

# Plochy stavebně-inženýrské praxe

---

## 2. Rotační plochy

In: František Kadeřávek (author): Plochy stavebně-inženýrské praxe. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1950. pp. 8–31.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/403316>

### Terms of use:

© Jednota československých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## 2. ROTAČNÍ PLOCHY

**2.0. Vytváření rotačních ploch.** Nejjednodušším pohybem v prostoru je *otáčení*, *rotace*, okolo dané přímky, *osy otáčení*. Každý bod otáčejícího se útvaru probíhá při tomto pohybu kružnici, položenou v rovině kolmé k ose otáčení.

Otáčením zcela libovolné křivky  $k$  okolo dané osy  $o$  vytvoří se plocha  $\rho$ , která se nazývá *rotační plochou*. Nese na svém povrchu nekonečně mnoho kružnic v rovinách kolmých k ose otáčení. Jsou to její *rovnoběžky* nebo *paralelní kružnice*. Ony z nich, které ve svém okolí mají *nejmenší* poloměr, nazývají se *hrdla* plochy, ty pak, kterým v jejich okolí přísluší *největší* poloměry, jsou *rovníky* (*aequatory*) plochy. Souhrn průsečíků veškerých rovnoběžek s libovolnou rovinou  $\sigma$ , jdoucí osou  $o$ , jmenuje se *poledník* (*meridián*) plochy  $\rho$ . Plochu  $\rho$  možno vytvořit i otáčením poledníku.\*)

*Veškeré poledníky plochy  $\rho$  jsou křivky mezi sebou shodné a vzhledem k ose  $o$  kolmo souměrné*, jak plyne z jejich sestrojení uvedeným způsobem. Poledník, který je rovnoběžný s průmětnou, jeví se v příslušném průmětu v pravém tvaru, po případě i ve skutečné velikosti a je označován jako *poledník hlavní*.

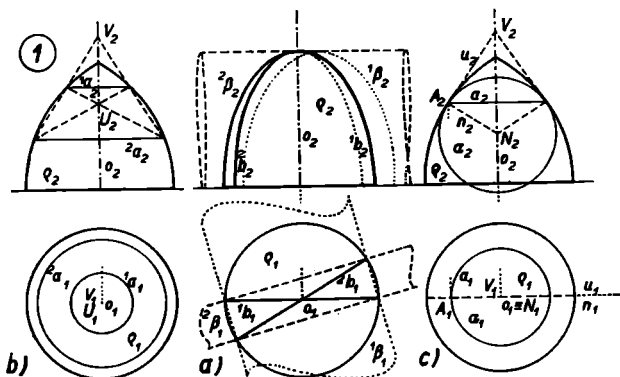
**2.1. Dotykové plochy rotačních ploch.** Vytkneme-li (obr. 1a) na rotační ploše  $\rho$ , mající v přímce  $o$  svou osu, dva poledníky  ${}^1b$ ,  ${}^2b$ , jsou to v prostoru křivky kolmo souměrné k rovinám, které procházejí osou  $o$ , půlí odchylky rovin těchto poledníků. Proto leží oba poledníky  ${}^1b$ ,  ${}^2b$  na dvou válcových plochách  ${}^1\beta$ ,  ${}^2\beta$ , jejichž povrchové přímky jsou kolmé k ose  $o$  a jejichž osy stojí k sobě rovněž kolmo. Splynou-li oba poledníky  ${}^1b$ ,  ${}^2b$  v jediný  $b$ , přejde plocha válcová  ${}^1\beta$  do válcové

\*) Je patrné, že byly vzaty názvy křivek položených na rotačních plochách z *matematického zeměpisu*. Proto bývá i označován průsečík rotační plochy s osou, pokud je jejím obyčejným bodem (jeho rovina tečná je kolmá k ose) *pólem* dané rotační plochy.

plochy, která se podél poledníku  $b$  dotýká plochy  $\rho$  a plocha  ${}^2\beta$  přejde do roviny poledníku  $b$ . Tedy:

*Podél každého poledníku  $b$  dotýká se rotační plochy  $\rho$  plocha válcová  $\beta$ , jejíž povrchové přímky jsou kolmé k rovině onoho poledníku.*

Plocha rotační jeví se tedy jako obalová plocha válcových ploch, charakteristikami jsou tu poledníky plochy.



V obr. 1b) výtknuty byly na ploše  $\rho$  dvě rovnoběžky  ${}^1a$ ,  ${}^2a$ . Jimi lze proložit dvě rotační plochy kuželové  ${}^1\alpha$ ,  ${}^2\alpha$ , mající v  $o$  svou osu a v bodech  $V$  a  $U$  své vrcholy. Z toho máme důsledek:

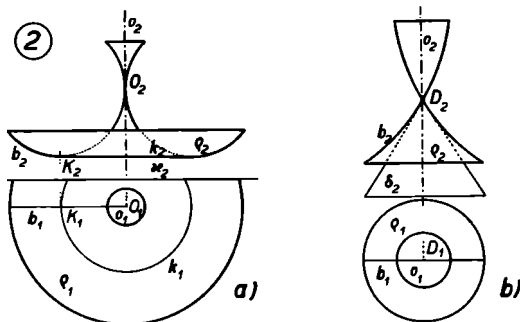
*Každé dvě rovnoběžky rotační plochy  $\rho$  spočívají na dvou rotačních plochách kuželových, z jejichž vrcholů lze jednu promítnouti do druhé.*

Splynou-li obě rovnoběžky v jedinou  $a$ , přejde jedna plocha kuželová do roviny této rovnoběžky a druhá do rotační plochy kuželové, která se podél rovnoběžky  $a$  plochy  $\rho$  dotkne a má svůj vrchol na ose  $o$ . Je-li rovnoběžka  $a$  vytvářena otáčením bodu  $A$  poledníku  $b$  plochy  $\rho$ , vytvoří

tečna  $u$  křivky  $a$  v bodě  $A$  dotykovou plochu kuželovou  $\alpha$ .  
Tudíž:

*Podél každé rovnoběžky a rotační plochy  $\rho$  dotýká se jí rotační plocha kuželová  $\alpha$  souosá. Pro hrdla a rovníky přechází tato dotyková plocha kuželová v plochu válcovou.*

Rotační plocha  $\rho$  je tedy obalovou plochou rotačních ploch kuželových o společné ose, kružnice rovnoběžkové jsou příslušnými charakteristikami.

