože $S(D) \leqq S'(D)$, proto také $I \leqq S'(D)$, t. j. I není větší než žádný horní součet $S'(D)$ a také není větší než jejich infimum, t. j. $I \leqq I'$. Kdyby totiž bylo $I > I'$, pak by podle vlastností infima (str. 12) existovalo takové rozdělení D_1, že $S'(D_1) < I$. Vedle toho jistě je $I \leqq \leqq S(D_1)$; bylo by tedy $S'(D_1) < S(D_1)$ a to není možné.

Věta **35**. Je-li funkce f omezená v intervalu $\langle a, c\rangle$ a je-li b libovolný vnitřní bod tohoto intervalu, pak

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_b^c} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_b^c} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Poněvadž funkce f je omezená v intervalu $\langle a, c\rangle$, je také omezená v intervalech $\langle a, b\rangle$, $\langle b, c\rangle$. Proto také v každém z těchto intervalů existuje horní i dolní integrál. Pro zkrácení označme

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x = I,\quad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = I_1,\quad \overline{\int_b^c} f(x)\,\mathrm{d}x = I_2.$$

$$\underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x = K,\quad \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = K_1,\quad \underline{\int_b^c} f(x)\,\mathrm{d}x = K_2.$$

Je-li D_1 libovolné rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ a D_2 libovolné rozdělení intervalu $\langle b, c\rangle$, pak rozdělení D_1 a D_2 dohromady představují jakési rozdělení D celého intervalu $\langle a, c\rangle$, jehož jedním (pevným) dělicím bodem je bod b. Podle definice horních a dolních součtů je zřejmě

$$S(D_1) + S(D_2) = S(D),\quad s(D_1) + s(D_2) = s(D).$$

a) Protože I_1 je infimem horních součtů $S(D_1)$, proto pro každé rozdělení D_1 platí $I_1 \leqq S(D_1)$. Z podobného důvodu je $I_2 \leqq S(D_2)$ pro každé rozdělení D_2. Tedy také

$$I_1 + I_2 \leqq S(D_1) + S(D_2) = S(D) \tag{b}$$

pro každé rozdělení D, které má jeden dělicí bod v bodě b. Při tom $I_1 + I_2$ je infimem horních součtů příslušných ke všem rozdělením D. Zvolíme-li totiž libovolné číslo $\delta > 0$, existuje takové rozdělení $\overline{D_1}$ intervalu $\langle a, b\rangle$, že $S(\overline{D_1}) < I_1 + \frac{1}{2}\delta$, a takové rozdělení $\overline{D_2}$ intervalu $\langle b, c\rangle$, že $S(\overline{D_2}) < I_2 + \frac{1}{2}\delta$. Dělicí body rozdělení $\overline{D_1}$ a $\overline{D_2}$ dohromady tvoří rozdělení $\overline{D}$, jehož jedním dělicím bodem je bod b; při tom

$$S(\overline{D}) = S(\overline{D_1}) + S(\overline{D_2}) < I_1 + I_2 + \delta.$$

Je tedy $I_1 + I_2$ vskutku infimem horních součtů příslušných ke všem rozdělením D, která mají jeden dělicí bod v bodě b, neboť splňuje obě základní vlastnosti infima (str. 12).

Protože I je infimem horních součtů pro **všecka** rozdělení a ne jen pro ta, která mají jeden dělicí bod v bodě b, musí

$$I \leqq I_1 + I_2.$$

Dejme tomu, že $I < I_1 + I_2$. Podle základní vlastnosti infima existuje pak takové rozdělení D' intervalu $\langle a, c\rangle$, že

$$S(D') < I_1 + I_2. \tag{c}$$

Vezměme nyní některé rozdělení D intervalu $\langle a, c\rangle$, které má v bodě b jeden dělicí bod, a utvořme společné zjemnění D'' obou rozdělení D a D'. Podle pomocné věty musí

$$S(D'') \leqq S(D'). \tag{d}$$

Rozdělení D'' však má v bodě b jeden dělicí bod. Proto podle (b)

$$I_1 + I_2 \leqq S(D''). \tag{e}$$

Porovnáním vztahů (c), (d), (e) vidíme, že $I_1 + I_2 < I_1 + I_2$, což není možné. Není tedy možno, aby $I < I_1 + I_2$, nýbrž musí $I = I_1 + I_2$.

