Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu

IV. Derivace

In: Karel Hruša (author): Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu. (Czech). Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. pp. 64–85.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403347

23. Jak třeba volit hodnotu k, aby funkce

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0 \\ k & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

byla spojitá v bodě 0?

24. Pro která x není spojitá funkce a) $\dfrac{x}{\sin x}$, b) $\dfrac{\cos \frac{1}{2}\pi x}{x(x-1)}$?

25. V kterých intervalech je spojitá funkce a) $\operatorname{tg} x$, b) $\operatorname{cotg} x$?

26. Nalezněte: a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 2x}{x^3 - 3x^2 + 2x}$, b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 - 3x^2 + 2x}$, c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^4 - 4x^3 + 1}{(x-1)^2}$.

27. Určete a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$, b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$, c) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} \dfrac{1 - \sin x}{\frac{1}{2}\pi - x}$.

28. Dokažte, že a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3} \right) = -1$,

b) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{4}\pi} \dfrac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$,

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n^2} + \ldots + \dfrac{n}{n^2} \right) = \frac{1}{2}$.

29. Je-li funkce $f(x)$ spojitá v bodě a, je i funkce $|f(x)|$ spojitá v bodě a. Dokažte.

30. Funkce $f(x)$ a $g(x)$ nejsou spojité v bodě a. Může se stát, že funkce $f(x) + g(x)$ je spojitá v bodě a?

IV. DERIVACE

Nejdůležitější místo mezi všemi limitami zaujímá limita, kterou označujeme názvem *derivace*. Definujeme ji takto:

Derivací funkce f v bodě a nazýváme (vlastní) limitu

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

S pojmem derivace se setkáváme při různých úvahách fysikálních i geometrických. Ukážeme si dva typické příklady takových úvah.

Příklad 25. Mysleme si bod M, který se pohybuje po přímce. Jeho polohu udáváme souřadnicí x měřenou od určitého počátku O. Tato souřadnice se mění s časem. Každému časovému údaji t odpovídá jediná a určitá poloha bodu M. Souřadnice x je tedy funkcí času t, t. j. $x = f(t)$. Vezměme si dva časové údaje, jejichž rozdíl je h. První z nich označme a, druhý pak bude $a + h$. Je-li $h > 0$, značí $a + h$ okamžik pozdější a a okamžik dřívější; je-li $h < 0$, je tomu naopak. Počítejme dráhu, kterou bod M urazí za dobu h. V okamžiku a má bod M souřadnici $f(a)$, v okamžiku $a + h$ má souřadnici $f(a + h)$; za dobu h tedy urazí dráhu $f(a + h) - f(a)$. Podíl

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

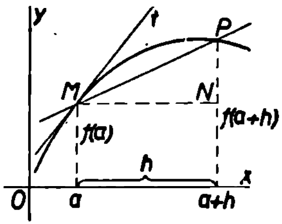
udává průměrnou rychlost bodu M od okamžiku a do okamžiku $a + h$, neboť je to dráha, kterou bod průměrně urazí za jednotku času. Zkracuje-li se rozdíl h obou časových údajů a blíží-li se při tom průměrná rychlost limitě

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

nazýváme tuto limitu okamžitá rychlost bodu M v okamžiku a. Okamžitá rychlost je tedy derivace funkce f v bodě a.

Příklad 26. Mějme funkci f spojitou v určitém intervalu. Grafickým znázorněním této funkce je jakási křivka $y = f(x)$

(obr. 41). Souřadnice x, y libovolného bodu této křivky jsou vázány rovnicí $y = f(x)$. Vezměme na křivce libovolně zvolený pevný bod M; jeho souřadnice jsou a, $f(a)$. Dále vytkněme na křivce ještě další bod P různý od M; jeho souřadnice označíme $a + h$, $f(a + h)$. Je-li bod P vpravo od bodu M, je $h > 0$, je-li vlevo, je $h < 0$. Přejdeme-li od bodu M do bodu P, zvětší se souřadnice a o přírůstek $MN = h$ a souřadnice $f(a)$ o přírůstek $NP = f(a + h) - f(a)$. Podíl



Obr. 41

$$\frac{NP}{MN} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

udává směrnici přímky MP. Blíží-li se přírůstek h k nule a blíží-li se při tom uvedený podíl limitě

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

nazýváme tuto limitu *směrnice tečny* křivky $y = f(x)$ v bodě M. Přímku t procházející bodem M, jejíž směrnice je rovna uvedené limitě, nazýváme *tečnou* křivky $y = f(x)$ v bodě M. Směrnice tečny je tedy rovna derivaci funkce f v bodě a.

Z toho je patrné, že pojem derivace hraje základní úlohu v mnohých problémech matematiky a fysiky.

Příklad 27. Jako příklad vypočteme derivaci funkce $f(x) = x^2$ v bodě a. Platí

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(a + h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2a + h) = 2a.$$

Není však nutno, aby každá funkce měla v každém bodě, v němž je definována, derivaci, neboť uvedená limita nemusí existovat.

Věta **23**. Má-li funkce f v bodě a derivaci, je v tom bodě spojitá.