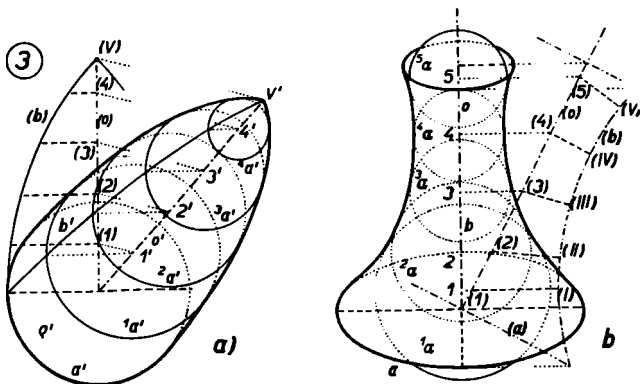


Sestrojíme-li (obr. 1c) v bodě  $A$  hlavního meridiánu rotační plochy  $\rho$  tečnu  $u$  a normálu  $n$ , jejichž průsečíky s osou rotace  $o$  jsou body  $V$  a  $N$ , je zřejmé, že rotací kružnice mající v  $N$  střed a poloměr rovný  $\overline{AN}$ , vytvoří se plocha kulová  $\alpha$ , která se plochy  $\rho$  podél rovnoběžky  $a$  dotýká. Z toho plyne:

*Podél každé rovnoběžky rotační plochy  $\rho$  o ose  $o$  dotýká se plochy  $\rho$  kulová plocha  $\alpha$ . Její střed  $N$  je vrcholem rotační plochy kuželové souosé s  $\rho$ , vyplněné normálami poledníků plochy  $\rho$  v bodech kružnice  $a$ .*

Plocha rotační  $\rho$  jeví se tedy jako plocha obalová ploch kulových  $\alpha$ , majících středy na ose  $o$ ; charakteristikami jsou tu rovnoběžkové kružnice  $a$  plochy  $\rho$ . Pro rovníky a hrdla

plochy  $\rho$  jsou poloměry dotykových ploch kulových ve svém okolí hodnoty nejmenší. Je-li v bodě  $K$  (obr. 2a) tečna k poledníku  $b$  kolmá k ose  $o$  rotační plochy  $\rho$ , popíše při rotaci bod  $K$  kružnici  $k$  v rovině  $\kappa \perp o$  a pro každý bod kružnice  $k$  je  $\kappa$  příslušnou rovinou tečnou.  $\kappa$  je rovina, která se dotýká plochy  $\rho$  podél celé křivky  $k$ , kterou nazýváme



kráterovou křivkou plochy  $\rho$ . Protíná-li poledník  $b$  plochy  $\rho$  (obr. 2b) osu otáčení v bodě  $D$ , tu příslušná tečna poledníku vytvoří rotací okolo  $o$  kuželovou plochu  $\delta$ , která se v bodě  $D$  plochy  $\rho$  dotýká. V bodě  $D$  má plocha  $\rho$  nekonečně mnoho rovin tečných: tento kuželový bod je jejím bodem *singulárním*. Zvláštní případ nastane, dotkne-li se poledník v bodě  $O$  osy  $o$  (obr. 2a).

**2.2. Tečné roviny a normály.** V předešlé části sezнали jsme dotykové plochy rotačních ploch podél poledníků a rovnoběžkových kružnic. Při stanovení tečné roviny v bodě rotační plochy vedeme jí buď poledník nebo rovnoběžkovou kružnici, sestrojíme podél poledníku dotykovou plochu válcovou nebo podél rovnoběžkové kružnice buď kuželovou nebo ku-

lovou plochu dotykovou a k této ploše stanovíme pak v daném bodě rovinu tečnou, která jest již i tečnou rovinou dané rotační plochy. Jednodušeji řešíme tuto úlohu tak, že bodem  $B$  rotační plochy  $\rho$  proložíme rovnoběžkovou kružnici  $a$  a poledník  $b$ ; tyto křivky v bodě  $B$  nahradíme tečnami  $u, v$  a rovina, těmito přímkami určená, je hledanou rovinou tečnou. Normála  $n$  jde k ní bodem  $B$  kolmo.

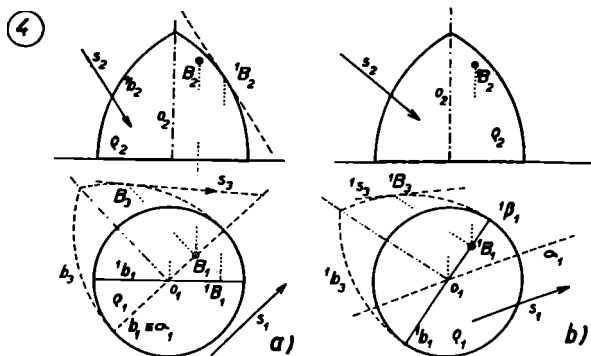
**2.3. Obrisy a rovnoběžné osvětlení.** Rovnoběžkové kružnice rotační plochy  $\rho$  použijeme s výhodou k tomu, abychom vyhledali obrys kosoúhlého průmětu plochy  $\rho$  v případě, že roviny rovnoběžkových kružnic jsou rovnoběžné k průmětně rovnoběžného promítání (obr. 3a). Kosoúhlé průměty rovnoběžkových kružnic jsou opět kružnice a jejich obálka je obrys kosoúhlého průmětu. Uvedený obrat vede i v centrálním resp. perspektivním promítání snadno k cíli, je-li rotační osa  $o$  kolmá k průmětně.

Dotykové plochy kulové (obr. 3b) umožňují velmi snadné vyhledání obrysu rotační plochy  $\rho$  v kolmém promítání. Jejich obrysy jsou kružnice. Zvolíme několik normál  $1 I, 2 II, \dots$  poledníku  $b$  a v kolmém průmětu opisujeme okolo průmětů bodů  $1, 2, \dots$  kružnice poloměry  $\overline{1 I}, \overline{2 II}, \dots$  Tím jsme stanovili obrysy ploch kulových  ${}^1\alpha, {}^2\alpha, \dots$ , které obalují hledanou obrysovou křivku.

Daným směrem  $s$  opsati rotační ploše  $\rho$  plochu válcovou může býti řešeno i jako vyhledání meze stínu vlastního pro rovnoběžné světelné paprsky se směrem  $s$ . Je zřejmé, že mez stínu vlastního je křivka kolmo souměrná k rovině poledníku, která je rovnoběžna se světelným paprskem, tedy k rovině *světelného poledníku*. Křivka má na tomto poledníku své *vrcholy*.

Hledejme vrchol  $B$  meze vlastního stínu (obr. 4a). K světelnému poledníku  $b$  plochy  $\rho$  vede se tečna rovnoběžná k světelnému paprsku  $s$ , což lze výhodně provést za pomoci třetí vedlejší průmětny  $\sigma$ , totožné s rovinou světelného meridiánu. Použito bylo při tom věty, že podle poledníku se

rotační plochy dotýkají plochy válcové. Z téhož plyne, že když vedeme k hlavnímu poledníku  ${}^1b$  tečnu rovnoběžnou s nárysem světelného paprsku, jest její dotykový bod  ${}^1B$  rovněž bodem hledané meze vlastního stínu. Chceme-li na libovolném poledníku (obr. 4b)  ${}^1b$  plochy  $\rho$  vyhledati bod meze stínu, musíme si zjednati kolmý průmět  ${}^1s$  světelného

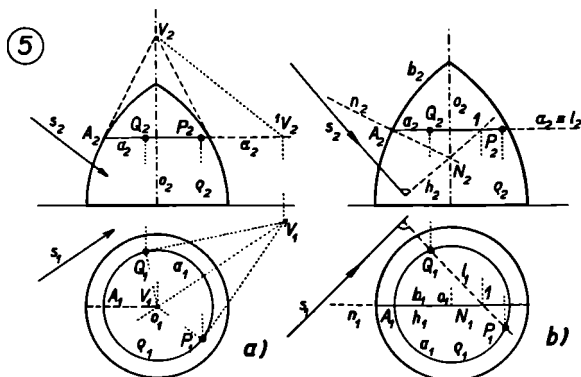


paprsku  $s$  na rovinu tohoto poledníku a dotykový bod  ${}^1B$  tečny křivky  ${}^1b$  rovnoběžné s  ${}^1s$  je hledaným bodem. Opět tu s výhodou použijeme třetí vedlejší průmětny  ${}^1\beta$  totožné s rovinou poledníku  ${}^1b$ . (V obrázku není zarysováno sestrojení směru  ${}^1s_3$ !) Tím jsme vyčerpali konstrukce, které používaly dotykových ploch válcových rotační plochy  $\rho$ .