b) Protože K_1 je supremem dolních součtů $s(D_1)$, proto $K_1 \geqq s(D_1)$ pro každé rozdělení D_1. Z téhož důvodu $K_2 \geqq s(D_2)$ pro každé rozdělení D_2. Tedy také

$$K_1 + K_2 \geqq s(D_1) + s(D_2) = s(D) \tag{b'}$$

pro každé rozdělení D, které má jeden dělicí bod v bodě b. Při tom $K_1 + K_2$ je supremem dolních součtů příslušných ke všem rozdělením D. Zvolíme-li totiž libovolné číslo $\delta > 0$, existuje takové rozdělení $\overline{D_1}$ intervalu $\langle a, b\rangle$, že $s(\overline{D_1}) > K_1 - \frac{1}{2}\delta$, a takové rozdělení $\overline{D_2}$ intervalu $\langle b, c\rangle$, že $s(\overline{D_2}) > K_2 - \frac{1}{2}\delta$. Dělicí body rozdělení $\overline{D_1}$ a $\overline{D_2}$ dohromady tvoří rozdělení $\overline{D}$, jehož jedním dělicím bodem je bod b; při tom

$$s(\overline{D}) = s(\overline{D_1}) + s(\overline{D_2}) > K_1 + K_2 - \delta.$$

Je tedy $K_1 + K_2$ vskutku supremem dolních součtů příslušných ke všem rozdělením D, která mají jeden dělicí bod v bodě b, neboť splňuje obě základní vlastnosti suprema (str. 12).

Protože K je supremem dolních součtů pro všecka rozdělení a ne jen pro ta, která mají jeden dělicí bod v bodě b, musí

$$K \geqq K_1 + K_2.$$

Dejme tomu, že $K > K_1 + K_2$. Podle základní vlastnosti suprema existuje pak takové rozdělení D' intervalu $\langle a, c \rangle$, že

$$s(D') > K_1 + K_2. \tag{c'}$$

Vezměme opět některé rozdělení D intervalu $\langle a, c \rangle$, které má v bodě b jeden dělicí bod, a utvořme společné zjemnění D'' obou rozdělení D a D'. Podle pomocné věty musí

$$s(D'') \geqq s(D'). \tag{d'}$$

Rozdělení D'' však má v bodě b jeden dělicí bod. Proto podle (b′)

$$K_1 + K_2 \geqq s(D''). \tag{e'}$$

Porovnáním vztahů (c′), (d′), (e′) vychází, že $K_1 + K_2 > > K_1 + K_2$, což není možné. Není tedy možno, aby $K > > K_1 + K_2$, nýbrž musí $K = K_1 + K_2$.

Z věty 35 odvodíme dva důležité důsledky:

Důsledek I. Je-li $a < b < c$ a existují-li integrály $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_b^c f(x)\,dx$, existuje také integrál $\int_a^c f(x)\,dx$, při čemž

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx. \tag{30}$$

Protože existuje integrál $\int_a^b f(x)\,dx$, je funkce f v intervalu $\langle a, b \rangle$ omezená. Z podobného důvodu je funkce f omezená také v intervalu $\langle b, c \rangle$. Je tedy omezená v celém intervalu

$\langle a, c\rangle$ a má v něm horní integrál I i dolní integrál K. Proto podle věty 35

$$I = \overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_b^c} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$K = \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_b^c} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

takže $I = K$, čímž je prokázána existence integrálu $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ a správnost rovnice (30).

Důsledek **2**. Je-li $a < c < d < b$ a existuje-li integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, existují také integrály $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Protože existuje integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, je funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$ omezená. Proto je omezená i v intervalech $\langle a, c\rangle$, $\langle c, d\rangle$, $\langle d, b\rangle$ a existuje v nich horní i dolní integrál. Pak je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_c^d} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_d^b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_c^d} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_d^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Odečtením obou rovnic vychází

$$[\overline{\int_a^c} f(x)\,dx - \underline{\int_a^c} f(x)\,dx] + [\overline{\int_c^d} f(x)\,dx - \underline{\int_c^d} f(x)\,dx] +$$

$$+ [\overline{\int_d^b} f(x)\,dx - \underline{\int_d^b} f(x)\,dx] = 0.$$

Máme zde tři členy; v žádném z nich není záporné číslo, neboť podle věty 32 nemůže být horní integrál menší než dolní integrál. Součet těchto tří členů je roven nule, musí tedy každý z nich být roven nule; proto

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,dx = \underline{\int_a^c} f(x)\,dx, \quad \overline{\int_c^d} f(x\,dx) = \underline{\int_c^d} f(x)\,dx,$$

$$\overline{\int_d^b} f(x)\,dx = \underline{\int_d^b} f(x)\,dx,$$

což zaručuje existenci integrálů, o nichž věta mluví.

