Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu

III. Spojitost

In: Karel Hruša (author): Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu. (Czech). Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. pp. 49–64.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403346

16. Jsou-li funkce f a g omezené v intervalu J_x, pak i funkce $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ jsou omezené v intervalu J_x. Dokažte.

17. Je-li $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, je $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |b|$. Dokažte. Platí věta také obráceně?

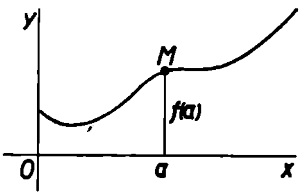
18. Je-li $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ a jestliže pro každé $x \neq a$ z nějakého okolí J_x bodu a platí $|g(x)| \leqq |f(x)|$, pak také $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$. Dokažte.

19. Je-li funkce f omezená v nějakém okolí bodu a, není $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$. Dokažte.

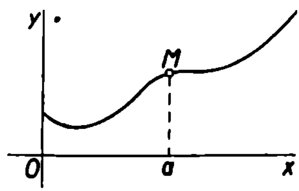
20. Věty 4—13 dokažte pro limitu zprava a pro limitu zleva.

III. SPOJITOST

Je dána funkce f definovaná ve všech bodech nějakého okolí J_x bodu a nejvýše s výjimkou tohoto bodu a. Znázor-



Obr. 32

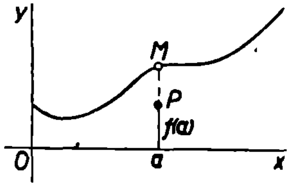


Obr. 33

níme-li si tuto funkci graficky, bude v obvyklých případech tímto znázorněním jakási křivka. Mysleme si, že tuto křivku probíháme bod po bodu tak, že se blížíme k bodu M, jehož vzdálenost od osy y je a.

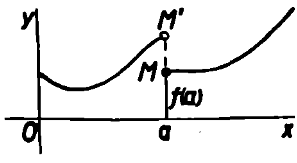
a) Jestliže hodnotě a proměnné x odpovídá hodnota $f(a)$ funkce f tak, že bod M o souřadnicích a, $f(a)$ leží na naší křivce, můžeme ve svém pohybu pokračovat „spojitě" dále za bod M na druhou stranu. Říkáme, že funkce f je v bodě a *spojitá* (obr. 32). To však neznamená nic jiného než to, že limita funkce f v bodě a je právě rovna hodnotě $f(a)$, t. j. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

b) Může se však také stát, že bod M k naší křivce nepatří, a to buď proto, že funkce f není vůbec v bodě a definována (obr. 33), nebo proto, že hodnota $f(a)$ je definována jinak a je znázorněna bodem P, který je různý od bodu M (obr. 34). V žádném z těchto případů nemůžeme v pohybu po křivce dále pokračovat, neboť křivka je v bodě M přerušena. Také neplatí rovnice $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$; v prvém případě proto, že $f(a)$ není vůbec definováno, a ve druhém případě proto, že $f(a)$ značí jinou hodnotu než $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.



Obr. 34

c) Konečně se může stát, že rovnice $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ neplatí proto, že limita funkce f v bodě a neexistuje (obr. 35). Ani v tomto případě nelze křivku v bodě M probíhat spojitě.



Obr. 35

Vyslovíme tedy tuto definici:

Funkce f je v bodě a spojitá, když $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Zcela analogicky vyslovíme také definici jednostranné spojitosti v bodě a, t. j. *spojitosti zprava* nebo *spojitosti zleva*:

Funkce f je v bodě a spojitá zprava, když $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a)$.
Funkce f je v bodě a spojitá zleva, když $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = f(a)$.

Funkce znázorněná na obr. 35 je podle této definice v bodě a spojitá zprava, není však v něm spojitá zleva.

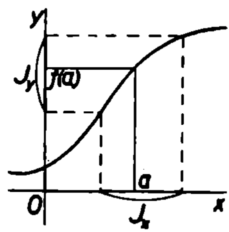
O spojitých funkcích vyslovíme větu:

Věta **14.** Funkce f je spojitá v bodě a tehdy a jen tehdy, když je v něm spojitá zprava i spojitá zleva.

Důkaz. Věta je přímým důsledkem věty 3, podle níž $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ značí přesně totéž jako $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} f(x) = f(a)$.

