Determinanty a matice v theorii a praxi

12. Formy Hermiteovy

In: Václav Vodička (author): Determinanty a matice v theorii a praxi. Část druhá. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1950. pp. 126–134.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403297

12. FORMY HERMITEOVY.

V tomto odstavci se zmíníme o jistém zobecnění pojmu reálné bilineární formy reálných proměnných (viz odst. 6.). Protože půjde o úvahy, které vykazují mnoho obdobných bodů s vývody předchozích odstavců, budeme se vyjadřovati co nejstručněji.

Číslo konjugované s komplexním číslem a označíme jako obvykle symbolem $\bar{a}$. Součin $a\bar{a}$ takových dvou veličin je vždy reálné a nezáporné číslo (vždycky kladné pro $a \neq 0$).

Jsou-li

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n; \; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \tag{205}$$

dvě soustavy komplexních čísel, budeme nazývati výraz

$$(\xi\eta) = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu \eta_\nu \tag{206}$$

jejich *vnitřním součinem*. V případě, že není prvá ze soustav identicky nulová a že jest $\eta_\nu = \bar{\xi}_\nu$ pro všechna $\nu = 1, 2, \ldots, n$, jest ovšem $(\xi\eta) = (\xi\bar{\xi}) > 0$. Označení $(\xi\eta)$ bylo sice již použito v odst. 10. při studiu invariantů, ovšem v docela jiném významu; nedorozumění se není v tomto ohledu třeba obávati.

Je-li pro řady (205) součin $(\xi\bar{\eta})$ nulový, říkáme že jsou navzájem orthogonální; jsou-li speciálně všechna ξ_ν reálná a $(\xi\xi) = 1$, mluvíme o řadě ve tvaru normálním a stejným názvem označujeme také řadu komplexních čísel

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n,$$

platí-li pro ni vztah $(\xi\bar{\xi}) = 1$.

Definice: Výraz H utvořený z komplexních konstant a_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ a z řady $z_1, z_2, \ldots, z_n$ komplexních proměnných podle předpisu

$$H = \sum_{i,k}^{1,n} a_{ik} z_i \bar{z}_k \tag{207}$$

se jmenuje *Hermiteova forma*, je-li

$$a_{ik} = \bar{a}_{ki} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n), \tag{208}$$

čili jinými slovy, je-li determinant $A = |a_{ik}|$; $i, k = 1, 2, \ldots, n$ determinantem Hermiteovým.

Poznámka. Snadno lze nahlédnouti, že nabývá takováto forma jen reálných hodnot.

Charakteristickou rovnicí Hermiteovy formy (207) nazýváme kteroukoli z obou rovnic navzájem identických (dokažte pomocí vlastnosti (208) koeficientů a_{ik}):

$$|a_{ik} - \delta_{ik}\varrho| = 0, \ |\bar{a}_{ik} - \delta_{ik}\varrho| = 0; \ i, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{209}$$

Z předchozího paragrafu víme, že jsou kořeny $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ této rovnice — říká se jim charakteristické konstanty formy (207) — vesměs reálné.

Systém n homogenních rovnic

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} - \delta_{ik}\varrho_\nu)\, x_k = 0; \ i = 1, 2, \ldots, n \tag{210}$$

o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ budeme pro technické potřeby nazývati soustavou přidruženou k charakteristické konstantě ϱ_ν.

Znakem δ_{ik} ovšem označujeme stále Kroneckerův symbol.

Dokážeme si nyní tuto větu:

Systém (210) *má právě tolik navzájem nezávislých řešení, kolikanásobnou jest ϱ_ν charakteristickou konstantou Hermiteovy formy* (207).