Dosud jsme definovali integrál funkce f od a do b jen pro případ $a < b$. Toto omezení je nepohodlné, a proto položíme

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \text{ kdykoli je hodnota } f(a) \text{ definována}, \tag{31}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx, \text{ když } a > b. \tag{32}$$

Je-li M supremum a m infimum hodnot funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$ a má-li tato funkce integrál od a do b, plyne z nerovností na str. 88

$$M(b - a) \geqq \int_a^b f(x)\,dx \geqq m(b - a),$$

pokud $a < b$. To lze přepsat ve tvaru

$$M \geqq \frac{1}{b - a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx \geqq m.$$

Poslední nerovnost však je správná i pro $a > b$, neboť

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a-b} \cdot \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta **36.** Existují-li integrály $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$, existuje také integrál $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$, při čemž je vždy

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Je-li $a = b$, je věta správná, neboť první člen na pravé straně je roven nule a druhý člen je roven levé straně. Je-li $b = c$, je druhý člen na pravé straně roven nule a prvý člen je roven levé straně. Je-li $a = c$, pak naše věta zní

$$0 = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

a to je také správné.

Jsou-li a, b, c tři libovolná čísla navzájem různá, je možno šest různých pořadí podle velikosti:

I. Pro případ $a < b < c$ je věta totožná s důsledkem 1 věty 35. Při tom z existence kterýchkoli dvou integrálů plyne existence třetího.

II. Je-li $a < c < b$, pak podle I. platí $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x =$
$= \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, takže $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x =$
$= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$

III. Pro $b < a < c$ je $\int_b^c f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx$,

takže $\int_a^c f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx +$

$+ \int_b^c f(x)\,dx$.

IV. Pro $b < c < a$ je $\int_b^a f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx$, tak-

že $\int_a^c f(x)\,dx = -\int_c^a f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx =$

$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$.

V. Pro $c < a < b$ je $\int_c^b f(x)\,dx = \int_c^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$, takže

$\int_a^c f(x)\,dx = -\int_c^a f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx +$

$+ \int_b^c f(x)\,dx$.

VI. Pro $c < b < a$ je $\int_c^a f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx$, tak-

že $\int_a^c f(x)\,dx = -\int_c^a f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx =$

$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$.

Má-li funkce f integrál v nějakém uzavřeném intervalu J, má podle důsledku 2 věty 35 také integrál v každém intervalu, který je částí intervalu J. Tu můžeme horní mez považovat za proměnnou a hodnota integrálu se potom jeví jako funkce této proměnné horní meze. Zavedeme si označení

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Integrační proměnnou jsme označili t, abychom ji nepletli s proměnnou horní mezí x.

Věta **37**. Je-li $a < b$ a má-li funkce f integrál od a do b, je funkce $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$.

Důkaz. Poněvadž funkce f má integrál od a do b, je v intervalu $\langle a, b\rangle$ omezená, t. j. pro všechna x z $\langle a, b\rangle$ platí $|f(x)| < k$, kde $k > 0$ je vhodné číslo.

Je-li předně c vnitřním bodem intervalu $\langle a, b\rangle$, musíme dokázat, že funkce F je spojitá v bodě c, t. j. že platí $\lim\limits_{x\to c} F(x) = F(c)$ (str. 50) čili že funkce $F(x) - F(c)$ je v okolí bodu c nekonečně malá (věta 5). Zvolíme-li libovolné číslo $\varepsilon > 0$, je třeba ukázat, že existuje takové okolí J_x bodu c, že pro všechna $x \neq c$ z J_x je $|F(x) - F(c)| < \varepsilon$. Spočtěme tedy výraz $F(x) - F(c)$. Platí

$$F(x) - F(c) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^c f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^x f(t)\,dt -$$
$$- \int_a^c f(t)\,dt \doteq \int_c^x f(t)\,dt.$$

Nechť M značí supremum a m infimum hodnot $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$.

