Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu

Úvod

In: Karel Hruša (author): Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu. (Czech). Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. pp. 9–16.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403343

ÚVOD

Pro stručné vyjadřování si zavedeme název *množina*. Tímto slovem budeme označovat soubor jakýchkoli předmětů, které nazýváme *prvky* množiny; při tom vyslovíme požadavek, abychom o každém předmětu dovedli rozhodnout, je-li prvkem dané množiny či není-li jejím prvkem.

Nás budou zajímat hlavně dva druhy množin. Jedním z nich jsou množiny, jejichž prvky jsou čísla. Druhým z nich jsou množiny, jejichž prvky jsou body určité přímky. Je užitečné počítat mezi množiny i takové, které neobsahují vůbec žádný prvek; taková množina se nazývá *množina prázdná*. Množina, která má aspoň jeden prvek, jmenuje se *neprázdná*.

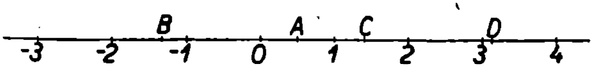
Máme různé druhy čísel. Nejjednodušší jsou *čísla přirozená* (t. j. čísla $1, 2, 3, 4, \ldots$); vedle nich jsou ještě *čísla celá* (t. j. čísla $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$; čísla přirozená mezi ně patří), dále *čísla racionální* (na př. $\frac{3}{4}, \frac{9}{2}, -\frac{5}{8}$ atd.; čísla celá mezi ně také patří, neboť na př. $3 = \frac{3}{1}$) a konečně *čísla reálná* (mezi něž patří všecka čísla racionální a ještě veliké množství dalších čísel zvaných *irracionální*, na př. $\sqrt{2}, \pi, \log 5$ atd.). V této knížce se budeme zabývat výlučně čísly reálnými; řekneme-li slovo „číslo“, budeme mít na mysli vždy jen číslo reálné. Budeme-li však někdy myslit jiný druh čísel, výslovně to vždy vytkneme.

S čísly provádíme t. zv. *základní početní výkony* (t. j. sčítání, odčítání, násobení a dělení). Jejich theorií se zabývat nebudeme; ta spadá do jiného odvětví matematiky, zvaného aritmetika. Pravidla, jimiž se řídí základní početní výkony s čísly reálnými, budeme považovat za známá.

Při této příležitosti si však přece řekneme několik slov o dělení. Jsou-li dána dvě čísla a, b, definujeme *podíl* $a : b$

(někdy mu také říkáme zlomek $\frac{a}{b}$) jako takové číslo x, které vyhovuje rovnici $bx = a$. Je-li $b \neq 0$ (čteme b různé od nuly), má tato rovnice **jediné řešení** $x = \frac{a}{b}$, které píšeme také ve tvaru $x = a : b$. Je-li však $b = 0$ a $a \neq 0$, nemá tato rovnice řešení, neboť, ať volíme číslo x jakkoli, vždy je $bx = 0$. Proto **žádné číslo** x nemůže vyhovovat rovnici $0 \,.\, x = a$, v níž předpokládáme, že $a \neq 0$. Je-li tedy $b = 0$ a $a \neq 0$, není možno utvořit podíl $a : b$. Konečně je-li $b = 0$ a také $a = 0$, pak rovnici $bx = a$ vyhovuje **každé číslo** x, neboť vždy je $0 \,.\, x = 0$. Proto za podíl $a : b$, kde $a = 0$, $b = 0$, mohli bychom pokládat každé číslo. Nám však jde o to, aby každý početní výkon měl vždy jen jeden výsledek. Abychom se vyhnuli všem těmto potížím, **budeme mluvit o podílu** $a : b$ **jen tehdy, když** $b \neq 0$. **Podíl, jehož dělitelem je nula, budeme vždy ze svých úvah důsledně vylučovat.**

Pozoruhodná je tato skutečnost: množina všech reálných čísel a množina všech bodů na přímce mají tu vlastnost, že prvky těchto dvou množin možno navzájem přiřadit tak, aby