Je-li totiž ona konstanta r-násobná, má rovnice

$$f(\sigma) \equiv |a_{ik} - \delta_{ik}(\varrho_\nu + \sigma)| \,.\, |\bar{a}_{ik} - \delta_{ik}(\varrho_\nu - \sigma)| = 0;$$
$$i, k = 1, 2, \ldots, n$$

zřejmě $2r$-násobný kořen $\sigma = 0$, takže obsahuje rovniční polynom $f(\sigma)$ až teprve mocninu σ^{2r} a vyšší. Provedeme-li naznačené násobení determinantů, shledáme v důsledku toho (úvahy jsou obdobné jako v předchozím odstavci při studiu rovnice Hermiteovy a sekulární), že má determinant

$$D(\varrho_\nu) = |a_{ik} - \delta_{ik}\varrho_\nu|; \; i, k = 1, 2, \ldots, n$$

soustavy (210) hodnost $h - r$ a tato má tedy — viz odst. 3. — skutečně právě r řešení navzájem nezávislých.

Všechny různé charakteristické konstanty formy (207) buďtež $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_l$; příslušné násobnosti pak $r_1, r_2, \ldots, r_l$. Soustava patřící k charakteristické konstantě ϱ_λ má podle předchozích úvah celkem r_λ navzájem nezávislých řešení. Označíme je

$$x_{\varkappa 1}{}^{(\varrho_\lambda)}, x_{\varkappa 2}{}^{(\varrho_\lambda)}, \ldots, x_{\varkappa n}{}^{(\varrho_\lambda)}; \; \varkappa = 1, 2, \ldots, r_\lambda \tag{211}$$

a ukážeme, že lze všechna bez újmy obecnosti pokládati za orthogonální s jedním z nich — třeba s prvým.

Není-li totiž už přímo

$$(\bar{x}_2{}^{(\varrho_\lambda)} x_1{}^{(\varrho_\lambda)}) = \sum_{\nu=1}^{n} \bar{x}_{2\nu}{}^{(\varrho_\lambda)} x_{1\nu}{}^{(\varrho_\lambda)} = 0,$$

nahradíme druhou ze soustav (211) soustavou novou

$$x_{21}{}^{(\varrho_\lambda)} - q x_{11}{}^{(\varrho_\lambda)}, x_{22}{}^{(\varrho_\lambda)} - q x_{12}{}^{(\varrho_\lambda)}, \ldots, x_{2n}{}^{(\varrho_\lambda)} - q x_{1n}{}^{(\varrho_\lambda)}, \tag{212}$$

která jest při libovolném q se všemi ostatními rovněž nezávislá. Volíme-li pro q hodnotu

$$q = \frac{(x_1{}^{(\varrho_\lambda)} \bar{x}_2{}^{(\varrho_\lambda)})}{(x_1{}^{(\varrho_\lambda)} \bar{x}_1{}^{(\varrho_\lambda)})}, \tag{213}$$

bude řešení (212) rovnic (210) — kde ovšem místo ϱ_ν stojí ϱ_λ — orthogonální s prvou ze soustav (211).

V soustavě řešení (211) lze tedy pokládati prvá dvě (t. j. pro indexy $\varkappa = 1, \varkappa = 2$) za vzájemně orthogonální.

Nahradíme-li nyní v případě potřeby — t. j. v případě, kdy soustava mající index $\varkappa = 3$ není současně orthogonální s oběma předchozími — třetí soustavu novou

$$x_{3\nu}^{(\varrho_\lambda)} - sx_{2\nu}^{(\varrho_\lambda)} - tx_{1\nu}^{(\varrho_\lambda)}; \; \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

lze snadno určiti konstanty s a t tak, aby tato soustava byla už orthogonální jak k soustavě prvé, tak i ke druhé. Stanovení konstant s, t je elementární otázkou a přenechávám ji čtenáři.

Opakujeme-li naznačený postup tak dlouho, až vyčerpáme všech r_λ řešení (211), dospějeme k soustavě celkem r_λ navzájem nezávislých řešení systému rovnic obdobných ku (210), avšak přidružených k charakteristické konstantě ϱ_λ a každá dvě z těchto řešení jsou spolu orthogonální.

Ježto jest každé z oněch řešení určeno až na libovolnou multiplikativní konstantu, lze zmíněný „orthogonalisovaný" systém také ještě normovat, t. j. dosáhnouti násobením každého řešení vhodnou konstantou toho, aby byl vnitřní součin onoho řešení a soustavy s ním sdružené roven jedničce.

