8. RESULTANT DVOU BINÁRNÍCH FOREM.

Funkce $f(x, y)$ vytvořená z komplexních konstant $a_0, a_1, \dots a_m$, jež nejsou vesměs rovny nule a z proměnných x, y podle předpisu

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{m-i} y^i \qquad (73)$$

se jmenuje *binární formou m-tého stupně* proměnných x, y.

Předpokládejme, že proměnné mohou nabývati všech komplexních (tedy speciálně i všech reálných) hodnot a dívejme se na $f(x, y)$ pro okamžik jako na polynom m-tého stupně v x. Můžeme si pro snazší pochopení mysliti, že jsme položili y rovno nějakému komplexnímu číslu — ponechme pro ně označení y. Pak existuje podle fundamentální věty algebry (podle té má každý polynom m-tého stupně s komplexními koeficienty právě m komplexních kořenů — také reálné číslo pokládáme za komplexní s nulovou imaginární částí) m komplexních čísel $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ tak, že jest

$$f(x, y) = a_0(x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_m). \qquad (a)$$

Čísla ξ_i $(i = 1, 2, \dots, m)$ závisí ovšem na okamžité svrchu uvedené volbě proměnné y. Je pak nutně každé ξ_i polynom nejvýše prvého stupně v y (dokážete snadno, když v (a) porovnáte koeficienty členů stejných stupňů v x). Lze tudíž binární formu (73) psáti jako součin m lineárních binárních forem

$$f(x, y) = (\gamma_1 x + \delta_1 y)(\gamma_2 x + \delta_2 y) \dots (\gamma_m x + \delta_m y) \qquad (74)$$

a tento rozklad je — pokládáme-li dvě binární formy za různé jen, když jsou nezávislé — možný pouze jedním způsobem.

Předpokládejme, že by platilo identicky (t. j. pro všechna x, y)

$$(\gamma_1 x + \delta_1 y)(\gamma_2 x + \delta_2 y) \dots (\gamma_m x + \delta_m y) =$$
$$= (\Gamma_1 x + \Delta_1 y)(\Gamma_2 x + \Delta_2 y) \dots (\Gamma_m x + \Delta_m y) \qquad (74')$$

a všimněme si chování funkce $f(x, y)$ v okolí jejího nulového bodu (x_0, y_0). Tento bod budiž ϱ-násobný ($1 \leqq \varrho \leqq m$) a seřaďme lineární faktory na levé straně rovnice (74') tak, aby právě

$$\gamma_1 x_0 + \delta_1 y_0 = \gamma_2 x_0 + \delta_2 y_0 = \dots = \gamma_\varrho x_0 + \delta_\varrho y_0 = 0.$$

Položíme-li nyní $x = x_0 + \varepsilon\xi$, $y = y_0 + \varepsilon\eta$, při čemž volíme ξ, η tak, aby platilo $\gamma_i\xi + \delta_i\eta \neq 0$ pro $i = 1, 2, \dots, \varrho$, můžeme rovnici (74') napsati ve tvaru

$$\varepsilon^\varrho(\gamma_1\xi + \delta_1\eta)(\gamma_2\xi + \delta_2\eta) \dots (\gamma_\varrho\xi + \delta_\varrho\eta) \, .$$
$$. \prod_{i=\varrho+1}^{m} \begin{vmatrix} \gamma_i, & -\delta_i \\ y_0 + \varepsilon\eta, & x_0 + \varepsilon\xi \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{m} \begin{vmatrix} \Gamma_k, & -\Delta_k \\ y_0 + \varepsilon\eta, & x_0 + \varepsilon\xi \end{vmatrix} . \qquad (\mathrm{b})$$

Dělíme-li tento vztah veličinou ε^ϱ a necháme pak ε konvergovati k nule, má levá strana konečnou limitu, takže to musí platit i o straně pravé. K tomu je ovšem nutno, aby se pravá strana rovnice (b) dala jakožto funkce ε psáti ve tvaru $\varepsilon^\varrho F(\varepsilon)$, kde jest $F(0) \neq 0$. Musí tedy na pravé straně vztahu (b) právě ϱ faktorů míti pro $\varepsilon \to 0$ hodnotu nulovou; očíslujme je tak, aby to bylo právě prvých ϱ faktorů. Tím dostáváme podmínky pro Γ, Δ úplně stejného tvaru, jaké platily pro γ, δ:

$$\Gamma_1 x_0 + \Delta_1 y_0 = \Gamma_2 x_0 + \Delta_2 y_0 = \dots = \Gamma_\varrho x_0 + \Delta_\varrho y_0 = 0.$$