Definici spojitosti můžeme formulovat i jinak, užijeme-li k tomu definice limity uvedené na str. 32, v níž místo b píšeme $f(a)$. Pak ovšem hodnota $f(a)$ padne do intervalu J_y. Můžeme tedy říci:

Funkce f je spojitá v bodě a, když ke každému okolí J_y bodu $f(a)$ dovedeme určit takové okolí J_x bodu a, že pro každé x z J_x (bez jakékoli výjimky) hodnota $f(x)$ padne do J_y (obr. 36).



Obr. 36

Důležitý důsledek odvodíme z věty 9:

Věta **15.** Nechť funkce f a g jsou spojité v bodě a. Pak jsou v bodě a spojité i funkce:

a) $k \cdot f(x) + h \cdot g(x)$, kde k a h jsou daná čísla,

b) $f(x) \cdot g(x)$,

c) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, pokud $g(a) \neq 0$.

Důkaz. Funkce f a g jsou spojité v bodě a, t. j. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$. Pak podle věty 9:

a) $\lim_{x \to a} [k \,.\, f(x) + h \,.\, g(x)] = k \,.\, \lim_{x \to a} f(x) + h \,.\, \lim_{x \to a} g(x) = k \,.\, f(a) + h \,.\, g(a)$,

b) $\lim_{x \to a} [f(x) \,.\, g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \,.\, \lim_{x \to a} g(x) = f(a) \,.\, g(a)$,

c) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{f(a)}{g(a)}$, je-li $\lim_{x \to a} g(x) = g(a) \neq 0$.

Tato věta nám umožní stanovit, že mnohé důležité funkce jsou spojité.

Věta 16. a) **Funkce x^n pro $n \geqq 0$ celé je spojitá v každém bodě. b) Funkce x^n pro $n < 0$ celé je spojitá v každém bodě s výjimkou bodu 0.**

Důkaz. a) Důkaz prvé části provedeme úplnou indukcí.

(1) V příkladě 16 jsme dokázali, že $\lim_{x \to a} (kx + q) = ka + q$. To značí, že funkce $kx + q$ je spojitá v každém bodě. Položíme-li $k = 0$, $q = 1$, plyne odtud, že funkce $\varphi(x) = x^0 = 1$ je spojitá v každém bodě. Položíme-li $k = 1$, $q = 0$, dostáváme, že i funkce $\psi(x) = x$ je spojitá v každém bodě. Věta tedy platí pro $n = 1$ (i pro $n = 0$).

(2) Je-li funkce $f(x) = x^n$ spojitá v každém bodě, je podle věty 15b i funkce $f(x) \,.\, \psi(x) = x^n \,.\, x = x^{n+1}$ spojitá v každém bodě. Věta a) tedy platí pro každé přirozené číslo n.

b) Je-li $n < 0$ celé, položme $n = -m$, kde $m > 0$. Funkce x^m je podle a) spojitá v každém bodě a hodnoty 0 nabývá pouze pro $x = 0$. Funkce $\varphi(x) = 1$ je rovněž spojitá podle a) v každém bodě. Proto podle věty 15c je i funkce $\dfrac{1}{x^m} = x^{-m} = x^n$ spojitá v každém bodě s výjimkou bodu 0.

Funkce

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n,$$

kde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou konstanty, se jmenuje *racionální funkce celistvá* čili *mnohočlen*. Je-li $a_n \neq 0$, říkáme, že mnohočlen je n-tého stupně. Funkce

$$g(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m},$$

kde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m$ jsou konstanty, se jmenuje *racionální funkce lomená*. Aby měl výraz pro $g(x)$ smysl, musí být aspoň jedna z konstant b_i různá od nuly.

Věta **17**. Racionální funkce celistvá je spojitá v každém bodě; racionální funkce lomená je spojitá v každém bodě s výjimkou těch bodů, v nichž je jmenovatel roven nule.

Důkaz. a) Důkaz prvé části provedeme úplnou indukcí.

(1) Funkce $f_1(x) = a_0 + a_1x$ je spojitá v každém bodě, neboť podle příkladu 16 je $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = a_0 + a_1a$ pro každé a.

(2) Je-li funkce $f_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, kde n je číslo přirozené, spojitá v každém bodě, je i funkce $f_{n+1}(x) = f_n(x) + a_{n+1}x^{n+1}$ spojitá v každém bodě podle věty 15a a 16a.