Obr. 1

každému reálnému číslu odpovídal určitý a jediný bod přímky a také obráceně aby každému bodu přímky odpovídalo určité a jediné reálné číslo. Toto přiřazení provádíme zpravidla tak, že si zvolíme určitou přímku, které říkáme *osa číselná*, a zvolíme na ní určitý bod O, který nazveme *počátek*. Ten bude znázorňovat číslo 0. Dále zvolíme určitou délkovou jednotku (třeba 1 cm) a jeden z obou smyslů zvolené přímky prohlásíme za kladný. Druhý smysl bude záporný. Každé číslo bude přiřazeno tomu bodu číselné osy, jehož vzdálenost od počátku činí právě tolik délkových jednotek, kolik jednotek má to číslo, a to v kladném smyslu, jde-li o číslo kladné, a v záporném smyslu, jde-li o číslo záporné. Na obr. 1 jsou tak zobrazena čísla $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ a vedle toho jsou tam ještě body A, B, C, D, které zobrazují čísla 0,5, $-\frac{4}{3}$, $\sqrt{2}$, π. Poněvadž každému číslu je takto přiřazen jediný bod číselné osy a každému bodu číselné osy je přiřazeno jediné číslo, budeme často místo slova „číslo" užívat názvu „bod".

Osu číselnou si nejčastěji představujeme v poloze vodorovné a za její kladný smysl volíme směr zleva doprava. Jsou-li dána dvě čísla a, b, z nichž $a > b$ (čteme a je větší než b), pak bod, který zobrazuje číslo a, leží dále vpravo než bod, který zobrazuje číslo b. Je-li $b < a$ (b menší než a), leží bod b vlevo od bodu a.

Základní pravidla o nerovnostech budeme pokládat za známá. Nejdůležitější z nich jsou tato:

Je-li $a > b$, je také $a + c > b + c$, ať je c jakékoli číslo.

Je-li $a > b$ a $c > 0$,*) je $ac > bc$; naproti tomu je-li $a > b$ a $c < 0$, je $ac < bc$.

Víme-li, že je buď $a > b$, nebo $a = b$, píšeme to $a \geqq b$ (čteme větší nebo rovno); víme-li, že buď $a < b$, nebo $a = b$, píšeme $a \leqq b$ (čteme menší nebo rovno). Opakem tvrzení $a > b$ je tvrzení $a \leqq b$, podobně opakem tvrzení $a < b$ je tvrzení $a \geqq b$.

Číselnou množinu nazýváme *omezenou*, když existují taková dvě čísla k, h, že pro každý prvek x této množiny platí $x > h$ a současně $x < k$, což psáváme zpravidla stručněji $h < x < k$. Neexistuje-li některé z čísel k, h, mluvíme o množině *neomezené*. Na příklad množina všech zlomků s kladným

*) Číslo a, pro něž platí $a > 0$, nazývá se *kladné*; číslo a, pro něž platí $a < 0$, nazývá se *záporné*. Číslo 0 nepovažujeme ani za kladné, ani za záporné.

čitatelem i jmenovatelem, které mají tu vlastnost, že jejich čitatel je menší než jmenovatel, tvoří množinu omezenou; množina všech přirozených čísel je neomezená.

Jestliže existuje číslo k tak, že pro každý prvek x dané množiny platí $x < k$, říkáme, že množina je omezená shora. Existuje-li takové číslo h, že pro každý prvek x množiny platí $x > h$, říkáme, že množina je omezená zdola. Je zřejmé, že množina je omezená tehdy a jen tehdy, když je omezená shora i zdola.

Platí věta, kterou dokazovat nebudeme, ale přijmeme ji za správnou:

Je-li dána jakákoli shora omezená množina, existuje číslo M, které má tyto vlastnosti:

1. Žádný prvek x dané množiny není větší než M, t. j. vždy je $x \leqq M$.

2. Zvolíme-li libovolné číslo $M_1 < M$, existuje vždy aspoň jeden prvek ξ dané množiny, který je větší než M_1, t. j. $\xi > M_1$.

Číslo M se nazývá *supremum* dané množiny a je zcela lhostejné, je-li prvkem dané množiny či není-li jejím prvkem.

Podobně platí věta:

Je-li dána jakákoli zdola omezená množina, existuje číslo m, které má tyto vlastnosti:

1. Žádný prvek x dané množiny není menší než m, t. j. vždy je $x \geqq m$.

2. Zvolíme-li libovolné číslo $m_1 > m$, existuje vždy aspoň jeden prvek ξ dané množiny, pro nějž platí $\xi < m_1$.

Číslo m se nazývá *infimum* dané množiny a je opět zcela lhostejné, je-li prvkem dané množiny či není-li jejím prvkem.

