# 9. Doplňky k theorii řetězců

# DOPLŇKY K THEORII ŘETĚZŮ

**92. Veličiny $P_{ik}^{(n)}$ jakožto koeficienty lineární substituce.** Budiž dán jednoduchý řetěz o $r$ eventualitách s konstantními pravděpodobnostmi přechodu $p_{ik}$, $(i, k = 1, 2, \ldots, r)$. Je-li

$$y_k = \sum_{l=1}^{r} p_{kl} x_l; \; k = 1, 2, \ldots, r \tag{1}$$

homogenní lineární substituce, která vede od proměnných $x_l$ k proměnným $y_k$, dostaneme, aplikujíce tutéž substituci na proměnné $y_k$, nové proměnné $z_i$, jež budou určeny rovnicemi:

$$z_i = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{r} p_{ik} p_{kl} x_l = \sum_{i=1}^{r} P_{il}^{(2)} x_l,$$

kde $P_{il}^{(2)}$ jsou veličiny definované v odst. 71c. Kdybychom aplikovali substituci (1) postupně $n$-kráte, byly by výsledné proměnné $w_i$, jakožto funkce původních proměnných $x_k$, vyjádřeny rovnicemi

$$w_i = \sum_{k=1}^{r} P_{ik}^{(n)} x_k, \; i = 1, 2, \ldots, r.$$

Veličiny $P_{ik}^{(n)}$, zavedené v odst. 71c, jsou tedy koeficienty substituce, která vznikne $n$-násobnou iterací (opakováním) substituce (1) s koeficienty $p_{ik}$.

**93. O kořenech charakteristické rovnice.** Romanovského formule (8), odst. 79 ukazuje zřetelně, že způsob, kterým $P_{ik}^{(n)}$ závisí na indexu $n$, je podmíněn vlastnostmi kořenů $\lambda_j$ charakteristické rovnice (odst. 78). Zavedeme-li na místo $\lambda$ převrácenou hodnotu $s = 1 : \lambda$, nabude charakteristická rovnice tvaru

$$\begin{vmatrix} p_{11} - s, & p_{12}, & \dots, & p_{1r} \\ p_{21}, & p_{22} - s, & \dots, & p_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{r1}, & p_{r2}, & \dots, & p_{rr} - s \end{vmatrix} = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{r} p_{ik} = 1, \ i = 1, 2, \dots, r; \ p_{ik} \geqq 0, \ i, k = 1, 2, \dots, r. \tag{2}$$

J. Kaucký ukázal, jak se pozmění obecný tvar Romanovského formule, má-li rovnice (1) mnohonásobné kořeny, a dokázal větu: Nemá-li rovnice (1), za předpokladů (2), jiných kořenů o absolutní hodnotě rovné 1 než kořen 1, existují limity $P_{ik}^{(n)}$ pro $n \to \infty$ a závisí obecně na obou indexech $i, k$, ($i, k = 1, 2, \dots, r$); je-li kořen 1 jednoduchý a existují-li tyto limity, jsou nezávislé na indexu $i$. M. Konečný dokázal větu obrácenou: existují-li řečené limity pro všechna $i, k = 1, 2, \dots, r$, mají kořeny rovnice (1) všechny kromě kořenu 1 absolutní hodnotu menší než 1; jsou-li ony limity nezávislé na indexu $i$, je jednotkový kořen jednoduchý.*) M. Fréchet doplnil tyto výsledky,**) zejména rozborem vlastností aritmetických středů:

$$\pi_{ik}^{(n)} = \frac{P_{ik}^{(1)} + P_{ik}^{(2)} + \dots + P_{ik}^{(n)}}{n};$$

v další práci pojednal o vlastnostech veličin $P_{ik}^{(n)}$ a $\pi_{ik}^{(n)}$, tvoříme-li je na základě zcela libovolně daných veličin $p_{ik}$, bez ohledu na podmínky (2), a dokázal větu: všechny kořeny rovnice (1), platí-li podmínky (2), jsou obsaženy v rovině komplexní proměnné $s$ v kruhu, který prochází bodem $s = 1$

*) *J. Kaucký*: Několik poznámek o Markovových řetězech (Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university, č. 131; Brno 1930). — *M. Konečný*: K teorii Markovových řetězů (tamtéž, č. 147; 1931).