Tím je dokázáno, že každý mnohočlen je funkce spojitá v každém bodě.

b) Jsou-li funkce $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, $h(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m$ spojité v každém bodě, při čemž aspoň jedna z konstant b_i je různá od nuly, je podle věty 15c i funkce $g(x) = \dfrac{f(x)}{h(x)}$ spojitá v každém bodě s výjimkou těch bodů, v nichž je jmenovatel $h(x)$ roven nule.

Chceme-li stanovit limitu nějaké funkce v bodě a, leckdy se nám to podaří podle věty 4. Máme-li totiž dvě funkce f a g, které pro všecka $x \neq a$ z jistého okolí J_x bodu a splňují rovnost $f(x) = g(x)$, a je-li funkce f v bodě a spojitá, je $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Pak podle věty 4 je také $\lim\limits_{x \to a} g(x) = f(a)$. Ukážeme si to na příkladě.

Příklad 21. Máme stanovit $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. Pro každé $x \neq 1$ je $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$, avšak funkce $f(x) = x + 1$ je racionální funkce celistvá, o níž podle věty 17 víme, že je spojitá v každém bodě. Proto $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 2$. Podle věty 4 je tedy také $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$. To je v souhlasu s výsledkem příkladu 14.

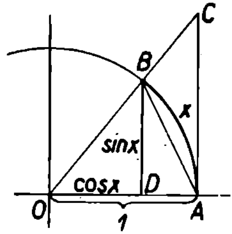
Příklad 22. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x - 1)(x - 2)}{(x + 1)(x - 2)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 1}{x + 1} = \frac{1}{3}$, neboť pro každé $x \neq 2$ platí $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2} = \dfrac{x - 1}{x + 1}$ a funkce $\dfrac{x - 1}{x + 1}$ je spojitá pro každé $x \neq -1$.

Jindy můžeme stanovit limitu s použitím věty 12 takto: Jsou-li f a g funkce, které pro všecka $x \neq a$ z nějakého okolí J_x bodu a splňují nerovnost $f(x) \leqq g(x)$, a jestliže funkce f má v bodě a limitu a funkce g je v tomto bodě spojitá, je $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leqq g(a)$. Jestliže naopak funkce g má v bodě a limitu a funkce f je v něm spojitá, pak $f(a) \leqq \lim\limits_{x \to a} g(x)$. Ke stanovení limity užíváme často také věty 13.

Příklad 23. Podle věty 13 stanovíme $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$, kterou budeme dál potřebovat. Z obr. 37 je jasné, že

$$\triangle\, OAB < \text{výseč } OAB < \triangle\, OAC.$$

Trojúhelník OAB má však stranu $OA = 1$, příslušnou výšku $DB = \sin x$, kde x je délka oblouku AB. Je tedy obsah trojúhelníka OAB roven $\frac{1}{2}\sin x$. Trojúhelník OAC je pravoúhlý; jeho odvěsny jsou OA, AC, při čemž $OA = 1$, $AC : DB = OA : OD$, takže $AC = \frac{DB \,.\, OA}{OD} = \frac{\sin x}{\cos x}$, jeho obsah je tedy $\frac{1}{2} \,.\, \frac{\sin x}{\cos x}$. Konečně obsah výseče OAB je $\frac{1}{2}x$, neboť oblouk AB má délku x a poloměr je 1. Máme tedy nerovnosti



Obr. 37

$$\tfrac{1}{2}\sin x < \tfrac{1}{2}x < \tfrac{1}{2} \,.\, \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \text{(a)}$$

z nichž pro $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ plyne

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \qquad \text{(b)}$$

Podle vzorce (17) na str. 28 je $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}x$. Podle (a) je však $\sin x < x$. Proto také $\sin\frac{1}{2}x < \frac{1}{2}x$, $\sin^2\frac{1}{2}x < \frac{1}{4}x^2$, takže $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}x > 1 - \frac{1}{2}x^2$. Spojíme-li tento výsledek s nerovnostmi (b), dostaneme pro $0 < x < \frac{1}{2}\pi$

$$1 - \tfrac{1}{2}x^2 < \frac{\sin x}{x} < 1. \qquad \text{(c)}$$

Nerovnosti (c) však platí i pro $-\frac{1}{2}\pi < x < 0$, neboť $(-x)^2 = x^2$, $\sin(-x) = -\sin x$ (vzorec (8)), takže $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$. Platí-li nerovnosti (c) pro nějaké x, platí i pro $-x$, a proto platí v celém intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ (nejvýše s výjimkou bodu 0).