Důkaz. Má-li funkce f v bodě a derivaci, existuje (vlastní) limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = D.$$

Pak je

$$\lim_{h\to 0} [f(a+h)-f(a)] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \, . \, h\right] =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \, . \lim_{h\to 0} h = D \, . \, 0 = 0.$$

Odtud plyne $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$ čili $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ a to značí, že funkce f je v bodě a spojitá.

Poznámka. Tuto větu lze také vyslovit ve tvaru: Není-li funkce f v bodě a spojitá, nemá v něm derivaci. Věta se však nedá obrátit: je-li funkce f v bodě a spojitá, nemusí mít v tomto bodě derivaci.

Příklad 28. Funkce $f(x) = |x|$, která je spojitá v bodě 0 (viz příklad 5), nemá v tomto bodě derivaci, neboť

a) pro $x \geqq 0$ je $f(x) = x$ a $\lim\limits_{h\to 0+} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0+} \dfrac{h}{h} = 1;$

b) pro $x \leqq 0$ je $f(x) = -x$ a $\lim\limits_{h\to 0-} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Poněvadž limita zprava není rovna limitě zleva, neexistuje limita v bodě 0 (věta 3). To, že funkce $f(x) = |x|$ nemá v bodě 0 derivaci, jeví se také na jejím grafu: křivka se skládá ze dvou částí, které se stýkají v bodě 0, v němž však křivka náhle mění svůj směr (obr. 13).

Derivace funkce f v bodě x je limita $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, která má jistou hodnotu; tato hodnota závisí na volbě čísla x. Ke každému číslu x, pro něž existuje derivace funkce f, je tak přiřazeno určité číslo, totiž hodnota derivace funkce f v bodě x. Je tedy derivace funkce f v bodě x opět funkcí proměnné x. Je zvykem označovat derivaci funkce f znakem f', takže derivaci funkce f v bodě x označujeme nejčastěji $f'(x)$. Značíme-li hodnotu funkce f v bodě x jediným písmenem, třeba y, označujeme derivaci znakem y'.

Protože budeme často počítat derivace, nebylo by vhodné postupovat po každé tak, jak jsme to učinili v příkladě 27. Proto si odvodíme několik vět, jimiž se počítání derivací usnadní.

Věta **24**. Derivace konstanty je v každém bodě rovna nule.

Důkaz. Je-li $f(x) = k$, kde k je konstanta, je také $f(x + h) = k$. Pak

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0.$$

Věta **25**. Derivace funkce $f(x) = x$ je v každém bodě rovna jedné.

Důkaz. Je-li $f(x) = x$, je $f(x + h) = x + h$, takže

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1.$$

Věta **26**. Nechť funkce f a g mají derivace f' a g'. Pak

a) funkce $k_1 f(x) + k_2 g(x)$, kde k_1 a k_2 jsou daná čísla, má v bodě x derivaci $k_1 f'(x) + k_2 g'(x)$;

b) funkce $f(x) \cdot g(x)$ má v bodě x derivaci $f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$;

c) funkce $\dfrac{1}{g(x)}$ má v bodě x, pro nějž $g(x) \neq 0$, derivaci $-\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}$.

Důkaz. Platí

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Potom

a) $$\lim_{h \to 0} \frac{k_1 f(x+h) + k_2 g(x+h) - k_1 f(x) - k_2 g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[k_1 \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + k_2 \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] =$$

$$= k_1 \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + k_2 \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} =$$

$$= k_1 \cdot f'(x) + k_2 \cdot g'(x).$$

b) Poněvadž $f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x) = f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)$,

proto

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} g(x+h) +$$

$$+ f(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$$

neboť podle věty 23 je $\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$, ježto funkce g je spojitá v bodě x.

c) Je-li $g(x) \neq 0$, existuje okolí J_x bodu x tak, že pro všecka $x + h$ z J_x je $g(x+h) \neq 0$ (věta 11). Proto

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{h \cdot g(x) \cdot g(x+h)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{-1}{g(x) \cdot g(x+h)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] =$$

$$= \frac{-1}{g(x)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}.\ ^{*)}$$

Z odvozených vět plyne několik důsledků, které si musíme pamatovat.

Označíme-li $f(x) = u$, $g(x) = v$, lze větu 26a zapsat ve tvaru

$$(k_1 u + k_2 v)' = k_1 u' + k_2 v'; \tag{21}$$

speciálně pro $k_1 = 1$ a $k_2 = 1$ nebo $k_2 = -1$

$$(u + v)' = u' + v',\ (u - v)' = u' - v'. \tag{22}$$

Odtud pro $v = k$, kde k je konstanta, podle věty 24

$$(u + k)' = u', \tag{23}$$

což se často vyslovuje slovy: aditivní konstanta (t. j. konstanta, která se přičítá) při derivování odpadá.

Podobně lze větu 26b zapsat ve tvaru

$$(uv)' = u'v + uv'. \tag{24}$$

Odtud pro $v = k$ dostáváme

$$(ku)' = ku', \tag{25}$$

---

*) $g^2(x)$ značí totéž jako $[g(x)]^2$.

což vyjadřujeme slovy: **multiplikativní konstanta** (t. j. konstanta, kterou se násobí) **zůstává při derivování beze změny.**

Konečně podle věty 26b a 26c je $\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \cdot \frac{1}{v}\right)' =$ $= u' \cdot \frac{1}{v} + u \cdot \left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, takže

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \text{ pokud } v \neq 0. \tag{26}$$

Dále dokážeme vzorec

$$(x^n)' = nx^{n-1} \tag{27}$$

platný při celém $n > 0$ pro každé x a při celém $n < 0$ pro každé $x \neq 0$. Důkaz pro $n > 0$ celé provedeme úplnou indukcí.