**) *M. Fréchet*: Compléments à la théorie des Probabilités discontinues, „en chaîne“ (Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa (2), 2, p. 131; 1931).

a má střed v bodě $s = \omega$; $\omega$ značí nejmenší z čísel $p_{11}$, $p_{22}$, ..., $p_{rr}$.*)

**94. Methoda vytvořujících funkcí v případě řetězu.** Podle odst. 43 je v některých úlohách výhodno určiti hledanou pravděpodobnost závislou na celém čísle $\alpha$ jakožto koeficient při $t^\alpha$ v Maclaurinově řadě, která vyjadřuje příslušnou „vytvořující funkci" proměnné $t$. Markov užil této methody v theorii řetězů, zejména k výpočtu disperse.**)

**95. Řetěz s nekonečně velkým počtem eventualit.** a) Předpokládejme, že pokus má za výsledek jeden z nekonečně velikého počtu zjevů $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ a podržme definici pravděpodobností přechodu $p_{ik}$ tak, jak jsme ji uvedli v odst. 71 pro jednoduchý řetěz s konstantními $p_{ik}$. Pak budeme míti pro pravděpodobnosti vztahující se k opětovaným pokusům

$$P_{ik}^{(n)} \geqq 0, \ \sum_{k=1}^{\infty} P_{ik}^{(n)} = 1, \ P_{ik}^{(1)} = p_{ik},$$

$$P_{ik}^{(m+n)} = \sum_{j=1}^{\infty} P_{ij}^{(m)} P_{jk}^{(n)}, \ i, k, m, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Studiem takovýchto řetězů se zabývali zejména R. Fortet a A. Kolmogorov***).

---

*) *M. Fréchet*: Comportement asymptotique des solutions d'un système d'équations linéaires et homogènes aux différences finies du premier ordre à coefficients constants (Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university, č. 178; Brno 1933).

**) *A. A. Markov*: Izčislěnije věrojatnostej, 4. vyd. (Moskva 1924); něm. překlad: *Markoff-Liebmann*: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Anhang II (Leipzig 1912). Viz též autorovu práci o řetězech z r. 1929 citovanou dále v poznámce k odst. 96.

***) *R. Fortet*: Sur l'itération des substitutions algébriques linéaires à une infinité de variables et ses applications à la théorie des probabilités en chaîne (Thèse; Revista de Ciencias 40; Lima 1938). Viz též *A. Kolmogoroff*: Anfangsgründe der Theorie der Markoff'schen Ketten mit unendlich vielen möglichen Zuständen (Matěmatičeskij Sbornik, (2), I; Moskva 1936).

b) Jako příklad uvádím úlohu, kterou se zabýval Markov ve své první práci o řetězech:*) V osudí je jedna koule bílá a jedna černá. Vytáhneme jednu kouli, vložíme ji zpět a zároveň tam přidáme jednu další kouli a to barvy, jakou měla vytažená koule. Tah opakujeme vždy za téže podmínky: vytažená koule se vrací do osudí a přidává se jedna téže barvy. Po $n$-tém tahu bude v osudí $(n + 2)$ koulí. Ptáme-li se na pravděpodobnosti přechodu z jednoho složení osudí ke druhému, máme zde řetěz o nekonečně velikém počtu eventualit; mimo to pravděpodobnosti přechodu závisí na pořadovém čísle tahu.

Položme si otázku: Jak veliká je pravděpodobnost $P$, že v $n$ tazích bude tažena bílá koule celkem $m$-krát?

$P$ určíme postupem podobným tomu, kterého jsme užili v odst. 13a. Pravděpodobnost $P'$, že každý z prvních $m$ tahů dá bílou kouli a že každý z dalších $(n - m)$ tahů dá černou, je

$$P' = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{m}{m+1} \cdot \frac{1}{m+2} \cdot \frac{2}{m+3} \cdot \frac{3}{m+4} \cdots \frac{n-m}{n+1}.$$

Stejnou hodnotu $P'$ má pravděpodobnost, že v $m$ tazích, jichž pořadová čísla $a, b, c, \ldots$ jsou předem dána, vyjde bílá a v ostatních $(n - m)$ tazích černá. $P$ je úhrnná pravděpodobnost rovná součtu všech pravděpodobností, které odpovídají případům s různými pořadovými čísly $a, b, c, \ldots$ Těch případů je $(n)_m$ a proto

$$P = (n)_m \,.\, P' = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot \frac{m!(n-m)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}.$$

$P$ tedy nezávisí na $m$. V $n$ tazích se stejnou pravděpodobností $1 : (n + 1)$ vyjde bílá koule jen jednou, nebo jen dvakrát atd.