Jako příklad uvedeme množinu skládající se z prvků

$$1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \ldots, \text{obecně } \frac{1}{n}.$$

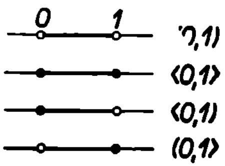
Tato množina je omezená shora i zdola a má supremum 1, které k ní patří, a infimum 0, které k ní však nepatří, neboť pro žádné n není $\frac{1}{n} = 0$. Zvolíme-li však libovolné číslo $m_1 > 0$, existují vždy prvky naší množiny, které jsou menší než zvolené číslo m_1; jsou to ty zlomky $\frac{1}{n}$, v nichž je $n > \frac{1}{m_1}$.

Nejčastěji se budeme zabývat množinami, jejichž prvky jsou všecka čísla vyhovující určitým nerovnostem. Takové číselné množiny nazýváme *intervaly*.

Na příklad množina těch čísel x, která současně vyhovují nerovnostem $0 < x < 1$, tvoří interval, který budeme označovat $(0, 1)$. Tento interval je na ose číselné znázorněn úsečkou, jejíž krajní body jsou 0 a 1, jež se však k této úsečce nepočítají. Takový interval se jmenuje *otevřený*.

Podobně množina čísel, která vyhovují nerovnostem $0 \leqq x \leqq 1$, tvoří interval, který budeme označovat $\langle 0, 1\rangle$. Také tento interval je na ose číselné znázorněn úsečkou, jejíž krajní body jsou 0 a 1; tyto body se však tentokrát k úsečce počítají. Takový interval nazýváme *uzavřený*.

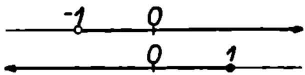
Počítáme-li k intervalu jen jeden krajní bod, nazýváme jej *polouzavřený* (polootevřený). Polouzavřenými jsou na příklad intervaly, jež tvoří ta čísla x, která vyhovují nerovnostem $0 \leqq x < 1$ nebo $0 < x \leqq 1$. Prvý z nich budeme označovat $\langle 0, 1)$ a druhý $(0, 1\rangle$.



Obr. 2

Na obrázku ovšem nemůžeme znázornit jediný bod, a proto budeme kreslit místo bodů malé kotoučky. Bude-li takový kotouček vyplněn, bude to znamenat, že bod do dané množiny patří; bude-li prázdný, bude to znamenat, že bod do dané množiny nepatří. Podle toho jsou na obr. 2 znázorněny čtyři intervaly, o kterých jsme právě mluvili.

Také množina všech čísel větších než -1 tvoří (otevřený) interval, který značíme $(-1, \infty)$ (čteme otevřený interval od -1 do nekonečna). Tvoří jej všechna x, která vyhovují nerovnosti $x > -1$. Podobně množina čísel, která vyhovují vztahu $x \leq 1$, tvoří (polouzavřený) interval, který označíme $(-\infty, 1\rangle$. Tyto intervaly se zobrazují na číselné ose jako polopřímky (obr. 3). Budeme je dále nazývat *intervaly neomezenými*. Intervaly, o nichž jsme mluvili dříve, nazýváme *omezenými*.



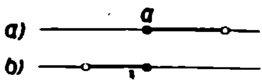
Obr. 3

Konečně i množinu všech reálných čísel vůbec počítáme také mezi intervaly a označujeme ji symbolem $(-\infty, \infty)$. Je to rovněž interval neomezený a je zobrazen celou číselnou osou.

Symboly ∞ a $-\infty$, jichž jsme právě užili, neznačí ovšem žádná čísla, nýbrž značí jen tolik, že příslušný interval je v některém směru neomezený (t. j. nikde nekončí). Se symboly ∞ a $-\infty$ nikdy nebudeme počítat, neboť to nejsou čísla.

Každý otevřený interval, jehož (vnitřním) bodem je bod a, budeme nazývat *okolím bodu* a (viz obr. 4). Každý polouzavřený interval, jehož levým krajním bodem je bod a

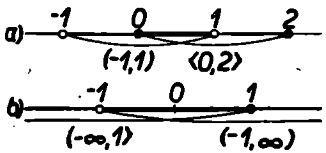
Obr. 4



Obr. 5

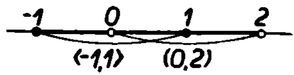
(který do toho intervalu patří), nazýváme *pravým okolím* bodu a (obr. 5a) a každý polouzavřený interval, jehož pravým krajním bodem je bod a (který do toho intervalu patří), nazýváme *levým okolím* bodu a (obr. 5b).