Protože $\lim\limits_{x\to 0}(1 - \frac{1}{2}x^2) = 1$ a rovněž $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, proto podle věty 13 také

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{20}$$

Ačkoli jsme si s důkazem pohráli, není zcela rigorosní. Vyšli jsme totiž z názoru a na základě jakéhosi obrázku jsme sestavili jakési nerovnosti mezi obsahy jakýchsi ploch. Dosud však nemáme vůbec definováno, co je to obsah plochy, a proto zatím ještě nemůžeme užívat obsahu k žádným důkazům. Prozatím však budeme považovat vzorec (20) za správný; jeho přesný důkaz podáme v kapitole X.

Věta 18. **Funkce $\sin x$ a $\cos x$ jsou spojité v každém bodě.**

Důkaz. Je třeba dokázat, že $\lim_{x \to a} \sin x = \sin a$ čili $\lim_{h \to 0} \sin(a + h) = \sin a$ pro každé a. To je totéž jako $\lim_{h \to 0} \sin(a + h) - \sin a = 0$ čili

$$\lim_{h \to 0} [\sin(a + h) - \sin a] = 0.$$

Abychom to dokázali, všimněme si, že podle vzorců (18) na str. 29 je

$$\sin(a + h) - \sin a = 2 \cos(a + \tfrac{1}{2}h) \sin \tfrac{1}{2}h.$$

Podle (20) je $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, proto $\lim_{x \to 0} \sin x = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot x\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} x = 1 \cdot 0 = 0$ a ovšem také $\lim_{h \to 0} \sin \frac{1}{2}h = 0$. Je tedy $\sin \frac{1}{2}h$ funkce nekonečně malá v okolí bodu 0. Vedle toho $|\cos(a + \frac{1}{2}h)| \leq 1$, takže funkce $\cos(a + \frac{1}{2}h)$ je omezená. Proto podle věty 7 je $\lim_{h \to 0} [\sin(a + h) - \sin a] = 0$ a funkce $\sin x$ je spojitá v každém bodě a. Funkce $\cos x = \sin(\frac{1}{2}\pi + x)$ (vzorec (13)) je však potom rovněž spojitá v každém bodě.

Zavedeme tuto definici:

Funkce f je *spojitá v intervalu* J_x, má-li tyto vlastnosti:

1. v každém vnitřním bodě intervalu J_x je spojitá,

2. patří-li počáteční bod k intervalu J_x, je v něm spojitá zprava,

3. patří-li koncový bod k intervalu J_x, je v něm spojitá zleva.

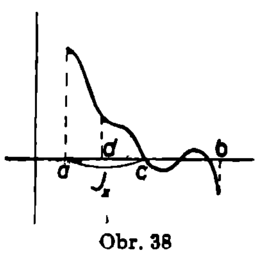
Pojem funkce spojité v intervalu musíme odlišovat od pojmu funkce spojité v bodě. Je-li funkce spojitá v určitém bodě, jde tu pouze o vlastnost okolí tohoto bodu; je-li však spojitá v intervalu, jde tu o vlastnost celého intervalu.

O funkcích spojitých v uzavřeném intervalu platí několik důležitých vět, které nyní vyslovíme a dokážeme.

Věta **19**. Je-li funkce f spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a mají-li hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ opačná znaménka, existuje takový vnitřní bod c z intervalu $\langle a, b\rangle$, že $f(c) = 0$.

Důkaz. Předpokládejme, že třeba $f(a) > 0$, $f(b) < 0$. Budiž $\langle a, d)$ takový interval, že pro všecka x z $\langle a, d)$ je $f(x) > 0$. Množinu všech čísel d, která mají tuto vlastnost, označme $\boldsymbol{M}$.