(1) $x' = 1 = 1 \cdot x^0$ pro každé x podle věty 25 (viz vzorec (4) na str. 24). Vzorec (27) tedy platí pro $n = 1$.

(2) Platí-li vzorec (27) pro nějaké n, t. j. je-li $(x^n)' = nx^{n-1}$, je podle vzorce (24)

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot x' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1)\, x^n,$$

takže vzorec (27) platí i pro $n + 1$. Vzorec (27) tedy platí pro každé přirozené číslo n.

Je-li $n < 0$ celé, položme $n = -m$, takže m je celé kladné. Dokázali jsme, že $(x^m)' = mx^{m-1}$, proto podle věty 26c pro $x \neq 0$ platí

$$(x^n)' = (x^{-m})' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{mx^{m-1}}{(x^m)^2} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}.$$

Vzorec (27) tedy platí i pro $n < 0$ celé a pro $x \neq 0$.

Vzorec (27) platí dokonce i pro $n = 0$ a pro $x \neq 0$, neboť tu je $x^0 = 1$ pro každé x, a pak podle věty 24 je $(x^0)' = 1' = 0 = 0 \,.\, x^{-1}$; to je správné, pokud $x \neq 0$.

Pro derivace funkcí $\sin x$ a $\cos x$ platí

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \tag{28}$$

jak si nyní dokážeme. Podle vzorců (18) je

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos(x+\frac{1}{2}h) \,.\, \sin\frac{1}{2}h}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\cos(x+\tfrac{1}{2}h) \,.\, \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h} = \cos x;$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin(x+\frac{1}{2}h) \,.\, \sin\frac{1}{2}h}{h} =$$

$$= -\lim_{h\to 0} \sin(x+\tfrac{1}{2}h) \,.\, \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h} = -\sin x,$$

neboť $\cos x$ a $\sin x$ jsou funkce spojité (věta 18) a $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h} = 1$ (vzorec (20)).

Na základě odvozených vztahů ukážeme, že platí

$$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\mathrm{cotg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \tag{29}$$

pro všecka x, pro něž se jmenovatel nerovná nule. Podle vzorců (26) a (28) máme

$$(\mathrm{tg}\, x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\text{pro } x \neq \tfrac{1}{2}(2k+1)\,\pi,\ k \text{ celé},$$

$$(\mathrm{cotg}\, x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\text{pro } x \neq k\pi,\ k \text{ celé}.$$

Na příkladech ukážeme, jak se užívá odvozených vzorců.

Příklad 29. $(2x^3 - \frac{1}{6}x^2 + x - 4)' = 6x^2 - \frac{1}{3}x + 1$ podle vzorců (21) a (27).

Příklad 30. $\left(\dfrac{ax + b}{cx + d}\right)' = \dfrac{a(cx + d) - (ax + b)\,c}{(cx + d)^2} =$

$= \dfrac{ad - bc}{(cx + d)^2}$ pro $x \neq -\dfrac{d}{c}$ a $c \neq 0$ podle vzorce (26).

Příklad 31. $(x \cos x)' = \cos x - x \sin x$ podle (24) a (28).

Příklad 32. $\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)' = \dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}$ pro $x \neq k\pi$, kde k je celé, podle (26) a (28).

V příkladech tohoto druhu je třeba stanovit podmínky, za nichž jsou uvedené výpočty správné (viz příklad 30 a 32). Není-li uvedeno žádné omezení, značí to, že výpočet platí pro každé x (příklad 29 a 31).

Někdy se může stát, že funkce nemá derivaci, neboť příslušná limita neexistuje, existuje však limita zprava nebo limita zleva (viz příklad 28). Pak říkáme, že funkce má v bodě x *derivaci zprava* (značka $f'_+(x)$) nebo *derivaci zleva* (značka $f'_-(x)$). Tak na příklad pro funkci $f(x) = |x|$ je $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$.

Je-li některá z limit

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}, \quad \lim_{h \to 0+} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

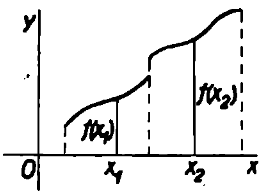
nevlastní, říkáme, že funkce f má v bodě x *nevlastní derivaci*, příp. *nevlastní derivaci zprava* nebo *nevlastní derivaci zleva*. Zpravidla však slovem derivace rozumíme derivaci, která není nevlastní a kterou někdy k zamezení nedorozumění označujeme názvem *derivace vlastní*.