Theoreticky je zmíněný proces normování a orthogonalisování dané soustavy sice zcela elementární a průhledný, jeho praktické provádění je však značně pracné a proto se hledají různá zjednodušení. Zde se spokojíme konstatováním, že se dá provésti a budeme v důsledku toho pokládati už soustavu (211) za normovanou a orthogonalisovanou.

Napíšeme-li pod sebe všech r_1 normovaných a orthogonalisovaných řešení soustavy přidružené k charakteristické konstantě ϱ_1, pod ně potom všechna obdobná řešení příslušná ku ϱ_2 atd., dostaneme čtverečnou n-řadovou matici

$$\mathbf{C} = \|c_{ik}\|; \; i, k = 1, 2, \ldots, n \qquad (214)$$

a ta jest orthogonální. To znamená, že jsou kterékoli dva její řádky navzájem orthogonální a že tvoří každá řádka sama pro sebe soustavu normální.

Vzájemná orthogonalita dvou řádek patřících k téže charakteristické konstantě je přímým důsledkem konstrukce matice (214), takže stačí dokázati tuto vlastnost ještě pro takové dvě řádky, které patří ke dvěma různým charakteristickým konstantám. Tento důkaz probíhá analogickým způsobem, jako v příkladě 33., jsou zde jen zcela bezpodstatné změny vlivem toho, že pracujeme nyní stále s čísly komplexními.

Nechť tedy patří řádek $c_{\alpha 1}, c_{\alpha 2}, \ldots, c_{\alpha n}$ matice (214) k charakteristické konstantě ϱ_α, řádek $c_{\beta 1}, c_{\beta 2}, \ldots, c_{\beta n}$ pak k jiné konstantě ϱ_β. Matematicky jsou tyto poměry vyjádřeny relacemi

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{\alpha k} = \varrho_\alpha c_{\alpha i}, \quad \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{ik} \bar{c}_{\beta k} = \varrho_\beta \bar{c}_{\beta i}; \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Z prvé z nich plyne

$$\varrho_\alpha \sum_{i=1}^{n} c_{\alpha i} \bar{c}_{\beta i} = \sum_{i,k}^{1,n} a_{ik} c_{\alpha k} \bar{c}_{\beta i},$$

z druhé pak použitím vztahů (208) dostáváme postupně

$$\varrho_\beta \sum_{i=1}^{n} \bar{c}_{\beta i} c_{\alpha i} = \sum_{i,k}^{1,n} \bar{a}_{ik} \bar{c}_{\beta k} c_{\alpha i} = \sum_{i,k}^{1,n} a_{ki} \bar{c}_{\beta k} c_{\alpha i} = \sum_{i,k}^{1,n} a_{ik} \bar{c}_{\beta i} c_{\alpha k}.$$

Odtud ovšem plyne dále

$$(\varrho_\beta - \varrho_\alpha) \sum_{i=1}^{n} c_{\alpha i} \bar{c}_{\beta i} = 0$$

a vzhledem k předpokládané nerovnosti $\varrho_\alpha \neq \varrho_\beta$ konečně

$$\sum_{i=1}^{n} c_{\alpha i} \bar{c}_{\beta i} = 0. \tag{215}$$

Tato rovnice jest však právě matematickým výrazem pro vzájemnou orthogonalitu obou soustav $c_{\alpha i}$, $c_{\beta i}$; $i = 1, 2, \ldots, n$.

Nahradíme-li v orthogonální matici **C** (dokažte, že jest regulární) každý element c_{ik} číslem komplexně sdruženým a pak ještě vyměníme řádky a sloupce matice tím vzniklé navzájem, dospíváme k matici důležité pro další výklad — označíme ji znakem **D**.

Aby nedošlo k nedorozumění, budeme v tomto odstavci označovati znakem $\bar{\boldsymbol{B}}$ matici vzniklou z dané $\boldsymbol{B}$ nahrazením všech jejích prvků čísly *komplexně sdruženými* a *symbolem* $\tilde{\boldsymbol{B}}$ *matici k* $\boldsymbol{B}$ *transponovanou* (viz str. 87 ve svazku prvém).