Tato množina není prázdná. Funkce f je totiž v bodě a spojitá zprava, jinými slovy $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a) > 0$. Proto podle věty 10 existuje takové (pravé) okolí J_x bodu a, že pro všecka x z J_x hodnota $f(x)$ má totéž znaménko jako $f(a)$, t. j. je $f(x) > 0$. Interval J_x je tedy jedním z intervalů $\langle a, d)$. Označme c supremum množiny $\boldsymbol{M}$ (viz str. 12). Podle toho, co bylo právě řečeno, je určitě $c > a$ a ovšem $c \leq b$ (obr. 38).



Obr. 38

Pro všecka x z $\langle a, c)$ musí být $f(x) > 0$. Kdyby totiž existovalo takové x_1 z $\langle a, c)$, že $f(x_1) < 0$, existovalo by podle vlastností suprema aspoň jedno číslo $d_1 > x_1$, které patří do $\boldsymbol{M}$. Pak by v intervalu $\langle a, d_1)$ existoval bod x_1, pro nějž by bylo $f(x_1) < 0$, ale to není možné vzhledem k definici množiny $\boldsymbol{M}$.

Dejme tomu, že $f(c) > 0$. Pak ovšem nemůže být $c = b$, neboť $f(b) < 0$. Musí tedy $c < b$. Avšak $f(c) = \lim\limits_{x \to c+} f(x)$ (viz větu 14), a proto podle věty 10 existuje takové (pravé) okolí $\langle c, d_2)$ bodu c, že pro všecka x z $\langle c, d_2)$, pro něž tedy platí $c \leqq x < d_2$, má $f(x)$ totéž znaménko jako $f(c)$, t. j. je $f(x) > 0$. Avšak potom $f(x) > 0$ pro všecka x z $\langle a, d_2)$ a c není supremem množiny $\boldsymbol{M}$. Proto nemůže být $f(c) > 0$.

Musí tedy $f(c) \leqq 0$, ale pro každé $x < c$ je $f(x) > 0$. Proto podle věty 12 je $\lim\limits_{x \to c-} f(x) \geqq 0$, ale $\lim\limits_{x \to c-} f(x) = f(c)$, takže $f(c) \geqq \geqq 0$. Obojímu současně lze vyhovět jen tak, že je $f(c) = 0$, při čemž $c \neq b$. Kdyby totiž bylo $c = b$, bylo by $f(c) < 0$ a to není.

Je-li $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, vezmeme funkci $g(x) = -f(x)$, která má tu vlastnost, že $g(a) > 0$, $g(b) < 0$ a je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$. Podle právě provedeného důkazu existuje vnitřní bod c intervalu $\langle a, b\rangle$ té vlastnosti, že $g(c) = 0$. Tedy i $f(c) = 0$.

Dokázaná věta se zdá podle názoru zcela samozřejmá. Každá spojitá funkce (t. j. funkce, jejíž graf lze narýsovat jedním tahem), která v bodech a, b nabývá hodnot, jež mají různá znaménka, má tu vlastnost, že její graf protíná osu x aspoň v jednom bodě mezi body a, b (obr. 38). Přesto však je třeba větu dokázat nezávisle na názoru, abychom snad nebyli názorem svedeni ke klamným závěrům.

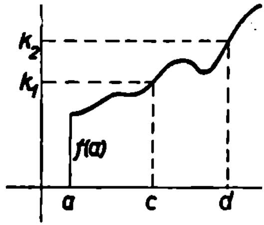
Věta **20**. Je-li funkce f spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, je v tomto intervalu omezená.

Důkaz. Naše věta tvrdí, že existují čísla k, h taková, že $h < f(x) < k$ pro všecka x z $\langle a, b\rangle$. Dokážeme především existenci čísla k.

1. Zvolme libovolné číslo k_1 tak, aby $k_1 > f(a)$. Funkce f je v bodě a spojitá zprava, t. j. $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a) < k_1$. Proto podle věty 11 existuje takové (pravé) okolí J_x bodu a čili interval $\langle a, c)$, že pro všechna x z J_x je $f(x) < k_1$. Zřejmě je $a < c \leq b$.

Dokázali jsme tedy, že existuje jakési číslo c takové, že $a < c \leq b$, a k němu existuje číslo k_1 tak, že pro všecka x z $\langle a, c)$ je $f(x) < k_1$ (obr. 39).