Nyní zavedeme novou definici:

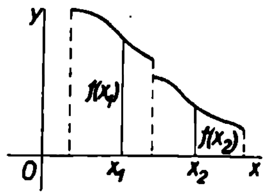
Funkci f nazýváme $\begin{matrix}\textit{rostoucí}\\ \textit{klesající}\end{matrix}$ *v intervalu* J_x, když pro každá dvě čísla x_1, x_2 z tohoto intervalu, která splňují podmínku $x_1 < x_2$, platí nerovnost

$$\begin{matrix} f(x_1) < f(x_2). \\ f(x_1) > f(x_2). \end{matrix}$$

Přejdeme-li tedy od menšího x_1 k většímu x_2, hodnota $f(x)$ se u funkce rostoucí zvětší, kdežto u funkce klesající se



Obr. 42



Obr. 43

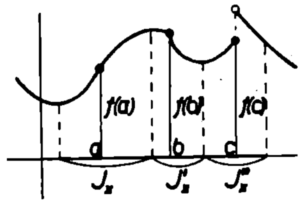
zmenší (viz obr. 42 a 43). Funkce rostoucí a funkce klesající v intervalu nazýváme někdy společným jménem *funkce monotonní*.

Vedle pojmu funkce rostoucí nebo funkce klesající v intervalu zavedeme ještě pojem funkce rostoucí a funkce klesající v bodě, a to touto definicí:

Funkce f se nazývá $\begin{matrix}\textit{rostoucí}\\ \textit{klesající}\end{matrix}$ *v bodě a*, lze-li udat takové okolí J_x bodu a, že pro všechna $x < a$ z J_x je $\begin{matrix} f(x) < f(a) \\ f(x) > f(a) \end{matrix}$ a pro všechna $x > a$ z J_x je $\begin{matrix} f(x) > f(a). \\ f(x) < f(a). \end{matrix}$

Funkce zobrazená na obr. 44 je podle toho rostoucí v bodě

a, neboť existuje takové okolí J_x bodu a, že pro všecka x z J_x, která jsou vlevo od a, je $f(x) < f(a)$, kdežto pro všecka x z J_x, která jsou vpravo od a, je $f(x) > f(a)$. Podobně je tato funkce klesající v bodě b a v bodě c je opět rostoucí, jak plyne z vlastností okolí J''_x, přes to, že není v bodě c spojitá.



Obr. 44

Oba pojmy musíme od sebe náležitě odlišovat: Je-li funkce rostoucí v bodě, je to pouze vlastnost okolí tohoto bodu; je-li funkce rostoucí v intervalu, jde o vlastnost celého intervalu. Souvislost mezi oběma pojmy osvětluje následující věta.

Věta **27**. Funkce f je $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{rostoucí}}{\text{klesající}}$ v intervalu (a, b) tehdy a jen tehdy, je-li $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{rostoucí}}{\text{klesající}}$ v každém bodě tohoto intervalu.

Důkaz. Důkaz provedeme nejprve pro funkci rostoucí.

1. Je-li funkce f rostoucí v intervalu (a, b) a je-li c libovolný bod tohoto intervalu, pak pro každé $x < c$ z (a, b) je $f(x) < f(c)$ a pro každé $x > c$ z (a, b) je $f(x) > f(c)$; je tedy f rostoucí v bodě c. Funkce f je tedy rostoucí v každém bodě intervalu (a, b).

2. Předpokládejme, že f je rostoucí v každém bodě intervalu (a, b), ale není rostoucí v intervalu (a, b). Pak existují dva body $c < d$ v (a, b) tak, že $f(c) \geqq f(d)$. Poněvadž funkce f je rostoucí v bodě c, existuje v intervalu (c, d) bod c_1 tak, že $f(c_1) > f(c)$. Proto také $f(c_1) > f(d)$. Označme M množinu těch x z intervalu $\langle c_1, d)$, pro něž platí $f(x) \geqq f(c_1)$. Množina M není prázdná, neboť bod c_1 do ní patří. Její supremum označme γ. Zřejmě je $c_1 \leqq \gamma \leqq d$.

Nechť je $\gamma = d$. To znamená, že v každém levém okolí bodu d existuje bod x tak, že $f(x) \geqq f(c_1) > f(d)$. Pak funkce f není rostoucí v bodě d, ale to nesouhlasí s předpokladem. Není tedy možné, aby $\gamma = d$.

Je proto jistě $\gamma < d$. Pak pro každé x_1 z (γ, d) je $f(x_1) < f(c_1)$, neboť žádné toto x_1 nepatří do M. Mezi body x_1 z (γ, d) však existují takové, že $f(x_1) > f(\gamma)$, neboť f je rostoucí v bodě γ podle předpokladu. Proto $f(\gamma) < f(c_1)$.

Kdyby bylo $\gamma = c_1$, bylo by $f(c_1) < f(c_1)$, ale to jistě není. Je tedy určitě $\gamma > c_1$. Avšak potom existuje levé okolí J_x bodu γ tak, že pro všecka x z J_x je $f(x) \leqq f(\gamma)$, neboť f je v bodě γ rostoucí. Mezi body x z J_x je však aspoň jeden takový, který patří do M a pro nějž je tedy $f(x) \geqq f(c_1)$, neboť γ je supremum množiny M a v každém levém okolí suprema leží aspoň jeden bod x množiny M (viz str. 12). Proto $f(\gamma) \geqq f(c_1)$, ale to také není možné, neboť jsme výše dokázali, že vždy musí $f(\gamma) < f(c_1)$.