Danou formu (207) nyní podrobme regulární lineární (a orthogonální; dokažte) transformaci

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{Z}, \tag{216}$$

takže je nutno psáti též

$$\bar{\mathbf{z}} = \bar{\boldsymbol{D}}\bar{\boldsymbol{Z}} = \tilde{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{Z}.$$

Maticový obraz (viz odst. 6.)

$$\tilde{\mathbf{z}}\boldsymbol{A}\bar{\mathbf{z}}$$

naší formy (207) tím nabude tvaru

$$\tilde{\boldsymbol{Z}}\tilde{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{C}}\bar{\boldsymbol{Z}}$$

a forma sama tedy uvedenou transformací přechází opět ve formu typu Hermiteova, ovšem v proměnných $Z_i, \bar{Z}_k$ a s maticí

$$\boldsymbol{R} = \tilde{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{C}} = \bar{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{C}}. \tag{217}$$

Řádky matice $\boldsymbol{C}$ však jsou řešeními soustav tvaru (210), přidružených k jednotlivým charakteristickým konstantám dané Hermiteovy formy (207). Označme nyní tyto konstanty po řadě $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ (mezi těmito čísly je ovšem r_1 navzájem stejných a rovných ϱ_1, r_2 stejných se společnou hodnotou ϱ_2 atd.). Platí tedy

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\omega\nu} c_{k\nu} = \varkappa_k c_{k\omega}; \quad \omega, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{218}$$

Obecný prvek r_{ik} matice $\boldsymbol{R}$ má pak podle elementárních pravidel o násobení matic (viz svazek prvý, odst. 9.) a vzhledem k orthogonalitě matice $\boldsymbol{C}$ hodnotu

$$r_{ik} = \sum_{\omega=1}^{n} \bar{c}_{i\omega} \sum_{\nu=1}^{n} a_{\omega\nu} c_{k\nu} = \varkappa_k \sum_{\omega=1}^{n} \bar{c}_{i\omega} c_{k\omega} = \delta_{ik}\varkappa_k;$$
$$i, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{219}$$

Výsledek všech dosavadních úvah o Hermiteových formách vyslovíme nyní touto důležitou

větou 15. Existuje vždy taková orthogonální lineární transformace regulární, která převádí Hermiteovu formu

$$H = \sum_{i,k} a_{ik} z_i \bar{z}_k; \quad i, k = 1, 2, \ldots, n$$

na jednoduchý tvar, říká se mu normální,

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varkappa_\nu Z_\nu \overline{Z_\nu} \tag{220}$$

s reálnými koeficienty $\varkappa_\nu$.

Jest to transformace (216), při čemž souvisí matice **D** výše popsaným způsobem s charakteristickými konstantami dané formy.

Jak jsme se už zmínili, může Hermiteova forma nabývati jen hodnot reálných. Jsou pak mezi formami tohoto typu takové, které nikdy nemají hodnotu zápornou a na druhé straně opět takové, které dají vždy výsledek nekladný, ať dosadíme za proměnné $z_1, z_2, \ldots, z_n$ jakýchkoli n komplexních čísel. Formám těchto dvou druhů se říká definitní, ostatní Hermiteovy formy se jmenují indefinitními.

Normální tvar (220) Hermiteovy formy (207) vede pak přímo k této větě: Nutná a postačující podmínka, aby byla Hermiteova forma (207) definitní, jest ta, aby měly její charakteristické konstanty $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ totéž znaménko.

Má-li forma hodnost r (t. j. má-li tuto hodnost její matice; srovnejte s dalšími vývody úvahy o redukci bilineárních a kvadratických forem na normální tvar v odst. 6. a 7.), jest v jejím normálním tvaru (220) právě r nenulových koeficientů $\varkappa_\nu$. Budiž obecně p z nich positivních, q negativních ($p + q = r$); výraz $p - q$ se pak jmenuje signaturou dané Hermiteovy formy a její význam jest daleko hlubší, než by se zdálo z těch několika slov, která jsme tu uvedli.

Lze totiž ukázati, že nezávisí signatura formy (207) na způsobu, jakým jsme ji uvedli na normální tvar (vedle redukce popsané výše existují totiž ještě jiné možnosti, jak dospěti od obecného tvaru formy k normálnímu). Tato konstantnost signatury jest důsledkem t. zv. *zákona setrvačnosti Hermiteových forem*, jehož přesné znění jest toto:

Počet positivních (a tedy ani negativních) součinitelů $\varkappa_\nu$ nezávisí na tom, jakou lineární regulární transformací byla daná forma (207) převedena na normální tvar (220).

Přejde-li totiž daná forma (207) o hodnosti r regulární lineární transformací $\mathbf{C}_1$ ve tvar

$$H_1 = \sum_{\nu=1}^{r} c_{1\nu} Y_\nu \overline{Y}_\nu,$$

při čemž jest mezi (vesměs reálnými) součiniteli $c_{1\nu}$, ($\nu = 1, 2, \ldots, r$) h_1 kladných a druhou transformací $\mathbf{C}_2$ na tvar

$$H_2 = \sum_{\nu=1}^{r} c_{2\nu} Z_\nu \overline{Z}_\nu$$

obsahující celkem h_2 kladných koeficientů $c_{2\nu}$, převádí regulární a lineární transformace

$$\mathbf{Z} = \mathbf{C}_2^{-1}\mathbf{C}_1\mathbf{Y} \tag{221}$$

formu H_2 přímo v H_1.

Předpokládejme nyní, že jest na př. $h_1 < h_2$ a volme hodnoty vesměs nulové pro oněch h_1 proměnných Y, jež mají ve formě H_1 kladné koeficienty $c_{1\nu}$. Hodnoty ostatních proměnných Y (v počtu $n - h_1$; my z nich ovšem upotřebíme jen $r - h_1$ hodnot ve formě H_1 vskutku figurujících) potom určeme tak, aby byla rovna nule všechna Z, opatřená ve formě H_2 zápornými součiniteli.

Příslušný systém $n - h_2$ lineárních homogenních rovnic o $n - h_1$ neznámých Y má v našem případě ($n - h_2 <$ $< n - h_1$) podle věty 6. (str. 21) nenulových řešení Y požadované vlastnosti dokonce nekonečně mnoho a každé z nich vede spolu ve spojení s prve zvolenými nulovými h_1 hodnotami Y k soustavě n čísel, která dosazena za proměnné Y do formy H_1, činí tuto očividně zápornou, kdežto Z, příslušná k této speciální soustavě hodnot Y transformací (221), vedou vzhledem k její regulárnosti ku kladné hodnotě formy H_2.

Tím však docházíme ke sporu — formy H_1, H_2 musí totiž dávati pro kterékoli dvě soustavy Y, Z, souvisící spolu transformací (221) tutéž hodnotu, ježto převádí zmíněná transformace druhou z oněch forem přímo v prvou. Není tedy předpoklad $h_1 < h_2$ správný a stejně nemožné jest $h_2 < h_1$; platí tedy nutně $h_1 = h_2$ a zákon setrvačnosti je tím pro Hermiteovy formy dokázán.

Také u forem Hermiteova typu zavádíme důležitý pojem *ekvivalence*. Dvě takové formy nazýváme ekvivalentními, existuje-li lineární a regulární transformace, která převádí jednu z nich ve druhou. Platí pak toto *kriterium*:

Nutná a postačující podmínka pro ekvivalenci dvou Hermiteových forem je ta, aby měly stejnou hodnost a stejnou signaturu.

Důkaz jest tak snadný, že jej můžeme přenechati čtenáři. S výhodou při něm použije ještě jednoduššího tvaru formy (207), než jest tvar normální (220); vznikne z něho transformací

$$Z_\nu = \frac{1}{\sqrt{\varkappa_\nu \,.\, \operatorname{sgn}\varkappa_\nu}}\,\zeta_\nu; \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{222}$$

Ježto jsou kvadratické formy pouze dosti jednoduchým zvláštním případem forem Hermiteových, lze právě provedené úvahy i výsledky přenésti též do oboru kvadratických forem; zde nabývají často přehlednějšího tvaru. Pokud jde o podrobnější rozvedení těchto úvah, odkazuji čtenáře na stať v Bydžovského knize o determinantech (viz citát v Závěru).