---

*) *A. A. Markov*: Razprostraněnije zakona bolšich čísel zavisaščija drug od druga (Izvěstija fis.-mat. obščestva pri imper. Kasanskom Universitetu (2), 15, 135; 1906). Viz též *Eggenberger-M. Pólya*: Über die Statistik verketterter Vorgänge (Zeitschr. für angewandte Mathematik und Mechanik 3, 279; 1923).

nebo vůbec nevyjde. Střední hodnota $E(m)$ počtu vytažených bílých koulí v $n$ tazích je

$$E(m) = \sum_{m=0}^{n} P \cdot m = \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n + 1} = \tfrac{1}{2}n.$$

Poměr $m : n$ nabývá každé z možných hodnot

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1$$

se stejnou pravděpodobností $P = 1 : (n + 1)$; roste-li $n$ do nekonečna, pravděpodobnost nerovnosti

$$\left| \frac{m}{n} - E\left(\frac{m}{n}\right) \right| < \varepsilon,$$

kde $E$ je libovolně malé dané kladné číslo, nemá za limitu jednotku. Zákon velkých čísel zde neplatí.

Rozdíl proti případu opětovaných pokusů s konstantní pravděpodobností $p$, že se pokus zdaří (odst. 13), je v tom: v případě odst. 13 má pravděpodobnost, že $m$ pokusů se zdaří, maximální hodnotu pro určité $m_1$; s rostoucím celkovým počtem $n$ pokusů se pravděpodobnost případů, ve kterých se $m$ liší od $m_1$, zmenšuje.

**96. Bibliografické poznámky.** Z knih, které poslouží k dalšímu studiu řetězů, upozorňuji na knihu Bernštejnovu,*) která je i jinak znamenitou učebnicí počtu pravděpodobnosti vůbec, a na Fréchetovu, citovanou v poznámce k odst. 87.

Dále uvádím dvě základní práce o řetězech se spojitě proměnnými veličinami**) a několik souborných pojednání a spisů věnovaných jednak úlohám, které byly rozebírány v těchto přednáškách, jednak dalším úlohám týkajícím se řetězů a jejich aplikací ve fysice.***)

---

*) *S. N. Bernštejn*: Těoria věrojatnostěj, 4. vyd., Moskva 1946.

**) *A. Kolmogoroff*: Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Mathem. Annalen 104, 415; 1931). — *M. Fréchet*: Les probabilités continues „en chaîne" (Commentarii mathem. helvetici 5, 175; 1933).

***) *S. Bernštejn*: Sur les liaisons entre les grandeurs aléatoires (Verhandlungen des internat. Mathematiker-Kongresses Bd. I, 288; Zürich 1932). — *W. Doeblin*: Exposé de la Théorie des Chaînes simples constantes de Markoff à un nombre fini d'Etats (Revue mathém. de l'Union interbalkanique 2, 77; Athènes 1938). — *B. Hostinský*: O pravděpodobnosti zjevů, jež jsou spojeny v Markovovy řetězy (Sborník přírodovědecký vyd. Českou akademií 1929, str. 289). — Méthodes générales du Calcul des Probabilités (Mémorial des Sciences mathém. fasc. 52; Paris 1931). — Application du Calcul des Probabilités à la Théorie du mouvement Brownien (Annales de l'Institut H. Poincaré 3, 1; Paris 1932). — Sur les probabilités relatives aux variables aléatoires liées entre elles. Applications diverses (tamtéž 7, 69; 1939). — Čtyři přednášky o různých problémech theoretické fysiky (Časopis pro pěstování matem. a fysiky *61*, 33; 1931). — O teorii Markovových řetězů a o integraci lineárních transformací (tamtéž, *63*, 167; 1934). — Équations fonctionnelles relatives aux probabilités en chaîne (Actualités scientifiques et industrielles No 782; Paris 1939).