Všecky možné polohy bodu γ vedou tedy ke sporu. Proto není možné, aby v intervalu (a, b) existovaly dva body $c < d$ tak, aby $f(c) \geqq f(d)$, nýbrž pro každé dvě hodnoty c, d z (a, b), které splňují nerovnost $c < d$, musí platit $f(c) < f(d)$. Funkce f je tedy rostoucí v intervalu (a, b).

Je-li funkce f klesající, vezmeme místo funkce f funkci g, pro niž platí $g(x) = -f(x)$. Pak z nerovností $f(x_1) > f(x_2)$ plyne $-f(x_1) < -f(x_2)$ čili $g(x_1) < g(x_2)$. Je-li tedy funkce f klesající (v intervalu nebo v bodě), je funkce g rostoucí. Protože věta platí pro funkce rostoucí, platí i pro funkce klesající.

O tom, je-li funkce v některém svém bodě rostoucí nebo klesající, lze pohodlně rozhodnout na základě derivace.

Věta **28**. Má-li funkce f v bodě a derivaci kladnou, je v tom bodě rostoucí, má-li v bodě a derivaci zápornou, je v tom bodě klesající.

Důkaz. Položme $a + h = x$ čili $h = x - a$. Pak

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

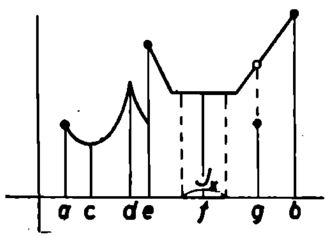
a) Je-li $f'(a) > 0$, značí to podle věty 10, že existuje takové okolí J_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_x je $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$. Je-li $x > a$, je také $f(x) > f(a)$, a je-li $x < a$, je $f(x) < f(a)$. Funkce f je v bodě a vskutku rostoucí.

b) Je-li $f'(a) < 0$, značí to podle téže věty, že existuje takové okolí J_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_x je $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$. Je-li tedy $x > a$, je $f(x) < f(a)$, a je-li $x < a$, je $f(x) > f(a)$ a funkce f je v bodě a klesající.

Budeme se zabývati t. zv. lokálními *extrémy*, které definujeme takto:

Funkce f nabývá v bodě a lokálního *maxima*, / *minima*, lze-li udat takové okolí J_x bodu a, že pro všecka $x \neq a$ z J_x je $f(x) < f(a)$. / $f(x) > f(a)$.

Tak na příklad funkce zobrazená na obr. 45, jež je definována v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, nabývá v bodech d, e lokálního maxima a v bodech c, g lokálního minima přes to, že není v bodech e a g spojitá. V bodě f nelze mluvit o minimu podle naší definice, neboť nelze udat takové okolí J_x bodu f, aby platila napsaná nerovnost. Rovněž tak nelze mluvit o maximu v bodě b, poněvadž tu nelze udat žádné okolí tohoto bodu, nejvýše jen levé okolí.



Obr. 45

Hledáme-li lokální extrémy dané funkce, můžeme je hledat jen v těch bodech, v nichž funkce buď nemá derivaci, nebo v nichž je derivace rovna nule, neboť v těch bodech, v nichž má funkce derivaci kladnou, je rostoucí a v těch bodech, v nichž má derivaci zápornou, je klesající, jak praví věta 28. Nemůže tam tedy nastat extrém. Hledání lokálních extrémů nám usnadní tato věta:

Věta **29.** Je-li funkce f v bodě a spojitá a lze-li udat takové okolí J_x bodu a, že f je v každém bodě $x < a$ z J_x funkcí $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{rostoucí}}{\text{klesající}}$ a v každém bodě $x > a$ z J_x funkcí $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{klesající,}}{\text{rostoucí,}}$ nabývá funkce f v bodě a lokálního

maxima.
minima.

Důkaz. Důkaz provedeme nejprve pro maximum. Předpokládejme, že funkce f nemá v bodě a lokální maximum, tedy že existuje v J_x aspoň jeden bod $b \neq a$ tak, že $f(b) \geqq$ $\geqq f(a)$, avšak pro každé $x < a$ z J_x je f funkce rostoucí a pro každé $x > a$ z J_x je klesající. Jsou dvě možnosti: buď je $b < a$, nebo je $b > a$.

a) Nechť je $b < a$. Poněvadž funkce f je rostoucí v každém bodě $x < a$ z J_x, je podle věty 27 rostoucí v celé části okolí J_x, která leží vlevo od bodu a. Zvolme nějaké číslo b_1 tak, aby $b < b_1 < a$. Potom $f(b_1) > f(b)$ a také ovšem

$$f(b_1) > f(a). \tag{a}$$

Vedle toho pro každé x, které vyhovuje podmínkám $b_1 <$ $< x < a$, platí $f(x) > f(b_1)$.