Poněvadž $M < k$, $m > -k$, je podle poznámky na str. 99

$$-k < \frac{1}{x - c}\int_c^x f(t)\mathrm{d}t < k \text{ a odtud plyne}$$

$$|F(x) - F(c)| = \left|\int_c^x f(t)\,dt\right| < k|x - c|.$$

Zvolíme-li tedy libovolné $\varepsilon > 0$, pak pro všecka x, pro něž platí $|x - c| < \frac{\varepsilon}{k}$, je splněna nerovnost $|F(x) - F(c)| < \varepsilon$. Nerovnost $|x - c| < \frac{\varepsilon}{k}$ určuje však podle (3) na str. 16 interval $c - \frac{\varepsilon}{k} < x < c + \frac{\varepsilon}{k}$, jenž je okolím bodu c.

Za druhé je třeba dokázat, že funkce F je v bodě a spojitá zprava, t. j. že $\lim\limits_{x \to a+} F(x) = F(a)$. Tu platí

$$|F(x) - F(a)| = \left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt\right| = \left|\int_a^x f(t)\,dt\right| <$$
$$< k(x - a).$$

Tento výraz je menší než ε pro každé x, které vyhovuje nerovnosti $0 < x - a < \frac{\varepsilon}{k}$ čili $a < x < a + \frac{\varepsilon}{k}$, což je pravé okolí bodu a (s výjimkou tohoto bodu). Je tedy $F(x)$ funkce nekonečně malá zprava v okolí bodu a.

Za třetí je třeba dokázat, že funkce F je v bodě b spojitá zleva, t. j. že $\lim\limits_{x \to b-} F(x) = F(b)$. Tu je

$$|F(x) - F(b)| = \left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt\right| = \left|\int_b^x f(t)\,dt\right| <$$
$$< k(b - x).$$

Tento výraz je menší než ε pro každé x, které vyhovuje nerovnostem $0 < b - x < \frac{\varepsilon}{k}$, t. j. $b - \frac{\varepsilon}{k} < x < b$; to je však levé okolí bodu b (s výjimkou toho bodu).

Věta **38**. Budiž c vnitřní bod intervalu $\langle a, b \rangle$. Existuje-li integrál $F(c) = \int_a^c f(t)\,dt$ a je-li funkce f spojitá v bodě c, pak $F'(c) = f(c)$.

Důkaz. Je-li funkce f spojitá v bodě c, znamená to podle definice na str. 51, že ke každému okolí J_y bodu $f(c)$ existuje takové okolí J_t bodu c, že pro všecka t z J_t padne hodnota $f(t)$ do J_y.*) Zvolme libovolné číslo $\varepsilon > 0$ a za okolí J_y volme interval $(f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon)$. To znamená: Ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové okolí J_t bodu c, že pro všecka t z J_t platí $f(c) - \varepsilon < f(t) < f(c) + \varepsilon$. Utvořme nyní výraz

$$\frac{F(c+h) - F(c)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{h}\cdot\int_c^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Padne-li $c + h$ do J_t, což nastane, je-li číslo $|h|$ dostatečně malé, je podle poznámky na str. 99

$$f(c) - \varepsilon < \frac{1}{h}\cdot\int_c^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t < f(c) + \varepsilon$$

čili

$$\left|\frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)\right| < \varepsilon.$$

To znamená, že funkce $\dfrac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c)$ proměnné h je nekonečně malá v okolí bodu 0, takže

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c).$$

Limita na levé straně není však nic jiného než derivace $F'(c)$. Tím je věta dokázána.

Je-li funkce f spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$, pak podle věty 33 a podle důsledku 2 věty 35 existuje pro každé x z $\langle a, b\rangle$ integrál $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Tento integrál je funkcí proměnné x

---

*) Proměnnou značíme nyní t.

a tato funkce je podle věty 37 v intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá. Podle věty 38 derivace $F'(x) = f(x)$ pro každý vnitřní bod intervalu $\langle a, b\rangle$. Tohoto výsledku budeme v dalších kapitolách vydatně používat.

Cvičení.