K řešení předložené úlohy lze však použítí i dotykových ploch kuželových (obr. 5a). Podél rovnoběžky  $a$  plochy  $\rho$  dotýká se kuželová plocha, mající v bodě  $V$  na ose  $o$  vrchol. Sestrojíme vržený stín  ${}^1V$  bodu  $V$  na rovinu  $\alpha$  křivky  $a$  a z něho vedeme k ní obě tečny. Jejich dotykovými body  $P$ ,  $Q$  s křivkou  $a$  jdou meze vlastního stínu použité plochy kuželové a proto jsou tyto body též body hledané meze vlastního stínu dané plochy  $\rho$ .

V obr. 5b bylo použito k řešení téže úlohy dotykové plo-

chy kulové. V bodu  $A$  hlavního poledníku  $b$  vztyčena k němu normála  $n$ , její průsečík  $N$  s osou  $o$  je středem pomocné plochy kulové. Tímto bodem jde rovina meze vlastního stínu této kulové plochy kolmo k světelnému paprsku  $s$ . Je stanovena hlavními přímkami  $h$  ( $h_2$  bodem  $N_2$  kolmo k  $s_2$ ;  $h_1 \equiv b_1$ ; průsečík  $h$  s  $\alpha$  je bod  $l$ ) a  $l$  ( $l_1$  bodem  $l$  kolmo k  $s_1$ ,



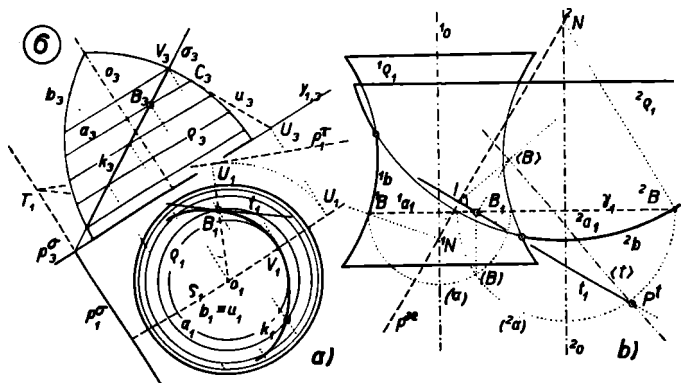
$l_2 \equiv \alpha_2$ ). Přímka  $l$  protíná rovnoběžkovou kružnici  $a$  v rovině  $\alpha$ , podél níž se pomocná plocha kulová dotýká plochy  $\rho$ , v bodech  $P, Q$ . To jsou dva body meze stínu vlastního pomocné plochy kulové na rovnoběžce  $a$  a proto i body meze stínu vlastního plochy  $\rho$  na kružnici  $a$ .

**2.4. Rovinné řezy.** Řez roviny  $\sigma$  s rotační plochou  $\rho$  mající osu  $o \perp \pi$  a poledník v křivce  $b$  stanovíme z jednotlivých bodů (obr. 6a). Vytkneme rovnoběžkovou kružnici  $a$  a sestrojíme její průsečíky s rovinou  $\sigma$ . Pohodlně se tak stane, použijeme-li opět pomocné třetí průmětny, rovnoběžné s osou  $o$  a kolmé k rovině  $\sigma$ . Tu je již průsečík  $B_3$  přímek  $\alpha_3$  a  $\sigma_3$  jedním bodem stranorysu řezu  $k$ . Z  $B_3$  snadno získáme  $B_1$ . V bodě  $B$  stanovíme tečnou rovinu  $\tau$  a její průsečnice s rovinou  $\sigma$ , přímka  $t$  je tečnou křivky  $k$  v bodě  $B$ . Křivka  $k$



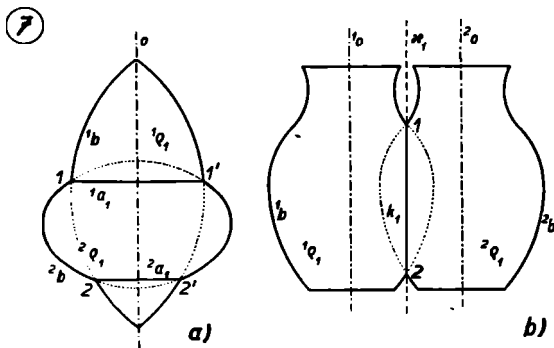
je kolmo souměrná k rovině  $\zeta$ , která, jdouc osou  $o$ , je kolmá k rovině  $\sigma$ , proto bod  $V$  položený v  $\zeta$  je vrcholem křivky  $k$ .

**2,5. Proniky dvou rotačních ploch.** Dvě rotační plochy  ${}^1\rho$  a  ${}^2\rho$  mohou mít své osy buď rovnoběžné (po případě splývající), nebo různoběžné a konečně mimoběžné. Hledáme-li průnikovou křivku takových dvou rotačních ploch, postupujeme v každém z uvedených případů jiným způsobem.



**2,51. Příklad rovnoběžných os.** Uvažujme nejprve dvě rotační plochy  ${}^1\rho$  a  ${}^2\rho$ , které mají rovnoběžné osy  ${}^1o \parallel {}^2o$  položené v první průmětně (obr. 6b). Rovina  $\gamma$  kolmá k osám otáčení protíná dané plochy v rovnoběžkových kružnicích  ${}^1a$  a  ${}^2a$ . Sklopte rovinu  $\gamma$  do průmětny: Sklopené kružnice ( ${}^1a$ ) a ( ${}^2a$ ) protínají se v bodě ( $B$ ), který je sklopením bodu  $B$  hledané průsečné křivky  $k$ . Pata kolmice spuštěné z bodu ( $B$ ) na  $\gamma_1$  je jeho prvním průmětem  $B_1$ . Tečnu křivky  $k$  v bodě  $B$  mohli bychom sestrojiti jako průsečnici tečných rovin ploch  ${}^1\rho$  a  ${}^2\rho$  v bodě  $B$ , ale můžeme ji snadno sestrojiti za pomoci *normální roviny* křivky  $k$ . Stanovme v průsečíku  ${}^1B$  rovnoběžkové kružnice  ${}^1a$  s poledníkem  ${}^1b$  normálu  ${}^1B^1N$  křivky  ${}^1b$  a totéž učinme i v bodě  ${}^2B$ , v němž rovnoběžková

kružnice  ${}^2a$  protíná poledník  ${}^2b$ . Buď  ${}^2N$  průsečíkem normály  ${}^2N^2B$  poledníku  ${}^2b$  s osou  ${}^2o$ . Pak  ${}^1NB$  a  ${}^2NB$  jsou normály hledané průsečné křivky  $k$  v bodě  $B$ , určují normální rovinu  $\kappa$  křivky  $k$  v bodě  $B$  a tečna  $t$  křivky  $k$  v bodě  $B$  jde jím kolmo k rovině  $\kappa$ . Proto je  $t_1 \perp {}^1N^2N$  a sklopíme-li promítací rovinu tečny  $t$  do průmětny ( $B^1 \langle B \rangle = B_1(B); I \langle B \rangle \perp \perp \langle B \rangle P^t$ ), získáme snadno stopník  $P^t$  hledané tečny  $t$ .