Funkce f je spojitá v bodě a, a proto $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a-} f(x) =$ $= f(a)$ (věta 3). Protože však $f(x) > f(b_1)$ pro každé x z (b_1, a), je podle věty 12 $\lim\limits_{x \to a-} f(x) \geqq f(b_1)$ čili $f(a) \geqq f(b_1)$, ale to odporuje nerovnosti (a). Není tedy možné, aby $b < a$.

b) Musí tedy $b > a$. Poněvadž funkce f je klesající v každém bodě $x > a$ z J_x, je podle věty 27 klesající v celé části okolí J_x, která leží vpravo od bodu a. Zvolme nějaké b_1 tak, aby $a < b_1 < b$. Potom $f(b_1) > f(b)$ a ovšem opět

$$f(b_1) > f(a). \tag{a}$$

Vedle toho pro každé x, které vyhovuje podmínkám $a < x < b_1$, platí $f(x) > f(b_1)$.

Funkce f je spojitá v bodě a, a proto $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$. Protože však $f(x) > f(b_1)$ pro každé x z (a, b_1), je podle věty 12 $\lim_{x \to a+} f(x) \geqq f(b_1)$ čili $f(a) \geqq f(b_1)$, ale to opět odporuje nerovnosti (a). Proto není možné, aby $b > a$.

Z toho plyne, že pro žádné b z J_x nemůže být $f(b) \geqq f(a)$; proto v bodě a musí nastávat maximum.

Jde-li o minimum, vezmeme funkci $g(x) = -f(x)$, která je v každém bodě $x < a$ z J_x rostoucí a v každém bodě $x > a$ z J_x klesající. O této funkci jsme právě dokázali, že má v bodě a maximum, t. j. pro každé $x \neq a$ z J_x je $g(x) < g(a)$. Proto $-f(x) < -f(a)$ čili $f(x) > f(a)$, takž funkce f má v bodě a lokální minimum.

Příklad 33. Vyšetřme průběh funkce

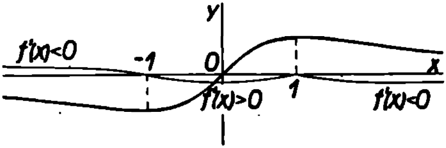
$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}.$$

Tato funkce je definována pro každé x, neboť výraz $f(x)$ má smysl pro každé x, a je spojitá v celém intervalu $(-\infty, \infty)$. Utvořme derivaci

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2};$$

to opět platí pro každé x. Je-li $1 - x^2 > 0$, je $f'(x) > 0$, a je-li $1 - x^2 < 0$, je $f'(x) < 0$. Funkce f je tedy rostoucí ve všech bodech, pro něž platí $1 - x^2 > 0$, t. j. $|x| < 1$, a klesající ve všech bodech, pro něž platí $1 - x^2 < 0$, t. j. $|x| > 1$.

Podle znaménka derivace však nemůžeme rozhodnout o průběhu funkce f v bodech $x = \pm 1$, neboť tam je $f'(x) = 0$. Funkce f je však v těchto bodech spojitá a v každém bodě $x \neq 1$ jistého levého okolí bodu 1 je $f'(x) > 0$ a v každém bodě $x \neq 1$ jistého pravého okolí bodu 1 je $f'(x) < 0$, proto



Obr. 46

v bodě 1 podle věty 29 nastává lokální maximum. Podobně ukážeme, že v bodě -1 nastává lokální minimum (viz obr. 46).

Příklad 34. Podobně vyšetříme funkci

$$f(x) = |\sin x|.$$

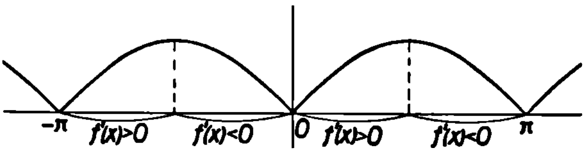
Funkce je definována opět pro každé x, ale vzhledem k periodicitě funkce sinus se můžeme omeziti pouze na interval $\langle -\pi, \pi \rangle$. Pro $0 \leqq x \leqq \pi$ je $|\sin x| = \sin x$ a pro $-\pi \leqq x \leqq 0$ je $|\sin x| = -\sin x$. Proto

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{pro } 0 < x < \pi, \\ -\cos x & \text{pro } -\pi < x < 0. \end{cases}$$

V bodě 0 derivace neexistuje, neboť $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$; rovněž neexistuje derivace v bodech π a $-\pi$. Vedle toho je $f'(\frac{1}{2}\pi) = f'(-\frac{1}{2}\pi) = 0$. Ve všech ostatních bodech derivace existuje a není rovna nule. Pro každé x z intervalů $(0, \frac{1}{2}\pi)$ a $(-\pi, -\frac{1}{2}\pi)$ je $f'(x) > 0$, proto je tam funkce rostoucí. Pro každé x z intervalů $(-\frac{1}{2}\pi, 0)$ a $(\frac{1}{2}\pi, \pi)$ je $f'(x) < 0$, proto je tam funkce klesající. Vzhledem k tomu, že funkce f je ve všech bodech spojitá, nastává maximum v bodech $\frac{1}{2}\pi$ a $-\frac{1}{2}\pi$

a minimum v bodech π, 0, $-\pi$. Průběh se ovšem periodicky opakuje (obr. 47).

Tuto kapitolu ukončíme důkazem dvou důležitých vět.