Celkem tedy máme rovnice

předpokládané:

$$\gamma_r x_0 + \delta_r y_0 = 0, \; r = 1, 2, \dots, \varrho \qquad (\mathrm{c})$$

a z nich plynoucí:

$$\Gamma_r x_0 + \Delta_r y_0 = 0, \; r = 1, 2, \dots, \varrho. \qquad (\mathrm{d})$$

Uvážíme-li, že lze za nulový bod (x_0, y_0) voliti na př. $(\delta_1, -\gamma_1)$, tedy bod různý od $(0, 0)$, plynou ze vztahů (c), (d) další, které lze podle theorie systémů homogenních rovnic vyjádřiti takto:

$$\begin{vmatrix} \gamma_1, & \delta_1 \\ \gamma_r, & \delta_r \end{vmatrix} = 0, \text{ t. j. } \gamma_r = \lambda\gamma_1, \ \delta_r = \lambda\delta_1, \ r = 2, 3, \ldots, \varrho; \tag{e}$$

$$\begin{vmatrix} \gamma_r, & \delta_r \\ \Gamma_r, & \Delta_r \end{vmatrix} = 0, \text{ t. j. } \Gamma_r = \varkappa\gamma_r, \ \Delta_r = \varkappa\delta_r, \ r = 1, 2, \ldots, \varrho. \tag{f}$$

Každý faktor zastoupený na levé straně rovnice (74′) stojí tedy také na straně pravé a to ve stejné násobnosti. Je tudíž rozklad (74) opravdu jednoznačný.

Nyní si položíme otázku, kdy mají dvě binární formy stupňů m a n

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{m-i} y^i, \quad g(x, y) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^{n-k} y^k \tag{75}$$

alespoň jeden lineární faktor společný. Existuje-li takový společný faktor $\alpha x + \beta y$, platí rovnice

$$f(-\beta, \alpha) = 0, \quad g(-\beta, \alpha) = 0$$

a je ovšem $(-\beta, \alpha) \neq (0, 0)$. Platí-li naopak pro jistý bod $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ současně vztahy

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad g(x_0, y_0) = 0,$$

musí $f(x, y)$ obsahovati nutně alespoň jeden lineární faktor $\alpha x + \beta y$, $g(x, y)$ pak alespoň jeden faktor $\gamma x + \delta y$ tak, že platí

$$\begin{aligned} \alpha x_0 + \beta y_0 &= 0 \\ \gamma x_0 + \delta y_0 &= 0, \text{ t. j.} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{vmatrix} = 0, \ \alpha\delta = \beta\gamma; \ \gamma = \varrho\alpha, \ \delta = \varrho\beta;$$

lineární faktory $\alpha x + \beta y$, $\gamma x + \delta y$ jsou stejné. Je tedy nutná a postačující podmínka pro to, aby formy (75) měly alespoň jeden lineární faktor společný, ta, aby existoval bod $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ tak, že současně platí rovnice

$$f(x_0, y_0) = 0,\ g(x_0, y_0) = 0. \tag{76}$$

Vyjádříme si tuto podmínku ve tvaru jiném, nezávislém na x_0, y_0. Je-li splněna, platí současně s ní rovnice

$$\begin{aligned} x_0^{n-\nu} y_0^{\nu-1} f(x_0, y_0) &= 0,\ \nu = 1, 2, \ldots, n; \\ x_0^{m-\varrho} y_0^{\varrho-1} g(x_0, y_0) &= 0,\ \varrho = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned} \tag{77}$$

Těchto $m + n$ lineárních rovnic představuje homogenní systém pro veličiny $x_0^{m+n-1}, x_0^{m+n-2}y_0, \ldots, y_0^{m+n-1}$ v počtu $m + n$, které nejsou všechny rovny nule. Je tudíž roven nule determinant z koeficientů rovnic (77) t. j.

$$\begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & \ldots, a_m, & 0, & \ldots, 0, & 0 \\ 0, & a_0, & a_1, & \ldots, a_{m-1}, & a_m, & \ldots, 0, & 0 \\ 0, & 0, & a_0 & \ldots, a_{m-2}, & a_{m-1}, & \ldots, 0, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots & \ldots & a_{m-1}, & a_m \\ b_0, & b_1, & b_2, & \ldots & \ldots & 0, & 0 \\ 0, & b_0, & b_1, & \ldots & \ldots & 0, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, b_1, & b_2, & \ldots, b_{n-1}, & b_n \end{vmatrix} = 0. \tag{78}$$

Platí-li obráceně rovnice (78), pak zůstane v platnosti i když jednotlivé sloupce determinantu násobíme po řadě výrazy $x^{m+n-1}, x^{m+n-2}y, \ldots, y^{m+n-1}$. Proto existuje nenulová soustava čísel

$$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, -\alpha_0, -\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_{m-1} \tag{g}$$

tak, že součet β_0-násobného řádku prvého, plus β_1-násobný řádek druhý, plus ..., plus $(-\alpha_{m-1})$-násobný řádek poslední pozměněného determinantu má hodnotu nulovou. Docházíme tak k rovnosti

$$\begin{aligned} &(\beta_0 x^{n-1} + \beta_1 x^{n-2} y + \ldots + \beta_{n-1} y^{n-1})\, f(x, y) = \\ &= (\alpha_0 x^{m-1} + \alpha_1 x^{m-2} y + \ldots + \alpha_{m-1} y^{m-1})\, g(x, y), \end{aligned} \tag{h}$$

jež platí pro všechny hodnoty x, y. Není pak možno, aby byla všechna α rovna nule; potom by totiž bylo — vzhledem k tomu, že je soustava (g) nenulová — aspoň jedno β různé od nuly a na levé straně rovnice (h) by stál polynom, který má míti hodnotu nulovou pro všechna x, y, ačkoli nejsou rovny nule všechny jeho koeficienty. To ovšem není možno. Právě tak ukážeme, že existuje aspoň jedno $\beta \neq 0$.

Pravá strana rovnice (h) musí obsahovati zřejmě všech m lineárních faktorů formy $f(x, y)$. První činitel, jsa sám stupně nejvýše $(m - 1)$-ho, jich může obsahovati nejvýše $m - 1$, takže aspoň jeden musí býti zároveň činitelem formy $g(x, y)$. Lze tedy vysloviti větu:

Nutná a dostačující podmínka, aby měly dvě binární formy společný alespoň jeden lineární faktor, je platnost rovnice (78), t. j. anulování resultantu obou forem.

Dvě binární formy, které nemají žádný společný lineární činitel, se jmenují nesoudělnými. Lze tedy předchozí výsledky vysloviti také takto:

Nutná a postačující podmínka pro nesoudělnost dvou binárních forem je ta, aby jejich *resultant* by od nuly různý.

Resultantem obou forem zde nazýváme právě determinant z rovnice (78).

Formy

$$f = 2x^3 - 7x^2y + 8xy^2 - 3y^3, \quad g = -2x^2 + 7xy - 6y^2 \tag{79}$$

mají resultant

$$R_{fg} = \begin{vmatrix} 2, & -7, & 8, & -3, & 0 \\ 0, & 2, & -7, & 8, & -3 \\ -2, & 7, & -6, & 0, & 0 \\ 0, & -2, & 7, & -6, & 0 \\ 0, & 0, & -2, & 7, & -6 \end{vmatrix}. \tag{79'}$$

Přesvědčte se, že je roven nule a najděte společné lineární faktory obou forem.

Formy

$$f = 2x^3 - 7x^2y + 8xy^2 - 3y^3,$$
$$g = -2x^3 + 9x^2y - 13xy^2 + 6y^3 \tag{80}$$

mají také resultant

$$R_{fg} = \begin{vmatrix} 2, & -7, & 8, & -3, & 0, & 0 \\ 0, & 2, & -7, & 8, & -3, & 0 \\ 0, & 0, & 2, & -7, & 8, & -3 \\ -2, & 9, & -13, & 6, & 0, & 0 \\ 0, & -2, & 9, & -13, & 6, & 0 \\ 0, & 0, & -2, & 9, & -13, & 6 \end{vmatrix} = 0$$

a jsou tedy soudělné.

Nyní se seznámíme s některými jednoduchými vlastnostmi resultantu dvou binárních forem f, g. K tomu cíli si napřed vypočítáme resultant formy f ze vztahu (73) a lineární formy $l = \alpha x + \beta y$. Najdeme

$$R(f, l) = \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & \ldots, & a_m \\ \alpha, & \beta, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & \alpha, & \beta, & \ldots, & 0 \\ 0, & 0, & \alpha, & \ldots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & \beta \end{vmatrix} =$$

$$= a_0\beta^m - a_1\alpha\beta^{m-1} + a_2\alpha^2\beta^{m-2} - \ldots + (-1)^m a_m\alpha^m =$$
$$= f(\beta, -\alpha),$$

což píšeme vzorcem

$$R(a_0x^m + a_1x^{m-1}y + \ldots + a_my^m, \alpha x + \beta y) = R(f, l) =$$
$$= f(\beta, -\alpha). \tag{81}$$

Dále si spočteme resultant forem f a lg, tedy forem

$$f = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{m-i} y^i,$$

$$lg = (\alpha x + \beta y)\sum_{k=0}^{n} b_k x^{n-k} y^k = \sum_{\varrho=0}^{n+1} (\alpha b_\varrho + \beta b_{\varrho-1})\, x^{n-\varrho+1} y^\varrho,$$

$$b_{-1} = b_{n+1} = 0.$$

Napíšeme-li si příslušný determinant, poznáme ihned, že je resultant $R(f, lg)$ homogenní funkcí veličin α, β a to funkcí stupně m-tého (přesvědčte se o tom podrobně, nahradivše v něm veličiny α, β novými $t\alpha, t\beta$) — označme ji znakem $\varphi(\alpha, \beta)$.

Představíme-li si nyní formu psánu ve tvaru (74), nahlédneme snadno, že jest

$$\varphi(\gamma_1, \delta_1) = \varphi(\gamma_2, \delta_2) = \ldots = \varphi(\gamma_m, \delta_m) = 0. \qquad \text{(k)}$$

Tak značí ku příkladu $\varphi(\gamma_1, \delta_1)$ resultant forem $f(x, y)$ a $(\gamma_1 x + \delta_1 y)\, g(x, y)$; ty ovšem mají společný faktor $\gamma_1 x + \delta_1 y$, takže je vskutku $\varphi(\gamma_1, \delta_1) = 0$ a stejně platí i ostatní rovnice (k).

Vztahy (k) nám podávají všech m nulových bodů $(\gamma_\mu, \delta_\mu) \neq$ $\neq (0, 0)$ funkce $\varphi(\alpha, \beta)$ a ukazují, že je možno psáti

$$R(f, lg) = \varphi(\alpha, \beta) = C(-\delta_1\alpha + \gamma_1\beta)\,(-\delta_2\alpha + \gamma_2\beta) \ldots$$
$$\ldots (-\delta_m\alpha + \gamma_m\beta) = Cf(\beta, -\alpha) = CR(f, l).$$

Zvolíme-li si nyní na příklad $\alpha = 0$, dostaneme pro určení konstanty C (neobsahuje ani α ani β) rovnici

$$Cf(\beta, 0) = \varphi(0, \beta);$$

jest pak $f(\beta, 0) = a_0\beta^m$ a jednoduchým počtem zjistíme, že $\varphi(0, \beta) = a_0\beta^m R(f, g)$, takže dostáváme pro konstantu C hodnotu $C = R(f, g)$ a můžeme psáti vzorec

$$R(f, lg) = R(f, l) \,.\, R(f, g). \qquad (82)$$

Měníce v determinantu $R(f, g)$ vhodným způsobem sled řádků, dokážeme snadno, že platí

$$R(g, f) = (-1)^{mn} R(f, g). \qquad (83)$$

Zajímavé je také vyjádření resultantu $R(f, g)$ forem f, g pomocí koeficientů jejich lineárních faktorů. Budiž

$$f(x, y) = l_1 l_2 \ldots l_m,\; l_\mu = \gamma_\mu x + \delta_\mu y,\; \mu = 1, 2, \ldots, m$$
$$g(x, y) = L_1 L_2 \ldots L_n,\; L_\nu = \varkappa_\nu x + \lambda_\nu y,\; \nu = 1, 2, \ldots, n. \qquad (84)$$

Pak nacházíme podle vzorců (82) a (83) postupně

$$R(f, g) = R(f, L_1 L_2 \ldots L_n) = R(f, L_1)\, R(f, L_2) \ldots R(f, L_n),$$
$$R(f, L_\nu) = (-1)^m R(L_\nu, f) = (-1)^m R(L_\nu, l_1 l_2 \ldots l_m) =$$
$$= (-1)^m R(L_\nu, l_1)\, R(L_\nu, l_2) \ldots R(L_\nu, l_m) =$$
$$= R(l_1, L_\nu)\, R(l_2, L_\nu) \ldots R(l_m, L_\nu),$$

takže lze psáti

$$R(f, g) = \prod_{\mu, \nu} R(l_\mu, L_\nu), \; \mu = 1, 2, \ldots, m; \; \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Protože však jest

$$R(l_\mu, L_\nu) = \gamma_\mu \lambda_\nu - \delta_\mu \varkappa_\nu,$$

dostáváme svrchu zmíněné vyjádření

$$R(f, g) = \prod_{\mu, \nu} (\gamma_\mu \lambda_\nu - \delta_\mu \varkappa_\nu), \tag{85}$$
$$\mu = 1, 2, \ldots, m; \; \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Odtud pak snadno dospíváme k dalším zajímavým tvarům pro resultant dvou forem:

$$R(f, g) = \prod_{\nu=1}^{n} \left[\prod_{\mu=1}^{m} (\gamma_\mu \lambda_\nu - \delta_\mu \varkappa_\nu)\right] =$$
$$= \prod_{\nu=1}^{n} f(\lambda_\nu, -\varkappa_\nu) = f(\lambda_1, -\varkappa_1)\, f(\lambda_2, -\varkappa_2) \ldots f(\lambda_n, -\varkappa_n);$$
$$R(f, g) = (-1)^{mn} g(\delta_1, -\gamma_1)\, g(\delta_2, -\gamma_2) \ldots g(\delta_m, -\gamma_m). \tag{86}$$

Po těchto úvahách se obrátíme k otázce, kdy mají dvě binární formy $f(x, y)$, $g(x, y)$ obecně více než r společných lineárních činitelů. Stává-li tento případ, označme znakem $d(x, y)$ součin libovolných r z nich. Pak je resultant forem stupňů resp. $m - r$, $n - r$

$$\Phi(x, y) = \frac{f(x, y)}{d(x, y)}, \; \Gamma(x, y) = \frac{g(x, y)}{d(x, y)}$$

roven nule, protože mají ještě další lineární faktory společné. Tento resultant je však determinantem koeficientů soustavy $m + n - 2r$ forem

$$x^{n-r-\nu}y^{\nu-1}\Phi(x, y),\ \nu = 1, 2, \dots, n - r;$$
$$x^{m-r-\varrho}y^{\varrho-1}\Gamma(x, y),\ \varrho = 1, 2, \dots, m - r,$$

takže lze pro tyto formy zjistit podobnou závislost, jaká je vyjádřena rovnicí (h). Násobíme-li vztah tuto závislost vyjadřující výrazem $d(x, y)$, přejde v nový, z něhož plyne vzájemná závislost binárních forem

$$x^{n-r-\nu}y^{\nu-1}f(x, y),\ \nu = 1, 2, \dots, n - r;$$
$$x^{m-r-\varrho}y^{\varrho-1}g(x, y),\ \varrho = 1, 2, \dots, m - r. \qquad \text{(l)}$$

Tvoří tedy koeficienty těchto $m + n - 2r$ forem (l) $(m + n - 2r)$-řadovou matici s hodností h_r menší než $m + n - 2r$. Tato matice vzniká z matice resultantu $R(f, g)$ obou forem tím, že v ní vynecháme prvních r sloupců, prvních r řádků a pak dalších r řádků od $(n + 1)$-ho počínajíce. Označíme-li tuto matici znakem $\boldsymbol{M}_r$, máme výsledek: Mají-li dvě formy binární f, g více než r společných lineárních činitelů, má matice $\boldsymbol{M}_r$ hodnost $h_r < m + n - 2r$.

Je-li obráceně pro dvě formy f, g hodnost matice $\boldsymbol{M}_r$ menší než $m + n - 2r$, jsou její řádky — to jest koeficienty forem (l) — navzájem závislé a tedy platí totéž o soustavě forem samotných. Existuje tudíž mezi nimi relace

$$(\beta_0 x^{n-r-1} + \beta_1 x^{n-r-2}y + \dots + \beta_{n-r-1}y^{n-r-1})\, f =$$
$$= (\alpha_0 x^{m-r-1} + \alpha_1 x^{m-r-2}y + \dots + \alpha_{m-r-1}y^{m-r-1})\, g, \quad \text{(m)}$$

kde nejsou všechna β, ani všechna α rovna nule — to nahlédneme stejně jako jsme už výše učinili.

Pravá strana rovnice (m) musí obsahovati všech m lineárních faktorů formy f; první činitel pravé strany, jsa polynomem stupně nejvýše $(m - r - 1)$-ho, jichž může obsahovati nejvýše $m - r - 1$, takže všechny zbývající, jichž je aspoň $r + 1$, musí býti obsaženy v g. Mají tedy f a g aspoň $r + 1$ lineárních faktorů společných. Výsledek těchto úvah vyslovíme

větou 11. Nutná a postačující podmínka, aby dvě binární formy f, g stupňů m, n měly společných aspoň $r + 1$ lineárních faktorů, je tato: Hodnost matice M_r vzniklé z matice resultantu $R(f, g)$ tím, že vynecháme prvých r sloupců, prvých r řádků a ještě r řádků dalších, počínajíce $(n + 1)$-vým musí býti menší než $m + n - 2r$.

Příklady.

19. Vyšetřiti společné lineární činitele u binárních forem (79).

Matice M_0 je zde právě matice determinantu (79'). Tento determinant je roven, jak už jsme vypočítali, nule, takže je $h_0 < m + n - 2 . 0 = 3 + 2 - 2 . 0 = 5$ a formy mají podle věty 11. aspoň jeden společný lineární faktor; to jsme už zjistili dříve. Matice

$$M_1 = \left\| \begin{matrix} 2, & -7, & 8, & -3 \\ -2, & 7, & -6, & 0 \\ 0, & -2, & 7, & -6 \end{matrix} \right\|$$

má hodnost $h_1 = 3$, tedy nikoli menší než číslo $m + n - 2r = 3 + 2 - 2 . 1 = 3$. Proto mají formy (79) jediný společný lineární faktor; protože je $g(x, y) = (x - 2y) . (-2x + 3y)$, můžeme snadno zkusit, který z obou faktorů je obsažen také ve formě $f(x, y)$. Je to činitel $-2x + 3y$.

20. Vyšetřiti společné lineární činitele u forem (80).

Také zde má matice M_0 hodnost menší než $m + n - 2 . 0 = 6$, takže mají formy alespoň jeden společný lineární faktor. Sestrojíme nyní matici

$$M_1 = \left\| \begin{matrix} 2, & -7, & 8, & -3, & 0 \\ 0, & 2, & -7, & 8, & -3 \\ -2, & 9, & -13, & 6, & 0 \\ 0, & -2, & 9, & -13, & 6 \end{matrix} \right\| .$$

Podle věty 4. najdeme snadno $h_1 = 3 < m + n - 2r = 3 + 3 - 2 . 1 = 4$, takže mají formy (80) alespoň dva společné lineární faktory.

Sestrojíme ještě matici

$$\boldsymbol{M}_2 = \left\| \begin{matrix} 2, & -7, & 8, & -3 \\ -2, & 9, & -13, & 6 \end{matrix} \right\|,$$

jež má zřejmě hodnost $h_2 = 2$, tedy rovnou číslu $m + n - 2r = 2$ (t. j. stejnou se svým počtem řádků). Proto mají dané formy společné právě dva lineární činitele. Protože víme z předchozího příkladu, že má forma f lineárního činitele $-2x + 3y$, zkusíme, zda je tento výraz také faktorem formy g. Dělením zjistíme, že tomu tak jest a že platí

$$g(x, y) = (-2x + 3y)(x^2 - 3xy + 2y^2) = \\ = (-2x + 3y)(x - y)(x - 2y);$$

druhý společný faktor obou forem jest pak $x - y$.

21. Dokažte platnost vzorců

$$R(f, g) = R(f, f + g) = R(f + g, g) \qquad (87)$$

za předpokladu, že binární formy f a g jsou téhož stupně n.

Máme

$$R(f, f + g) = \left| \begin{matrix} a_0, & a_1, & \dots, a_{n-1}, \\ 0, & a_0, & \dots, a_{n-2}, \\ \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots, a_0, \\ a_0 + b_0, & a_1 + b_1, & \dots, a_{n-1} + b_{n-1}, \\ 0, & a_0 + b_0, & \dots, a_{n-2} + b_{n-2}, \\ \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots, a_0 + b_0, \end{matrix} \right.$$

pokračování

$$\left. \begin{matrix} a_n, & 0, & \dots, 0 \\ a_{n-1}, & a_n, & \dots, 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1, & a_2, & \dots, a_n \\ a_n + b_n, & 0, & \dots, 0 \\ a_{n-1} + b_{n-1}, & a_n + b_n, & \dots, 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1 + b_1, & a_2 + b_2, & \dots, a_n + b_n \end{matrix} \right| ;$$

odečteme-li v tomto determinantu každý z prvých n řádků vždy od řádku s ním stejnolehlého ve skupině posledních n řádků (tedy krátce řádek ν-tý od $(n + \nu)$-tého, $\nu = 1, 2, \ldots, n$), dostáváme právě resultant $R(f, g)$; je tedy opravdu $R(f, g) = R(f, f + g)$. Stejně dokážeme správnost druhé z rovnic (87).

22. Resultant dvou binárních forem f, g téhož stupně n je možno vyjádřiti pomocí dvouřadových determinantů matice

$$\begin{Vmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & \ldots, & a_n \\ b_0, & b_1, & b_2, & \ldots, & b_n \end{Vmatrix}. \tag{88}$$

Přemístíme-li totiž v $R(f, g)$ řádky tak, aby místo původního pořadí určeného čísly $1, 2, 3, 4, \ldots, 2n - 1, 2n$ zaujaly nové $1, n + 1, 2, n + 2, \ldots, n, 2n$, dostaneme determinant R_1, pro který zřejmě platí vztah

$$R_1 = (-1)^{\frac{1}{2}[n(n-1)]} R(f, g).$$

Rozvineme-li jej podle elementů prvých dvou řádků (věta Laplaceova), dostáváme ihned

$$R_1 = -\sum_{r=1}^{n} (-1)^r \begin{vmatrix} a_0, & a_r \\ b_0, & b_r \end{vmatrix} M_r,$$

při čemž značí M_r subdeterminant vzniklý z R_1 vynecháním prvých dvou řádků, prvého a $(r + 1)$-ho sloupce. Také tento minor M_r rozvineme podle prvých dvou řádků, čímž se nám objeví jako součet součinů po dvou faktorech, z nichž jeden je vždy dvouřadový determinant matice (88), druhý pak $(2n - 4)$-řadový minor matice posledních $2n - 4$ řádků determinantu R_1. S těmito druhými faktory naložíme stejně, jak bylo vylíčeno již dvakrát a takto pokračujeme, až dospějeme k vyjádření R_1 a tedy také $R(f, g)$ pomocí samých dvouřadových determinantů matice (88).

23. Buďte $f(x, y)$, $g(x, y)$ dvě binární formy téhož stupně n, tedy

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} y^i, \quad g = \sum_{i=0}^{n} b_i x^{n-i} y^i. \tag{α}$$

Vyjádřit matematicky důsledek, k němuž vede požadavek, aby platilo identicky (t. j. pro všechna x, y) těchto n rovnic:

$$f(x, y) \,.\, \sum_{\varrho=0}^{\nu} b_\varrho x^{\nu-\varrho} y^\varrho - g(x, y) \,.\, \sum_{\varrho=0}^{\nu} a_\varrho x^{\nu-\varrho} y^\varrho = 0,$$
$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, n - 1. \tag{β}$$

Těmito rovnicemi (jsou to známé vztahy tvořící východisko pro Bézoutovu úpravu resultantu dvou binárních forem téhož stupně na tvar souměrného determinantu) jsou zřejmě stanoveny velmi těsné vztahy mezi koeficienty a_i, b_i ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$) obou daných forem.

Upravme postupně vztahy (β):

$$0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} y^i \sum_{\varrho=0}^{\nu} b_\varrho x^{\nu-\varrho} y^\varrho - \sum_{i=0}^{n} b_i x^{n-i} y^i \sum_{\varrho=0}^{\nu} a_\varrho x^{\nu-\varrho} y^\varrho =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{\varrho=0}^{\nu} (a_i b_\varrho - a_\varrho b_i)\, x^{n+\nu-i-\varrho} y^{i+\varrho} =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{\varrho=0}^{\nu} M_{i\varrho} x^{n+\nu-i-\varrho} y^{i+\varrho} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{\varkappa=i}^{i+\nu} M_{i,\varkappa-i} x^{n+\nu-\varkappa} y^\varkappa =$$
$$= \sum_{\varkappa=i}^{i+\nu} x^{n+\nu-\varkappa} y^\varkappa \sum_{i=0}^{\varkappa} M_{i,\varkappa-i} = \sum_{\varkappa=i}^{i+\nu} \Gamma_\varkappa x^{n+\nu-\varkappa} y^\varkappa =$$
$$= \sum_{\varkappa=0}^{n+\nu} \Gamma_\varkappa x^{n+\nu-\varkappa} y^\varkappa.$$

Rovnice (β) lze tedy psáti také ve tvaru

$$\sum_{\varkappa=0}^{n+\nu} \Gamma_\varkappa x^{n+\nu-\varkappa} y^\varkappa = 0, \ \nu = 0, 1, 2, \ldots, n - 1; \tag{γ}$$

$$\Gamma_\varkappa = \sum_{i=0}^{\varkappa} M_{i,\varkappa-i}, \ M_{i\varrho} = a_i b_\varrho - a_\varrho b_i.$$

Podle původních rovnic (β) jsou ovšem $M_{i\varrho}$ obecně nenulová jen pro $0 \leqq \varrho \leqq \nu$, tedy $M_{i,\varkappa-i}$ pro $i \geqq \varkappa - \nu$; pro $i \leq \varkappa - \nu - 1$ je nutno klásti $M_{i,\varkappa-i} = 0$, takže máme dále

$$\Gamma_\varkappa = \sum_{i=\varkappa-\nu}^{\varkappa} M_{i,\varkappa-i}. \tag{δ}$$

Je tedy $\Gamma_0 = \Gamma_1 = \ldots = \Gamma_\nu = 0$ a v rovnicích (γ) vystoupí až teprve členy s koeficienty $\Gamma_\varkappa$, jichž index $\varkappa \geqq \nu + 1$, t. j. členy s koeficienty $\Gamma_{\nu+\lambda}$ ($\lambda = 1, 2, \ldots, n$). Je pak podle vzorce ($\delta$)

$$\Gamma_{\nu+\lambda} = \sum_{i=\lambda}^{\nu+\lambda} M_{i,\nu+\lambda-i}, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1, \ \lambda = 1, 2, \ldots, n. \tag{ε}$$

Nyní se jeví nejvýše záhodným označiti konstantu $\Gamma_{\nu+\lambda}$ novým symbolem, který by lépe vyznačoval, že tento koeficient patří právě do ($\nu + 1$)-ní z Bézoutových rovnic (β), tedy do rovnice s pořadovým číslem ν. Došli bychom k závěrům zcela chybným, kdybychom ponechali znak $\Gamma_{\nu+\lambda}$ a jeho indexy prostě sčítali (rozvažte si to podrobně; ztratili bychom ku příkladu možnost rozhodnouti, zda součinitel $\Gamma_3 = \Gamma_{0+3} = \Gamma_{1+2} = \Gamma_{2+1}$ patří do rovnice s pořadovým číslem 0, 1 nebo 2). Těmto nesnázím se vyhneme tím jednoduchým způsobem, že klademe $\Gamma_{\nu+\lambda} = c_{\nu,\lambda}$; je tedy $c_{\nu,\lambda}$ koeficient stojící v rovnici s pořadovým číslem ν u členu, jenž obsahuje $x^{n-\lambda}y^{\nu+\lambda}$. Vypočítá se pak $c_{\nu,\lambda}$ obecně podle vzorce (ε), při čemž mohou podle poměru vzájemné velikosti indexů ν, λ nastati určitá zjednodušení.

Zvláště pozoruhodné je zjednodušení pro $\lambda \leqq \nu$; v tom případě můžeme psáti vzhledem k $M_{i\varrho} = - M_{\varrho i}$:

$$c_{\nu,\lambda} = \sum_{i=\lambda}^{\nu+\lambda} M_{i,\nu+\lambda-i} = \sum_{i=\lambda}^{\nu} M_{i,\nu+\lambda-i} + \sum_{i=\nu+1}^{\nu+\lambda} M_{i,\nu+\lambda-i} =$$
$$= \sum_{i=\nu+1}^{\nu+\lambda} M_{i,\nu+\lambda-i}. \tag{ε'}$$

Po těchto úpravách dostáváme Bézoutovy rovnice (β) v konečném tvaru

$$\sum_{\lambda=1}^{n} c_{\nu,\lambda} x^{n-\lambda} y^{\nu+\lambda} = 0; \; \nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \tag{ζ}$$

kde jest podle vzorců (ε), (ε'):

$$c_{0,\lambda} = M_{\lambda,0}; \; c_{\nu,\lambda} = \sum_{i=\nu+1}^{\nu+\lambda} M_{i,\nu+\lambda-i}, \; \lambda \leqq \nu;$$

$$c_{\nu,\lambda} = \sum_{i=\lambda}^{\nu+\lambda} M_{i,\nu+\lambda-i}, \; \lambda \geqq \nu + 1. \tag{η}$$

Jakmile ovšem v těchto vzorcích překročí jeden z indexů minoru M hodnotu n, položíme tento minor rovný nule.

Položme nyní v rovnicích (ζ) (které mají platiti identicky pro všechna x, y) $y = 1$, $x \neq 0$ libovolné. Vzniklé vztahy nám představují systém n lineárních homogenních rovnic s nenulovým řešením $x^{n-1}, x^{n-2}, \ldots, x, 1$, takže je nutně roven nule jeho determinant. Lze tedy matematický důsledek Bézoutových podmínek (β) napsati ve tvaru (čárky mezi indexy vynecháváme)

$$\begin{vmatrix} c_{01}, & c_{02}, & \ldots, c_{0n} \\ c_{11}, & c_{12}, & \ldots, c_{1n} \\ c_{21}, & c_{22}, & \ldots, c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n-1,1}, & c_{n-1,2}, & \ldots, c_{n-1,n} \end{vmatrix} = 0. \tag{ϑ}$$

Přesvědčte se, že je právě napsaný determinant symetrický.

Také jinak lze vyjádřiti důsledek identické platnosti rovnic (β). Snadno si ověříte, že tyto žádají, aby všechny dvouřadové determinanty matice

$$\left\| \begin{matrix} a_0, & a_1, & a_2, & \ldots, a_n \\ b_0, & b_1, & b_2 & \ldots, b_n \end{matrix} \right\| \tag{ι}$$

byly rovny nule. Že má tento nový důsledek v zápětí automaticky platnost vztahu (ϑ), je samozřejmé. Otázkou, který z obou důsledků vyjadřuje více, event. zda jsou oba ekvivalentní, se zde nebudeme zabývati. S úvahami tohoto příkladu úzce souvisí vyjádření resultantu dvou binárních forem téhož stupně n souměrným n-řadovým determinantem.