Průnikem dvou množin nazýváme množinu, která obsahuje všecky prvky, jež patří současně do obou množin, a žádný jiný. Průnik dvou intervalů tedy obsahuje všecka čísla společná oběma intervalům. Je jasné, že průnikem dvou intervalů může být buď interval, nebo jediné číslo, nebo množina prázdná. Na příklad průnikem intervalů $\langle 0, 2\rangle$ a $(-1, 1)$ je interval $\langle 0, 1)$, jak je vidno z obr. 6a. Podobně průnikem intervalů $(-1, \infty)$ a $(-\infty, 1\rangle$ je interval $(-1, 1\rangle$, jak vyplývá ze znázornění na obr. 6b. Je zřejmé, že průnikem dvou intervalů, které mají společný **vnitřní** bod, je vždy interval.



Obr. 6

Sjednocením dvou množin nazýváme množinu, která obsahuje všecky prvky jedné množiny i všecky prvky množiny druhé a žádný jiný. Sjednocením dvou intervalů může tedy být buď dvojice intervalů, nebo jediný interval. Na příklad sjednocením intervalů $(0, 2)$ a $\langle -1, 1\rangle$ je interval $\langle -1, 2)$, který obsahuje všecka čísla z intervalu $(0, 2)$ i všecka čísla z intervalu $\langle -1, 1\rangle$, jak je patrno z obr. 7. Sjednocením levého a pravého okolí bodu a je okolí tohoto bodu (viz obr. 4 a 5).



Obr. 7

Ke každému reálnému číslu a přiřazujeme číslo, které označujeme $|a|$ a nazýváme *absolutní* (*prostá*) *hodnota* čísla a. Je definována takto:

Je-li $a > 0$, je $|a| = a$; je-li $a < 0$, je $|a| = -a$; $|0| = 0$. Na příklad $|3| = 3$, $|-1{,}8| = 1{,}8$ atd. Můžeme také říci:

Je-li $a \geqq 0$, je $|a| = a$; je-li $a \leqq 0$, je $|a| = -a$.*)

---

*) Podmínka $a \geqq 0$ zahrnuje všecka čísla kladná a ještě nulu. Tato čísla, která nejsou záporná, označujeme souborným názvem čísla *nezáporná*. Podobně čísla, která vyhovují podmínce $a \leqq 0$, nazýváme *nekladná*.

Vždy je $|a| \geqq 0$. Absolutní hodnota je vždy číslo nezáporné.

Jsou-li a, b jakákoli čísla, je vždy

$$||a| - |b|| \leqq |a \pm b| \leqq |a| + |b|, \tag{1}$$ *)

$$|ab| = |a| \cdot |b|, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \text{ pro } b \neq 0. \tag{2}$$

Symbol $a \pm b$ v nerovnosti (1) značí buď $a + b$, nebo $a - b$. Důkaz uvedených pravidel provedeme nejsnáze tak, že vezmeme v úvahu všecky možné kombinace znamének, jichž mohou čísla a, b nabýt, a ukážeme, že napsané vztahy jsou vždy splněny.

Je-li a libovolné číslo a $\delta > 0$, pak množina všech čísel x, pro něž platí

$$a - \delta < x < a + \delta, \tag{3}$$

je totožná s množinou všech čísel x, která splňují nerovnost

$$|a - x| < \delta. \tag{3'}$$

Důkaz: 1. Je-li $a - \delta < x < a + \delta$, je $-\delta < x - a < \delta$. Buď je $x - a \geqq 0$, takže $x - a = |x - a|$, a pak $|x - a| < \delta$. Nebo je $x - a < 0$, takže $x - a = -|x - a|$, a pak $-\delta < -|x - a|$, t. j. $|x - a| < \delta$.

2. Obráceně: Je-li $|x - a| < \delta$, je buď $x - a \geqq 0$, t. j. $|x - a| = x - a$, takže $x - a < \delta$ (a samozřejmě ovšem také $-\delta < x - a$). Nebo je $x - a < 0$, t. j. $|x - a| = -(x - a)$, takže $-(x - a) < \delta$, t. j. $-\delta < x - a$ (a samozřejmě ovšem $x - a < \delta$). V obou případech je tedy $-\delta < x - a < \delta$, t. j. $a - \delta < x < a + \delta$.

---

*) Vzorce, které třeba si pamatovat, jsou označeni čísly na okraji. Formule, jichž se v dalším textu dovoláváme, jež však pamatovat není třeba, jsou označeny písmeny.