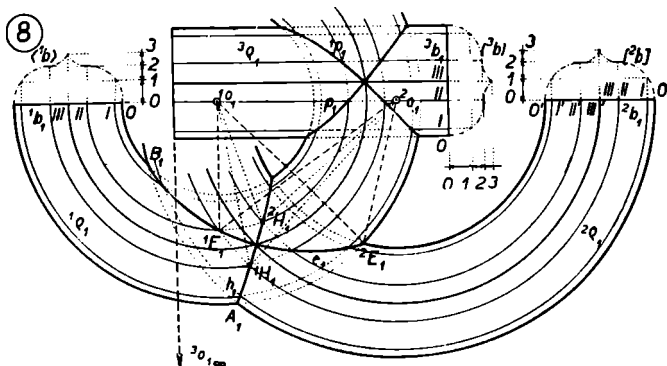
Je zřejmé, že průsečná křivka  $k$  je kolmo souměrná k rovině, procházející osami  ${}^1o$  a  ${}^2o$  a má v průsečných bodech hlavních poledníků  ${}^1b$  a  ${}^2b$  své vrcholy.

Splývají-li osy obou ploch v jediné přímce  $o$  (obr. 7a), rozpadne se proniková křivka ploch  ${}^1\varrho$ ,  ${}^2\varrho$  na několik rovnoběžkových kružnic  ${}^1a$ ,  ${}^2a$ , vytvářených průsečnými body  $1\ 1'$ ,  $2\ 2'$ , poledníků  ${}^1b$ ,  ${}^2b$ .

Jsou-li dána dvě shodná rotační tělesa omezená plochami  ${}^1\varrho \cong {}^2\varrho$  o osách  ${}^1o \parallel {}^2o$  (obr. 7b), je vzájemný pronik omezen křivkou  $k$  položenou v rovině  $\kappa$ , rovnoběžné s osami a od nich stejně vzdálené.

Uvažujeme-li celé plochy  ${}^1\varrho$ ,  ${}^2\varrho$ , je  $k$  jen částí jejich pronikavých křivek, jak později seznáme.

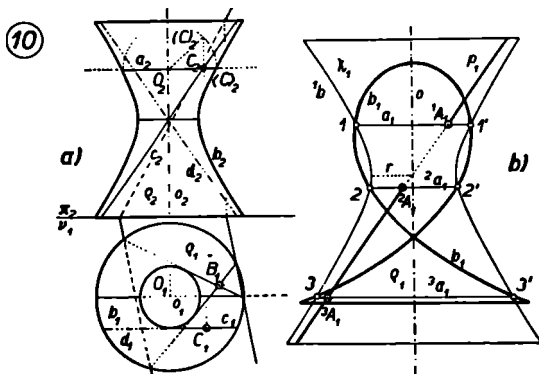
Budtež nyní dány dvě rotační plochy  ${}^1\rho$ ,  ${}^2\rho$  (obr. 8), jejichž osy  ${}^1o \parallel {}^2o$  jsou kolmé k průmětně. Poledníky obou ploch budtež křivky  ${}^1b \cong {}^2b$  a stejně k průmětně položené. Zvolme stejné aequidistance nad průmětnou  $0\ I, 0\ 2, 0\ 3!$  Body příslušné těmto vzdálenostem na polednicích  ${}^1b$  a  ${}^2b$ , promítají se do shodných řad  $0, I, II, III$  po případě  $0, I',$



$II', III'$  a těmito procházejí průměty rovnoběžkových kružnic na obou plochách. Průmět  $h_1$  průsečné křivky vychází z průsečíku  $A_1$  stop obou ploch do bodů  ${}^1H, {}^2H$ . Je zřejmé, že se přiblíží bod  ${}^2H_1$  k bodům  ${}^1o_1$  a  ${}^2o_2$  o touž vzdálenost, rovnou úsečce  $I\ III = I'\ III'$  a je proto rozdíl průvodičů bodů křivky  $h_1$  vzhledem k bodům  ${}^1o_1, {}^2o_1$  stálý a křivka  $h_1$  je *hyperbolou o ohniskách* v  ${}^1o_1, {}^2o_1$ . Pro část pronikové křivky, která vychází z průsečného bodu  $B$  stop obou ploch  ${}^1\rho$  a  ${}^2\rho$ , je, jak patrné z průvodičů bodů  ${}^1E$  a  ${}^2E$ , jejich součet stálou hodnotou. Je z toho zřejmé, že *proniková křivka dvou rotačních ploch o rovnoběžných osách a shodných polednicích položených ve stejné výši promítá se kolmo na průmětnu kolmou k osám do kuželoseček, které mají v průmětu os svá společná ohniska.*



že použitím jedné plochy kulové  $\gamma$  stanovili jsme současně řadu bodů průřezu  $k_1$  pronikové křivky  $k$ , v našem případě body  $p_1, {}^1p_1, {}^2p_1$  a  ${}^3p_1$ , z nichž jen dva jsou průřezky reálných bodů křivky  $k$ . Tečnu křivky  $k$  v bodě  $B$  lze stanoviti opět buď jako průsečnici tečných rovin sestrojených v bodě  $B$  k plochám  ${}^1\rho, {}^2\rho$ , nebo výhodněji za pomoci normální roviny



$k$  křivky  $k$  v bodě  $B$  stejným postupem, jakého bylo použito v obr. 6b. Křivka  $k$  prochází průsečíky 1, 2, 3, 4 obou poledníků a má v nich v prostoru své vrcholy.

2,53. *Případ mimoběžných os.* Jsou-li osy obou rotačních ploch  ${}^1\rho$  a  ${}^2\rho$  mimoběžné, prokládáme roviny kolmé k jedné nebo druhé ose rotace; roviny protnou jednu z ploch v kružnicích a druhou v obecné křivce, kterou sestrojíme podle obr. 6a. Průsečíky této křivky a příslušné kružnice jsou jednotlivé body hledané pronikové křivky. Její tečnu vyšetříme opět buď jako průsečnici příslušných tečných rovin k plochám  ${}^1\rho, {}^2\rho$  nebo za pomoci normál k těmto plochám.