41. a) Dokažte větu: Je-li funkce f omezená v intervalu $\langle a, b\rangle$, pak

$$\overline{\int_a^b} k\, f(x)\, \mathrm{d}x = k \overline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{d}x, \quad \underline{\int_a^b} k\, f(x)\, \mathrm{d}x = k \underline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{d}x$$

pro každé $k \geqq 0$ a

$$\overline{\int_a^b} k\, f(x)\, \mathrm{d}x = k \underline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{d}x, \quad \underline{\int_a^b} k\, f(x)\, \mathrm{d}x = k \overline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{d}x$$

pro $k < 0$. b) Odtud plyne: Má-li funkce $f(x)$ integrál od a do b, má také funkce $k\, f(x)$ integrál od a do b, při čemž je

$$\int_a^b k\, f(x)\, \mathrm{d}x = k \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x.$$

42. a) Jsou-li funkce f a g omezené v intervalu $\langle a, b\rangle$, pak

$$\overline{\int_a^b} [f(x) + g(x)]\, \mathrm{d}x \leqq \overline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{d}x + \overline{\int_a^b} g(x)\, \mathrm{d}x,$$

$$\underline{\int_a^b} [f(x) + g(x)]\, \mathrm{d}x \geqq \underline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{d}x + \underline{\int_a^b} g(x)\, \mathrm{d}x.$$

Dokažte. b) Odtud plyne: Mají-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ integrály od a do b, má také funkce $f(x) + g(x)$ integrál od a do b, při čemž

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x.$$

43. Mají-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ integrály od a do b, má také funkce $k\,f(x) + h\,g(x)$, kde k a h jsou daná čísla, integrál od a do b, při čemž

$$\int_a^b [k\,f(x) + h\,g(x)]\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + h\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

44. Má-li funkce $f(x)$ integrál od a do b $(a < b)$ a je-li $\varepsilon > 0$ libovolné číslo, existuje takové rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$, že $S(D) - s(D) < \varepsilon$. Dokažte.

45. Má-li funkce f integrál od a do b $(a < b)$ a je-li $f(x) \geqq 0$ pro všecka x z $\langle a, b\rangle$, pak $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqq 0$. Dokažte.

46. Je-li $a > b$ a existují-li integrály $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, při čemž pro každé x z intervalu $\langle b, a\rangle$ je $f(x) \leqq g(x)$, potom $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. Dokažte.

47. Je-li funkce f spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$, existuje vnitřní bod c tohoto intervalu tak, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b - a)\,.\,f(c)$. Dokažte.

48. Je-li $a < b$, označme znakem J interval $\langle a, b\rangle$; je-li $a > b$, označme znakem J interval $\langle b, a\rangle$. Platí věta: Existuje-li integrál $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ a je-li c libovolný bod z J, potom

a) funkce $F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ proměnné x je spojitá v intervalu J;

b) je-li funkce f spojitá ve vnitřním bodě x z J, je $F'(x) = f(x)$. Dokažte.

49. Písmeno J znamená totéž jako v předcházejícím cvičení. Platí věta: Existuje-li integrál $\int_a^b f(t)\,dt$ a je-li c libovolný bod z J, potom

a) funkce $F(x) = \int_x^c f(t)\,dt$ proměnné x je spojitá v intervalu J;

b) je-li funkce f spojitá ve vnitřním bodě x z J, je $F'(x) = -f(x)$. Dokažte.

50. Písmeno J znamená totéž jako ve cvič. 48. Existuje-li integrál $\int_a^b f(t)\,dt$ a je-li $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$, kde c a x jsou libovolné body z J, platí $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$. Dokažte.

VI. NEURČITÝ INTEGRÁL

Nechť je dána funkce f definovaná v jakémsi otevřeném intervalu J_x; hledáme funkci F, která má tu vlastnost, že pro všecka x z J_x je

$$F'(x) = f(x). \tag{a}$$

Funkce F se jmenuje *primitivní funkce* k funkci f v intervalu J_x. Často jí říkáme také *neurčitý integrál* funkce f v intervalu J_x. Pro primitivní funkci budeme užívat označení

$$F(x) = \int f(x)\,dx, \tag{b}$$

při čemž rovnost (b) značí přesně totéž jako rovnost (a). Symbol $\int f(x)\,dx$ čteme zpravidla slovy „integrál $f(x)\,dx$“. Funkce f se nazývá *funkce integrovaná* a proměnná x se jmenuje *integrační proměnná*. Nevadí, že volíme tytéž názvy jako u určitého integrálu, neboť mezi oběma integrály je, jak ihned uvidíme, úzká souvislost.

Úloha nalézt primitivní funkci F k dané funkci f je tedy obrácená úloha k úloze nalézt derivaci f dané funkce F.