2. Předpokládejme, že $c < b$ a že neexistuje již žádné $d > c$ z intervalu $\langle a, b\rangle$, k němuž by bylo možno nalézt takové číslo k, aby pro všecka x z $\langle a, d)$ bylo $f(x) < k$.



Obr. 39

Zvolme libovolné číslo $k_2 > f(c)$. Funkce f je v bodě c spojitá, t. j. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c) < k_2$. Proto podle věty 11 existuje takové okolí J'_x bodu c, že pro všecka x z J'_x je $f(x) < k_2$. Okolí J'_x je interval (c_1, d), kde $c_1 < c$, $d > c$; proto sjednocením intervalů $\langle a, c)$ a J'_x vznikne interval $\langle a, d)$. Označíme-li k_3 větší z obou čísel k_1 a k_2, platí vztah $f(x) < k_3$ pro každé x z $\langle a, c)$ a také pro každé x z J'_x, tedy také pro každé x z $\langle a, d)$.

To však je ve sporu s předpokladem učiněným na počátku bodu 2. Proto není možné, aby bylo $c < b$, a je tedy $c = b$. Tím jsme dokázali, že existuje číslo k_3 tak, že pro všecka x z $\langle a, b)$ je $f(x) < k_3$.

3. Zvolme libovolné číslo $k_4 > f(b)$. Označíme-li k větší z obou čísel k_3 a k_4, platí vztah $f(x) < k$ pro každé x z $\langle a, b)$ a také pro b, tedy pro každé x z $\langle a, b\rangle$. Existuje tedy takové číslo k, že nerovnost $f(x) < k$ platí pro každé x z $\langle a, b\rangle$.

Abychom dokázali existenci čísla h, vezměme funkci $g(x) = -f(x)$, která je také spojitá v $\langle a, b\rangle$. Proto podle právě provedeného důkazu existuje takové číslo k', že pro všecka x z $\langle a, b\rangle$ platí $g(x) < k'$. Položíme-li $h = -k'$, je $-f(x) < < -h$ čili $f(x) > h$.

Věta platí pouze pro funkce spojité v **uzavřeném** intervalu. Pro funkce spojité v otevřeném intervalu nemusí platit. Na příklad funkce $f(x) = \dfrac{1}{x}$ je spojitá v otevřeném intervalu $(0, \infty)$, ale není v něm omezená, jak plyne z příkladu 20, kde bylo ukázáno, že, ať volíme číslo k jakkoli, vždy existuje takové x z intervalu $(0, \infty)$, pro něž je $f(x) = \dfrac{1}{x} > k$.

Věta **21**. **Je-li funkce f spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a je-li M supremum a m infimum hodnot, jichž funkce v tomto intervalu nabývá, pak ke každému číslu d, které má tu vlastnost, že $m \leqq d \leqq M$, existuje v intervalu $\langle a, b\rangle$ takové číslo c, že $f(c) = d$.**

Důkaz. Nejprve dokážeme, že v intervalu $\langle a, b\rangle$ existuje takové číslo c_1, že $f(c_1) = M$. Kdyby číslo c_1 neexistovalo, bylo by $f(x) < M$ pro každé x z $\langle a, b\rangle$. Pak $M - f(x) > 0$ pro každé x z $\langle a, b\rangle$ a tedy také $\dfrac{1}{M - f(x)} > 0$. Funkce $\dfrac{1}{M - f(x)}$ je však podle věty 15 spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$; proto podle věty 20 existuje takové číslo $k > 0$, že $\dfrac{1}{M - f(x)} < < k$ pro každé x z $\langle a, b\rangle$. Odtud plyne $f(x) < M - \dfrac{1}{k}$. To však znamená, že M není supremem hodnot $f(x)$, neboť má-li M být supremem, musí podle vlastnosti 2 na str. 12 existovat aspoň jedno číslo ξ z $\langle a, b\rangle$, pro něž $f(\xi) > M - \dfrac{1}{k}$, ať zvolíme číslo $k > 0$ jakkoli. Není tedy možné, aby neexistovalo žádné číslo c_1 z $\langle a, b\rangle$, pro něž $f(c_1) = M$.

Vezmeme-li funkci $g(x) = -f(x)$, pak z podmínky $m \leqq f(x)$ plyne $g(x) \leqq -m$, takže $-m$ je supremem všech hodnot $g(x)$. Protože $g(x)$ je funkce spojitá v $\langle a, b\rangle$, musí podle toho, co bylo právě dokázáno, existovat takové číslo c_2 z $\langle a, b\rangle$, že $g(c_2) = -m$ čili $f(c_2) = m$.