Obr. 47

Věta **30** (*věta Rolleova*). Má-li funkce f derivaci ve všech bodech (otevřeného) intervalu (a, b), je-li dále spojitá zprava v bodě a a spojitá zleva v bodě b a je-li $f(a) = f(b) = 0$, pak existuje (aspoň jeden) vnitřní bod c intervalu (a, b), pro nějž $f'(c) = 0$.

Důkaz. Funkce f je spojitá ve všech vnitřních bodech intervalu (a, b), neboť v nich má podle předpokladu derivaci (věta 23); v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva, je tedy spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Nutno rozeznávat několik případů:

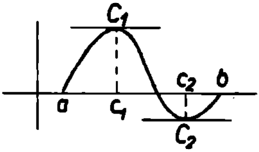
a) Existuje aspoň jeden bod x z intervalu (a, b), pro nějž $f(x) > 0$. Poněvadž funkce f je spojitá v $\langle a, b\rangle$, existuje podle věty 21 bod c, v němž funkce f nabývá své největší hodnoty M. Hodnota M musí být kladná, neboť předpokládáme, že existuje bod x, pro nějž $f(x) > 0$ a zcela jistě $M \geqq f(x)$. Při tom $c \neq a$ a $c \neq b$, neboť $f(a) = f(b) = 0$. Funkce f nemůže být v bodě c rostoucí; kdyby byla v bodě c rostoucí, musel by existovat aspoň jeden bod $x_1 > c$ tak, že by $f(x_1) > f(c) = M$, což není možné. Proto také funkce f nemůže mít v bodě c kladnou derivaci podle věty 28. *) Musí tedy $f'(c) \leqq 0$. Kdyby bylo $f'(c) < 0$, byla by funkce f v bodě c

*) Větu 28 možno vyslovit ve tvaru: Není-li funkce f v bodě a rostoucí, nemá v něm kladnou derivaci.

klesající podle věty 28, ale to také není možné, neboť pak by musel existovat takový bod $x_2 < c$, pro nějž by bylo $f(x_2) > f(c) = M$. Musí tedy $f'(c) = 0$.

b) Druhá možnost je ta, že pro žádné x z (a, b) není $f(x) > 0$.

1. Je-li $f(x) = 0$ pro každé x z (a, b), pak podle věty 24 je $f'(x) = 0$ pro každé x z (a, b) a věta je tedy správná.



Obr. 48

2. Je-li pro některé x z (a, b) hodnota $f(x) < 0$, pak $-f(x) > 0$ a pro funkci $g(x) = -f(x)$ jsou splněny podmínky odstavce a). Proto existuje c tak, že $g'(c) = 0$. Avšak $g'(c) = -f'(c)$ podle vzorce (25). Proto také $f'(c) = 0$. Tím je věta zcela dokázána.

Geometrický význam věty Rolleovy je tento: Jestliže funkce f splňuje podmínky uvedené ve větě, existuje na grafu funkce f mezi body a, b aspoň jeden takový bod C, že tečna v něm je rovnoběžná s osou x (viz obr. 48, v němž jsou takové body dva).

Věta **31** (*věta o přírůstku funkce* čili *věta o střední hodnotě*). Má-li funkce f ve všech bodech intervalu (a, b) derivaci a je-li v bodě a spojitá zprava a v bodě b spojitá zleva, existuje (aspoň jeden) vnitřní bod c intervalu (a, b), pro nějž platí $f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(c)$.

Důkaz. Vezměme v úvahu funkci

$$F(x) = (b - a)[f(x) - f(a)] - (x - a)[f(b) - f(a)].$$

Tato funkce má derivaci

$$F'(x) = (b - a) \cdot f'(x) - [f(b) - f(a)]$$

ve všech bodech intervalu (a, b), v bodě a je spojitá zprava, v bodě b je spojitá zleva a $F(a) = F(b) = 0$, jak se snadno přesvědčíme. Funkce F tedy splňuje podmínky věty Rolleovy; proto existuje vnitřní bod c intervalu (a, b) tak, že $F'(c) = 0$, t. j. $(b - a) \cdot f'(c) - [f(b) - f(a)] = 0$.

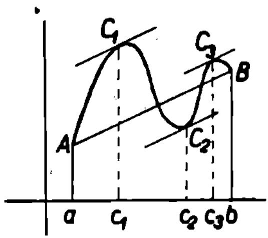
Také věta o přírůstku funkce má jednoduchý geometrický význam. Protože je $b - a \neq 0$, lze nalezenou rovnost psát ve tvaru

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pravá strana je směrnice přímky AB (obr. 49), levá strana je směrnice tečny v bodě o souřadnicích $c, f(c)$. Splňuje-li funkce f podmínky věty o přírůstku funkce, existuje na oblouku křivky mezi body A, B aspoň jeden bod C tak, že tečna v něm je rovnoběžná s přímkou AB.

Z věty o přírůstku funkce plyne tento důsledek:

Důsledek. Má-li funkce f pro všecka x z nějakého intervalu J_x derivaci rovnou nule, pak pro každé x z J_x platí $f(x) = k$, kde k je konstanta.