2,6. *Rotační zborcený hyperboloid.* Otáčeli-li se přímka  $c$  mimoběžná k přímkce  $o$  okolo této přímky (obr. 10a), vznikne plo-

cha  $\rho$ , jejímž poledníkem  $b$  je hyperbola. Zvolme na  $c$  bod  $C'$ ! Poloměr kružnice  $a$  popisované bodem  $C$  je přepona trojúhelníka  $\triangle O_2C_2(C)_2$ , kde  $\overline{C_2(C)}_2$  se rovná vzdálenosti přímky  $c$  od osy  $o$ . Z obrazce je patrna známá konstrukce hyperboly  $b$ , jejíž asymptota je rovnoběžná s  $c$ . Vzniklá plocha je *rotační jednodílný hyperboloid  $\rho$ , plocha zborcená* (2) str. 13 a násl. \*) Zvolíme-li na ní bod  $B$ , můžeme vyhledati jeho tečnou rovinu buď stanovením tečen  $u, v$  k poledníku a rovnoběžkové kružnici bodu  $B$  nebo uvážiti: plocha je kolmo souměrná k rovině jdoucí osou  $o$  kolmo k druhé průmětně, proto obsahuje přímku  $d$  kolmo souměrnou k přímce  $c$  a též rotaci této přímky  $d$  kolem  $o$  vytváří se plocha  $\rho$ . Proto:

*Rotační zborcený hyperboloid obsahuje dvě soustavy povrchových přímek, přímky jedné soustavy jsou mezi sebou mimoběžné, ale protínají všechny přímky druhé soustavy. Každým bodem plochy zborceného hyperboloidu procházejí dvě povrchové přímky plochy, které patří různým soustavám a určují tečnou rovinu daného bodu.*

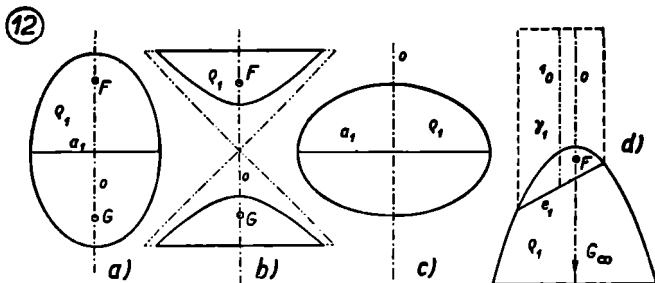
Proložením obou přímek, které procházejí bodem  $B$ , je snadno tečná rovina určena (obr. 10a) a lze pro ni jednoduše stanoviti i stopy.

2,61. *Stupeň rotační plochy.* Poledník  $b$  rotační plochy  $\rho$  (obr. 10b) musí býti křivka kolmo souměrná k ose  $o$  otáčení. Je-li algebraická a její stupeň  $m$ , pak i stupeň plochy  $\rho$  je rovný  $m$ , neboť zvolíme-li libovolnou přímku  $p$  v prostoru, vznikne její rotací okolo  $o$  rotační hyperboloid, jehož poledník je hyperbola  ${}^1b$  souosá s poledníkem  $b$ . Oba poledníky mají  $2m$  společných bodů  $1\ 1', 2\ 2', 3\ 3', \dots$  jejichž otáčením vznikne  $m$  kružnic  ${}^1a, {}^2a, {}^3a, \dots$  společných plochám  $\rho$  a  ${}^1\rho$ . Průsečíky  ${}^1A, {}^2A, {}^3A \dots$  těchto kružnic s přímkou  $p$  jsou průsečné body přímky  $p$  s plochou  $\rho$ , mimo ně již není žádný průsečný bod. Platí tedy:

\*) Čísla v závorkách vztahují se k seznamu literatury, uvedenému na konci knížky.



Body  $V_1 \equiv 0, {}^1V_1, {}^2V_1, \dots$ , tvoří řadu, v níž vzdálenosti bodů od počátku  $0$  jsou určeny hodnotami  $r \operatorname{tg} \varphi, r \operatorname{tg} 2\varphi, r \operatorname{tg} 3\varphi, \dots$ . Tato řada pro hodnotu  ${}^1r = \overline{SO}$  je narýsována v obr. 11c. Je zřejmé, že s touto řadou je promětná řada v přímce  $q_1$  v obr. b) i řada  $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ , v obr. a) a i řady bodů, vzniklé v jednotlivých povrchových přímkách uvažovaného



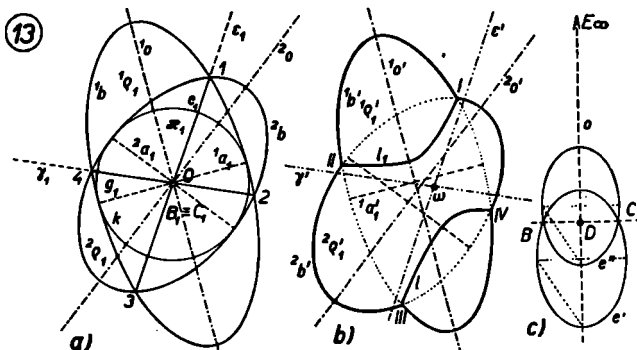
hyperboloidu. Zpravidla bývá přímek mezi stopou  ${}^2a$  a kružnicí  ${}^4a$  použito jako nožek, na nichž spočívá hmota chladicí věže a kudy do ní proudí vzduch. Mezi hodnotami: počet povrchových přímek (tím i úhlem  $\varphi$ ), výška celé věže, výška hrdla a výška kružnice  ${}^4a$  nad podstavou, existuje určitý vztah a proto nemohou býti všechny tyto hodnoty zvoleny. (Příloha I.)

2,63. *Rotací plochy druhého stupně a jejich rovinné řezy.* Otáčením kuželoseček okolo osy vznikají *rotační plochy druhého stupně* (obr. 12). Otáčením elipsy okolo *hlavní osy* vzniká *elipsoid vejčitý* nebo *prodloužený*, rotací hyperboly okolo *hlavní osy* *hyperboloid nepřímkový, dvojdílný*, elipsa, otáčející se kolem své *vedlejší osy* vytvoří *zploštělý elipsoid* a rotací paraboly okolo osy vznikne *rotační paraboloid*. Při otáčení hyperboly, lhostejno kolem které osy, vytvoří asymptoty poledníku rotační plochu — *asymptotickou plochu kuže-*



lovou — která se rotační plochy uvažované dotýká podél úběžné kružnice. Proto:

*Libovolná sečná rovina protíná hyperboloid i jeho asymptotickou plochu kuželovou v kuželosečkách, které mají úběžné body a tečny v nich společné, jsou tedy podobné, podobně položené a soustředné.*



Pro rotační paraboloid platí věta [(1) str. 467 a násl.], že libovolný rovinný řez se promítá směrem osy  $o$  (obr. 12d) rotační plochou válcovou  $\gamma$ . Tedy:

*Průsečné křivky rotačního paraboloidu o ose  $o$  a rotační plochy válcové s osou  $1o \parallel o$  jsou podobné a podobně položené elipsy.*

Rotační plochy druhého stupně, jejichž poledníky mají v ose otáčení ohniska, jeví se proto jako plochy, které jsou vyplněny body, majícími od těchto bodů stálý algebraický součet vzdáleností. Při paraboloidu je jedno ohnisko  $G$  úběžné.