Je-li nyní d takové libovolné číslo, že $m < d < M$, pak $M - d > 0$, $m - d < 0$. Funkce $h(x) = f(x) - d$ je rovněž spojitá v $\langle a, b\rangle$, při čemž $h(c_1) = f(c_1) - d = M - d > 0$, $h(c_2) = f(c_2) - d = m - d < 0$. Proto podle věty 19 musí existovat takové číslo c, které leží mezi čísly c_1 a c_2, tedy v intervalu $\langle a, b\rangle$, že $h(c) = f(c) - d = 0$ čili $f(c) = d$.

Také věta 21 platí pouze pro funkce spojité v uzavřeném intervalu. Na příkladu ukážeme, že nemusí platit pro funkce spojité v otevřeném intervalu.

Příklad 24. Mějme funkci $f(x) = 2x$ definovanou pro všecka x z otevřeného intervalu $(-1, 1)$. Probíhá-li x všecky hodnoty z intervalu $(-1, 1)$, nabývá $f(x)$ všech hodnot z intervalu $(-2, 2)$, takže $M = 2$, $m = -2$. Ke každému d, pro které platí $-2 < d < 2$, existuje číslo c tak, že $f(c) = d$. Toto c je zřejmě dáno podmínkou $c = \frac{1}{2}d$. Neexistuje však žádné c_1, pro něž by bylo $f(c_1) = 2$, neboť pro $x = 1$ není již hodnota $f(x)$ definována. Rovněž tak neexistuje žádné c_2, pro něž by bylo $f(c_2) = -2$, neboť hodnota $f(x)$ pro $x = -1$ rovněž není definována.

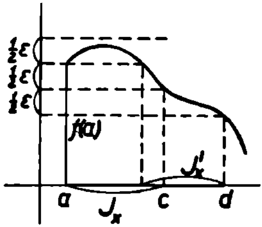
Věta **22**. Je-li funkce f spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, pak ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro každá dvě čísla x_1, x_2 z $\langle a, b\rangle$, která vyhovují nerovnosti $|x_1 - x_2| < \delta$, je $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Důkaz. Zvolme libovolné číslo $\varepsilon > 0$.

1. Funkce f je v bodě a spojitá zprava. To znamená, že k číslu $\frac{1}{2}\varepsilon$ existuje takové (pravé) okolí J_x bodu a, že pro všecka x z J_x je $|f(x) - f(a)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ (obr. 40). Jsou-li x_1, x_2 dva body z J_x, je podle (1)

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |[f(x_1) - f(a)] - [f(x_2) - f(a)]| \leqq$$
$$\leqq |f(x_1) - f(a)| + |f(x_2) - f(a)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Označíme-li šířku okolí J_x písmenem δ_1, je $|x_1 - x_2| < \delta_1$. Tím je věta dokázána pro všecka x_1, x_2 z jakéhosi intervalu $\langle a, a + \delta_1)$.



Obr. 40

2. Podle bodu 1 věta platí pro všecka x_1, x_2 z jakéhosi intervalu $\langle a, c)$, kde $a < c \leqq b$. Předpokládejme, že $c < b$ a že pro všecka x_1, x_2 z $\langle a, c)$, pro něž platí $|x_1 - x_2| < \delta_1$, kde $\delta_1 > 0$ je vhodné číslo, je $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, kdežto

pro žádné číslo $x_1 > c$ nebo $x_2 > c$ z $\langle a, b\rangle$ taková věta neplatí. (*)

Funkce f je spojitá v bodě c. To znamená, že k číslu $\frac{1}{2}\varepsilon$ existuje takové okolí J'_x bodu c, že pro všecka x z J'_x je $|f(x) - f(c)| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Jsou-li x_1, x_2 dva libovolné body z J'_x, pak opět

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |[f(x_1) - f(c)] - [f(x_2) - f(c)]| \leqq$$
$$\leqq |f(x_1) - f(c)| + |f(x_2) - f(c)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Okolí J'_x je interval (c_1, d), kde $c_1 < c$, $d > c$. Označíme-li $d - c_1 = \delta_2$, pak pro každé dva body x_1, x_2 z J'_x platí $|x_1 - x_2| < \delta_2$. Označme dále δ_3 menší z obou čísel δ_1 a δ_2; pak pro každé x_1, x_2 ze sjednocení intervalů $\langle a, c)$ a J'_x, t. j. z intervalu $\langle a, d)$, pro něž platí $|x_1 - x_2| < \delta_3$, je $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. To je ale ve sporu s předpokladem (*), podle něhož taková věta nemá platit pro $x_1 > c$ nebo pro $x_2 > c$. Není tedy možné, aby $c < b$, a proto musí $c = b$.