Obr. 49

Poněvadž funkce f má pro všecka x z J_x derivaci, je spojitá ve všech bodech intervalu J_x. Jsou-li a, b dva (vnitřní) body z J_x takové, že $a < b$, je funkce f v bodě a spojitá zprava a v bodě b zleva. Můžeme tedy na interval $\langle a, b \rangle$ aplikovat větu o přírůstku funkce, podle níž existuje vnitřní bod c intervalu (a, b) tak, že $f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(c)$. Avšak $f'(c) = 0$, neboť c je vnitřní bod intervalu J_x, proto $f(b) - f(a) = 0$ čili $f(b) = f(a)$. To platí pro kterékoli dva body x, x_1 z J_x. Položíme-li $f(x_1) = k$, je $f(x) = k$ pro každé x z J_x.

Cvičení.

31. Stanovte derivace funkcí: a) $3x^2 - 2x + 1$, b) $\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$, c) $(x^2 + 2x - 3)(x^2 - x + 4)$, d) $\dfrac{x + \sqrt{5}}{x}$,

e) $\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$, $a \neq 0$, f) $\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-3}$, g) $\dfrac{1}{(x+a)(x+b)}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, h) $\dfrac{1+x^2}{(1+x)^2}$, i) $\mathrm{tg}x - x$, j) $\dfrac{1}{\cos x}$, k) $x^2 \sin x$, l) $\sin 2x$, m) $\dfrac{\sin x}{1-\sin x}$, n) $\dfrac{\mathrm{tg}x+1}{\mathrm{tg}x-1}$.

32. Jakou derivaci má funkce a) $\dfrac{1}{|x|}$, b) $|x+1|+|x|$, c) $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$?

33. Těleso vržené svisle vzhůru rychlostí c se pohybuje podle rovnice $s = ct - \frac{1}{2}gt^2$, při čemž s je dráha, t čas, g (konstantní) zrychlení gravitační. a) Stanovte okamžitou rychlost tělesa v okamžiku t. b) V které výši a v kterém okamžiku je jeho okamžitá rychlost rovna nule? c) S jakou okamžitou rychlostí dopadne těleso zpět do místa, z něhož bylo vrženo?

34. V kterých bodech a pod kterým úhlem protínají osu x křivky: a) $y = \sin x$, b) $y = \mathrm{tg}x$, c) $y = x^3 - x$?

35. Úplnou indukcí dokažte, že

$$(k_1u_1 + k_2u_2 + \ldots + k_nu_n)' = k_1u_1' + k_2u_2' + \ldots + k_nu_n',$$

kde $k_1, k_2, \ldots, k_n$ jsou konstanty a $u_1, u_2, \ldots, u_n$ jsou funkce proměnné x.

36. Úplnou indukcí dokažte, že pro $n > 0$ celé je

$$[f^n(x)]' = nf^{n-1}(x) \,.\, f'(x),$$

kde f je funkce, která má v bodě x derivaci $f'(x)$. b) Platí vzorec i pro $n < 0$ celé? c) Derivujte podle toho $\sin^2 x$, $\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $(1+2x)^{23}$.

37. Úplnou indukcí dokažte, že

$$\frac{(u_1 \,.\, u_2 \ldots u_n)'}{u_1 \,.\, u_2 \ldots u_n} = \frac{u'_1}{u_1} + \frac{u'_2}{u_2} + \ldots + \frac{u'_n}{u_n},$$

pokud jsou jmenovatelé různí od nuly. Odvoďte odtud znovu vzorec ze cvič. 36.

38. Funkce f se nazývá $\begin{matrix}\text{sudá,}\\ \text{lichá,}\end{matrix}$ má-li tuto vlastnost: Je-li definována v bodě x, je definována také v bodě $-x$ a $\begin{matrix}f(-x) = f(x).\\ f(-x) = -f(x).\end{matrix}$ (Na př. x^n pro n sudé nebo $\cos x$ jsou funkce sudé, x^n pro n liché nebo $\sin x$ jsou funkce liché.)

Dokažte větu: Derivace $\begin{matrix}\text{sudé}\\ \text{liché}\end{matrix}$ funkce je $\begin{matrix}\text{lichá}\\ \text{sudá}\end{matrix}$ funkce.

39. Stanovte body, v kterých je daná funkce rostoucí nebo klesající, a body, ve kterých nabývá maxima nebo minima, v případech: a) $x^3 - x$, b) $(x^2 - 1)^2$, c) $\dfrac{1}{1 + x^2}$, d) $\dfrac{x}{(1 - x)^2}$, $x \neq 1$, e) $|x + 1| + |x - 1|$, f) $x + \sin x$, g) $|\sin x| + |\cos x|$.

40. Pomocí věty o přírůstku funkce dokažte, že pro $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ je a) $\sin x < x$, b) $\operatorname{tg} x > x$.

V. URČITÝ INTEGRÁL

Budiž dána funkce f definovaná pro všechna x z jakéhosi intervalu $\langle a, b\rangle$ a v tomto intervalu omezená. Zvolme libovolných $n - 1$ čísel $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, tak, aby $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b$, a pro úplnost ještě doplníme označení $a = x_0$, $b = x_n$. Tím jsme rozdělili interval $\langle a, b\rangle$ na n dílčích intervalů $\langle x_0, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \ldots, \langle x_{n-1}, x_n\rangle$ (obr. 50, v němž je $n = 7$). Délky těchto intervalů označme $\Delta x_1 = x_1 - x_0$,