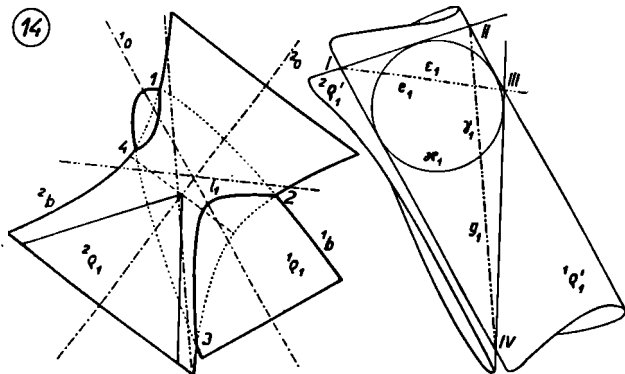
**2,64. Průniky dvou rotační ploch druhého stupně.** Úběžná přímka rovnoběžných rovin protíná plochu druhého stupně

ve dvou bodech, jimiž jdou průsečné kuželosečky uvažovaných rovin, proto také:

*Řezy rovnoběžných rovin s plochou druhého stupně jsou kuželosečky podobné a podobně položené.*

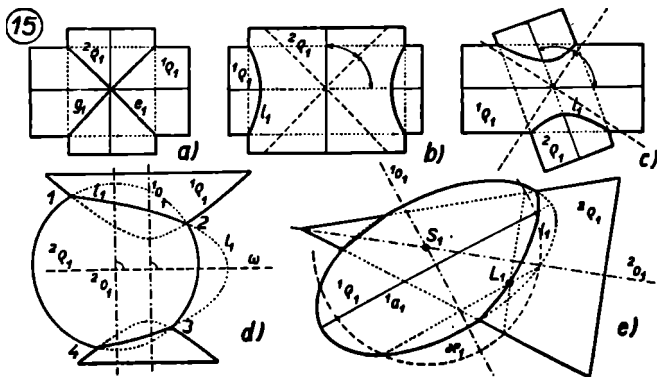
Dvě plochy druhého stupně protínají se obecně v prostoro-  
rové křivce čtvrtého stupně. Zvolme si (obr. 13a) plochu  
kulovou  $\kappa$  mající v bodě  $O$  v průmětně střed a stopu v kruž-  
nici  $k$ ! Bodem  $O$  proložme v průmětně dvě přímky  ${}^1o$ ,  ${}^2o$  a  
sestrojme dvě kuželosečky  ${}^1b$ ,  ${}^2b$ , mající v  $O$  střed a v přím-  
kách  ${}^1o$ ,  ${}^2o$  osy a dotýkající se kružnice  $k$ ! Otáčením křivek  
 ${}^1b$ ,  ${}^2b$  okolo os  ${}^1o$ ,  ${}^2o$  vytvoří se plochy  ${}^1q$ ,  ${}^2q$  druhého stupně,  
které se protnou v křivce čtvrtého stupně, kolmo souměrné  
k průmětně a jdoucí průsečnými body  $1, 2, 3, 4$  obou po-  
ledníků. Obě kružnice  ${}^1a$ ,  ${}^2a$ , podél nichž se plochy  ${}^1q$ ,  ${}^2q$  do-  
týkají kulové plochy  $\kappa$ , protínají se v bodech  $B$  a  $C$ , které  
rovněž náleží k pronikové křivce ploch  ${}^1q$  a  ${}^2q$ , které se v bo-  
dech  $B$  a  $C$  navzájem dotýkají. Rovina  $\varepsilon$  vedená body  
 $1, 3, B, C$  protíná plochy  ${}^1q$  a  ${}^2q$  v kuželosečkách, které ob-  
sahují uvedené body a v bodech  $B, C$  mají tečny rovnoběžné  
s průmětnou a jsou proto totožné. Obdobně je to i v rovině  $\gamma$   
jdoucí body  $2, 4, B, C$ . Je z toho zřejmé, že v tomto případě  
se proniková křivka ploch  ${}^1q$ ,  ${}^2q$ , které se dotýkají v bodech  
 $B, C$  rozpadla na dvě kuželosečky, které se promítají do úse-  
ček  $\overline{13} \equiv e_1$  a  $\overline{24} \equiv g_1$ . (Věta Mongeova <sup>(12)</sup>, str. 642.) Rovi-  
ny rovnoběžné s rovinami  $\varepsilon$  a  $\gamma$  těchto kuželoseček protí-  
nají plochy druhého stupně  ${}^1q$ ,  ${}^2q$  v kuželosečkách podob-  
ných a podobně položených — homothetických. Tohoto vý-  
sledku lze použití k sestrojení kolmého průmětu pronikové  
křivky dvou rotačních ploch druhého stupně  ${}^1q'$ ,  ${}^2q'$  (obr.  
13, část b) na průmětnu, jdoucí osami rotace. Proniková  
křivka  $l$  čtvrtého stupně, ježto je k průmětně kolmo souměr-  
ná, protne libovolnou rovinu k průmětně kolmou ve čtyřech  
bodech, které však vzhledem k tomu, že vždy dva z nich  
jsou na témž kolmo promítacím paprsku, dají jen *dva* body  
průmětu  $l_1$ . Je proto  $l_1$  kuželosečkou. Ta jde průsečnými

body  $I, II, III, IV$  obou poledníků  ${}^1b', {}^2b'$ . Protneme-li plochy  ${}^1\rho', {}^2\rho'$  rovinou kolmou k průmětně v kuželosečkách podobných a podobně položených, protnou se tyto kuželosečky (obr. 13c) ve dvou v konečnu položených bodech  $B, C$ , které vedou k průmětu  $D$  na ose kuželoseček  $e', e''$  položenému a dále ve dvou úběžných bodech, které na ose  $o$  dávají spo-



lečný úběžný průmět  $E$ . Z toho je patrné, že rovina  $\epsilon$  kolmá k průmětně, která seče plochy  ${}^1\rho', {}^2\rho'$  v kuželosečkách podobných a podobně položených promítá se na průmětnu do směru asymptoty kuželosečky  $l_1$ . Proto, jsou-li dány plochy  ${}^1\rho'$  a  ${}^2\rho'$  (obr. 13b), sestrojíme plochu kulovou  $\kappa$  (obr. 13a) a k ní plochy jí se dotýkající  ${}^1\rho$  a  ${}^2\rho$  podobné a podobně položené k plochám  ${}^1\rho', {}^2\rho'$ . Ty se protnou v kuželosečkách  $e$  a  $g$  a průměty  $\epsilon_1$  a  $\gamma_1$  rovin  $\epsilon$  a  $\gamma$ , v nichž jsou  $e$  a  $g$  položeny, na průmětnu jsou již směry asymptot kuželosečky  $l_1$  (obr. 13b). V obr. 14 sestrojena proniková křivka  $l$  rotačního hyperboloidu a rotačního paraboloidu, majících různoběžné osy v průmětně kolmého promítání. Zvolena pomocná plocha kulová  $\kappa$ , k ní sestrojena dotyková plocha rotační válcová  ${}^1\rho'$ , rovnoběžná s osou  ${}^1o$  paraboloidu  ${}^1\rho$  a dotyková plocha

kuželová  ${}^2\rho'$  rovnoběžná k asymptotické kuželové ploše hyperboloidu  ${}^2\rho$ . Plochy  ${}^1\rho'$ ,  ${}^2\rho'$ , dotýkající se plochy kulové  $\kappa$ , dotýkají se ve dvou bodech, proto jejich proniková křivka se rozpadla ve dvě kuželosečky  $e, g$ , ležící v rovinách  $\varepsilon$  a  $\gamma$ . Přímký  $\varepsilon_1$  a  $\gamma_1$  jsou směry asymptot kuželosečky  $l_1$ , určené dále průsečnými body 1, 2, 3, 4 obou poledníků  ${}^1b, {}^2b$ .



Z uvedeného je patrné, že dvě rotační plochy druhého stupně  ${}^1\rho, {}^2\rho$ , mající v průmětně své různoběžné osy, protínají se v křivce  $l$ , která se promítá kolmo na průmětnu do rovnose hyperboly, jsou-li poledníky  ${}^1b, {}^2b$  kuželosečky podobné (při elipsoidech musí být obě plochy buď vejčité nebo obě zploštělé). Směry asymptot hyperboly  $l_1$  rozpolují úhly sevřené osami ploch  ${}^1\rho, {}^2\rho$ . Sem patří případy, kdy  ${}^1\rho, {}^2\rho$  jsou obě rotační plochy válcové (obr. 15abc) nebo rotační paraboloidy nebo plocha válcová a rotační paraboloid, dále dvě plochy hyperboloidů nebo ploch kuželových, po případě plochy kuželové a hyperboloidu, kdy odchylky povrchových přímků ploch kuželových a ploch kuželových asymptotických od osy rotace jsou stejné.

Obecně je  $l_1$  hyperbolou, jejíž směry asymptot získáme obrazcem, obdobným k pomocnému výkresu v obr. 14.

Dvě rotační plochy druhého stupně, mající rovnoběžné osy, protínají se v křivce  $l$ , která se promítá kolmo na rovinu stanovenou osami do *paraboly*  $l_1$ , jejíž osa  $\omega$  je kolmá k osám daných ploch (obr. 15d).

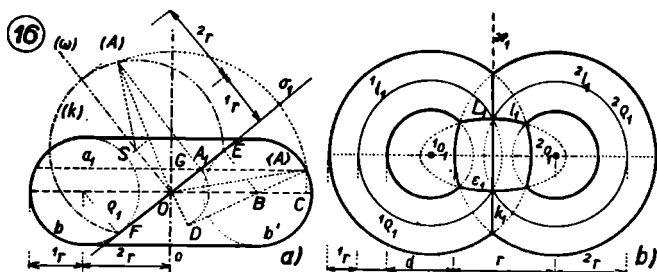
Jen v *případě*, kdy jedna a jen jedna z obou ploch, majících různoběžné osy, je *zploštělým elipsoidem*, je průmět  $l_1$  průsečné křivky  $l$  na rovinu určenou osami *elipsou* (obr. 15e).

**2,7. Kruhový prstenec — anuloid.** Zvolíme-li za poledníkovou křivku dvě k ose otáčení  $o$  souměrné kružnice, vytvoří se jejich otáčením plocha  $\rho$  čtvrtého stupně. Koncové body průměrů kružnic poledníkových, rovnoběžných k ose otáčení, probíhají *kružnice kraterové*, podél nichž se dotýkají plochy dvě roviny kolmé k ose. Bod nejbližší k ose popisuje *hrdlo*, které může přejíti do bodu, dotýkají-li se poledníkové kružnice osy  $o$ . Bod nejvzdálenější od osy probíhá *rovník*; v případě, že poledníkové kružnice protínají osu ve dvou bodech, jsou tyto *kuželovými body* plochy, která nemá hrdla, ale má dvě kružnice rovníkové.

Rovinný řez sestruje se podle 2,4; obr. 6a. Označme poloměr poledníkové kružnice  ${}^1r$ , vzdálenost jejího středu od osy  ${}^2r$ ! Je-li sečná rovina  $\sigma$  rovnoběžná s osou  $o$ , vzniká v řezu *spirická křivka Perseova*, pro případ, že vzdálenost roviny sečné od osy  $o$  je rovna  ${}^1r$ , je řezem *křivka Cassiniova*, pro níž součin vzdáleností od dvou pevných bodů — položených zde v rovině rovníku a vzdálených od osy souměrnosti průsečné křivky o délku  ${}^2r$  — je stálou hodnotou. Je-li  ${}^2r = 2 {}^1r$ , je křivka průsečná *Bernoulliho lemniskatou* [(<sup>1</sup>) str. 596 a n.].

Mysleme si (obr. 16a) v první průmětně  $\pi$  položenou osu  $o$  prstence  $\rho$ , jehož poledníkové kružnice jsou  $b$  a  $b'$ ! Podél nich se dotýkají plochy  $\rho$  dvě rotační válcové plochy, kolmé k průmětně, ke kterým vedme společnou rovinu tečnou  $\sigma \perp \pi$ ! Tato rovina dotýká se plochy  $\rho$  v bodech  $E$  a  $F$  —

je to t. zv. *rovina bitangenciální*. Její průsečnou křivku s plochou označme písmenou  $k$  a její bod položený na rovnoběžkové kružnici  $a$  označme  $A$ ! Stopa  $\langle A \rangle$  kružnice  $a$  je otočením bodu  $A$  kolem osy  $o$  do  $\pi$ . Oklopmo  $\sigma$  okolo  $\sigma_1$ , do  $\pi$ ! Bod  $A$  přejde do bodu  $(A)$  na kolmici  $(A)A_1 \perp \sigma_1$  a při tom úsečka  $(A)O = \overline{\langle A \rangle O}$ . Nanesme na kolmici  $(\omega)$  vztyče-



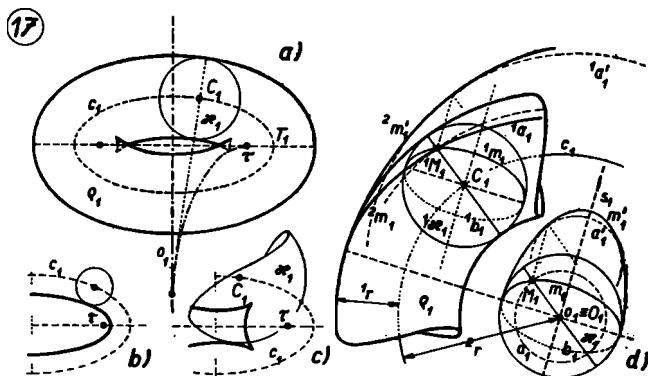
nou v bodě  $O$  k  $\sigma_1$  úsečku  $\overline{SO} = {}^1r = \overline{B\langle A \rangle}$ . Získali jsme tu trojúhelník  $\triangle DOB \sim \triangle C\langle A \rangle B$  a trojúhelník  $\triangle GOA_1 \sim \triangle EBO$ . Z prvé dvojiny plyne, že  $\overline{OD} : \overline{\langle A \rangle C} = \overline{OB} : \overline{\langle A \rangle B} = {}^2r : {}^1r$ , z druhé dvojiny, že  $\overline{A_1O} : \overline{OG} = \overline{OB} : \overline{BE} = {}^2r : {}^1r$  a ježto  $\overline{\langle A \rangle C} = \overline{GO}$ , je i  $\overline{OG} = \overline{OD}$ . Jsou proto  $\triangle OB\langle A \rangle$  a  $\triangle (A)SO$  shodné. Je tedy  $\overline{S(A)} = {}^2r$ . Z toho patrné, že část řezu roviny  $\sigma$  s plochou  $\rho$  položená nad  $\pi$  je kružnice  $k$  o poloměru  ${}^2r$ , jejíž střed  $S$  je od osy vzdálen o délku  ${}^1r$ . Celý řez je kolmo souměrný k  $\pi$  a z toho plyne:

*Bitangenciální rovina protíná anuloid ve dvou kružnicích o poloměru  ${}^2r$ , jejichž středy jsou od osy vzdáleny o délku  ${}^1r$ , rovnou poloměru poledníka.*

Podržíme-li jednu z těchto kružnic, na př.  $k$  a otočíme-li druhou okolo osy do polohy  $l$ , lze kružnicemi  $k$  a  $l$  proložit plochu kulovou, která se v průsečných bodech  $M, N$  těchto kružnic dotýká plochy  $\rho$ .

*Bitangenciální plochy kulové protínají anuloid ve dvou kružnicích, majících poloměr  ${}^2r$  rovný vzdálenosti středu poledníku od osy rotace.*

Vytkněme dva prstence  ${}^1\rho$ ,  ${}^2\rho$  (obr. 16b) o středech  ${}^1O$  a  ${}^2O$  v  $\pi$  a osách  ${}^1o$ ,  ${}^2o$  kolmých k  $\pi$ ! Hodnoty  ${}^1r$ ,  ${}^2r$  buďtež shodné pro tyto plochy! Podle odst. 2,5 obr. 8 promítá se



proniková křivka kolmo na  $\pi$  do konfokálních kuželoseček, které mají v průmětu  ${}^1o_1$ ,  ${}^2o_1$  os svá ohniska. Hyperbolický průmět  $k_1$  jedné části pronikové křivky přešel tu do přímky  $\kappa_1$ , průmětem další části  $e$  je elipsa  $e_1$ ; stopa eliptické válcové plochy  $\varepsilon$ . Tím je doplněn odst. 2,5 obr. 7b. Je tu zřejmo, že plochy  ${}^1\rho$ ,  ${}^2\rho$  se neprotínají *pouze* v křivce  $k$ , ale ještě v další křivce, která ji doplňuje na úplnou pronikovou křivku. Stane-li se vzdálenost  $d = 0$ , dotknou se obě plochy  ${}^1\rho$  a  ${}^2\rho$  ve dvou bodech a křivka  $e$  rozpadne se na dvě povrchové kružnice těchto ploch.

Plochu kruhového prstence  $\rho$  můžeme pokládati za obalovou plochu kuželových ploch rotačních a kulových ploch sousých s prstencem. Mimo to podle každé kružnice poled-

níkové se dotýká plochy  $\rho$  rotační plocha válcová, jejíž osa je kolmá k rovině příslušného poledníku. Do této plochy můžeme vepsati tečnou plochu kulovou a je tedy zřejmé, že:

*Kruhový prstenec je obalovou plochou kulových ploch o poloměru  ${}^1r$ , jejichž středy probíhají kružnici  $C$  o poloměru  ${}^2r$ .*

Z toho dále plyne:

*Obrys libovolného kolmého průmětu kruhového prstence je jako obálka shodných kružnic o poloměru  ${}^1r$  aequidistantou eliptického průmětu kružnice  $C$  (obr. 17a).*

Tento obrys průmětu má dvě větve: *vnější*, zdánlivě eliptickou, ale *elipsou tato větev není*, a *vnitřní*, která může mít dva dvojné body a čtyři body úvratu (obr. 17a). Závisí to na tom, zda poloměr  ${}^1r$  poledníku je větší či menší nežli je poloměr křivosti pro vrchol hlavní osy elipsy  $C_1$  (srovnej obr. 17c a 17b).

Rovnoběžné osvětlení prstence  $\rho$  provádí se snadno za pomoci ploch kulových, dotýkajících se plochy  $\rho$  podél poledníků (obr. 17d). Zvolme prstenec  $\rho$  o středu  $O$  v první průmětně  $\pi$ , osa jeho buď  $o \perp \pi$ ! Vytkněme s prstencem soustřednou plochu kulovou  $\kappa$  o poloměru  ${}^1r$  a s ní shodnou plochu kulovou  ${}^1\kappa$ , která se  $\rho$  dotýká podél poledníkové kružnice  ${}^1b$ ! Pro světelné paprsky dané směrem  $s$  buďtež  $m$  a  ${}^1m$  mezemi vlastních stínů ploch  $\kappa$  a  ${}^1\kappa$ ; vyznačíme-li ještě na  $\kappa$  poledníkovou kružnici  $b$  položenou v rovině poledníku  ${}^1b$ , je zřejmo, že v prostoru  ${}^1\overline{MM} \# {}^1\overline{M}_1\overline{M}_1 = {}^2r$ . Z toho:

*Kolmý průmět  ${}^2m_1$  meze vlastního stínu kruhového prstence  $\rho$  na rovinu kolmou k ose  $o$  je konchoida eliptického průmětu  $m_1$  meze stínu vlastního s prstencem soustředné plochy kulové o poloměru  ${}^1r$  pro stálou délku rovnou  ${}^2r$  a pro pól totožný s bodem  $o_1$ .*

Body  $M$  a  ${}^1M$  jsou ve stejné výši nad průmětnou. Jimi procházejí na  $\rho$  a  $\kappa$  rovnoběžkové kružnice v prostoru soustředné  ${}^1a$  a  $a$ , pro něž rozdíl poloměrů je roven  ${}^2r$ . Vržené



stíny  $a'$  kružnic  $a$  obalují eliptický vržený stín  $m'$  plochy kulové  $\kappa$ ; vržené stíny  ${}^1a'$  kružnic  ${}^1a$  mající vždy poloměr o  ${}^2r$  větší než kružnice  $a$  obalují proto aequidistantu křivky  $m'_1$  pro stálou hodnotu rovnou  ${}^2r$ . Z toho je patrné:

*Vržené stíny při rovnoběžném osvětlení a dále obrisy kruhového prstence v kosoúhlém promítání jsou afinními křivkami k eliptickým aequidistantám.*

Použití rotačních ploch je patrné z přílohy II a III.