3. Ještě je třeba dokázat, že číslo x_1 nebo x_2 může být rovno b. Funkce f je v bodě b spojitá zleva, t. j. existuje takové (levé) okolí J''_x bodu b, že pro všechna x z J''_x je $|f(x) - f(b)| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Jsou-li opět x_1, x_2 dvě čísla z J''_x, je

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |[f(x_1) - f(b)] - [f(x_2) - f(b)]| \leqq$$
$$\leqq |f(x_1) - f(b)| + |f(x_2) - f(b)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Označíme-li šířku okolí J''_x písmenem δ_4, platí $|x_1 - x_2| < \delta_4$. Označíme-li konečně písmenem δ menší z obou čísel δ_3 a δ_4, pak pro každé x_1, x_2 z celého intervalu $\langle a, b\rangle$, pro něž platí $|x_1 - x_2| < \delta$, je $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$; tím je věta dokázána.

Ani tato věta neplatí pro funkce spojité v otevřeném intervalu. Vezměme třeba funkci $f(x) = \dfrac{1}{x}$ spojitou v intervalu $(0, \infty)$. Je-li $0 < x_1 < x_2$ a $x_2 - x_1 < \delta$, je $\delta > 0$ a $\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} < \dfrac{\delta}{x_1 x_2} < \dfrac{\delta}{x_1^2}$. Volíme-li tedy libovolné $\varepsilon > 0$ a má-li být $\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2} < \varepsilon$, vyhovíme tomu tak, že volíme $\dfrac{\delta}{x_1^2} \leqq \varepsilon$, čili $\delta \leqq \varepsilon x_1^2$, což má být splněno pro každé (i sebe menší) x_1. Musí tedy být $\delta = 0$, ale my chceme, aby $\delta > 0$.

Cvičení.

21. Je funkce

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{pro } 0 \leqq x \leqq 1 \\ 3 - x & \text{pro } 1 < x \leqq 2 \end{cases}$$

spojitá v každém bodě intervalu $\langle 0, 2\rangle$?

22. Dokažte, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0 \\ k & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

není spojitá v bodě 0, ať volíme hodnotu k jakkoli.

23. Jak třeba volit hodnotu k, aby funkce

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0 \\ k & \text{pro } x = 0 \end{cases}$$

byla spojitá v bodě 0?

24. Pro která x není spojitá funkce a) $\dfrac{x}{\sin x}$, b) $\dfrac{\cos \frac{1}{2}\pi x}{x(x-1)}$?

25. V kterých intervalech je spojitá funkce a) $\operatorname{tg} x$, b) $\operatorname{cotg} x$?

26. Nalezněte: a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 + 2x}{x^3 - 3x^2 + 2x}$, b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 - 3x^2 + 2x}$, c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^4 - 4x^3 + 1}{(x-1)^2}$.

27. Určete a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$, c) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}\pi} \dfrac{1 - \sin x}{\frac{1}{2}\pi - x}$.

28. Dokažte, že a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3} \right) = -1$,

b) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}\pi} \dfrac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$,

c) $\lim\limits_{n\to \infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n^2} + \ldots + \dfrac{n}{n^2} \right) = \frac{1}{2}$.

29. Je-li funkce $f(x)$ spojitá v bodě a, je i funkce $|f(x)|$ spojitá v bodě a. Dokažte.

30. Funkce $f(x)$ a $g(x)$ nejsou spojité v bodě a. Může se stát, že funkce $f(x) + g(x)$ je spojitá v bodě a?

IV. DERIVACE

Nejdůležitější místo mezi všemi limitami zaujímá limita, kterou označujeme názvem *derivace*. Definujeme ji takto: