Determinanty a matice v theorii a praxi

6. Formy bilineární

In: Václav Vodička (author): Determinanty a matice v theorii a praxi. Část druhá. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1950. pp. 34–43.

6. FORMY BILINEÁRNÍ.

Bilineární forma dvou řad proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ je součtem n^2 sčítanců tvaru $a_{ik}x_iy_k$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n$, a_{ik} reálná), tedy

$$f = \sum_{i,k} a_{ik}x_iy_k, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{42}$$

Na označení proměnných ovšem nezáleží, všechny vlastnosti bilineární formy f jsou dány jedině maticí $\boldsymbol{A}$ jejich koeficientů. Proto také mluvíme někdy o bilineární formě $\boldsymbol{A}$. Hodnost h matice $\boldsymbol{A}$ je hodností formy, rozeznáváme formy regulární a singulární a vůbec přenášíme na formy bilineární (a také na kvadratické, viz odst. 7.) vyjadřování obvyklé v theorii matic. V tomto smyslu pak můžeme k formě (42) konstruovati reciprokou, transponovanou a kontragredientní.

Protože je f homogenní funkcí 1. stupně proměnných x_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, lze na ni aplikovati známou *identitu Eulerovu* a psáti

$$f = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \sum_{k=1}^{n} a_{\nu k}y_k.$$

Nyní však víme, že výraz $\sum_{k=1}^{n} a_{\nu k}y_k$ stojí na prvém místě ν-tého řádku matice $\boldsymbol{Ay}$ a že všechny ostatní elementy tohoto řádku jsou nuly. Utvoříme-li tudíž součin matice $\bar{\boldsymbol{x}}$ (tedy transponované k $\boldsymbol{x}$) a matice prve zmíněné, dostaneme matici, jež má první hlavní element rovný právě f, všechny ostatní pak nulové. Tuto matici

$$\bar{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{Ay} \tag{43}$$

budeme pokládati za maticový tvar formy (42).

Tak na př. určuje matice prvních tří sloupců soustav (3) bilineární formu

$$f = 5x_1y_1 - 2x_1y_2 + 7x_2y_1 + 6x_2y_2 - 4x_2y_3 - x_3y_1 - \\ - 4x_3y_2 + 2x_3y_3 \tag{44}$$

o hodnosti $h = 2$, tedy formu singulární. Čtenář nechť si vypočítá pro tento případ součin (43).

Doporučuji čtenáři dobře si rozvážiti fakt, že výraz (43) se nesmí žádným způsobem ztotožňovati s formou (42) — to plyne už z té okolnosti, že forma f je polynom, kdežto výraz (43) matice, tedy matematický útvar docela jiné povahy (matice nejsou veličiny, nýbrž pouhá schemata, systémy čísel). Součin (43) je spíše jakýmsi „maticovým obrazem" bilineární formy f. Pro uvedené „maticové obrazy" forem bilineárních (a také jiných; tento pojem je zřejmě schopen rozšíření a zobecnění) platí ovšem obvyklá aritmerika a algebra matic (jak jsme podali její počátky v odst. 9. prvého dílu). Zajímavá je otázka, co se děje s „maticovými obrazy" forem, transformací a pod., když s jejich „originály" $f_1, f_2, \ldots$ (a to jsou v případech, které zde máme na mysli, pouhé polynomy) provádíme různé operace matematické. Není bohužel možno zabývati se zde blíže těmito věcmi, protože by tím jednak rozsah spisku neúměrně vzrostl a za druhé nejsou zatím příslušné úvahy technicky důležité.

V každém případě je však nutno si uvědomiti, že už v celém odst. 5. vlastně pracujeme s „maticovými obrazy". Čtenář, který chce výklad dokonale pochopit, učiní dobře, když si ověří jednotlivé jeho fáze na konkretních numerických příkladech a pod.

V další úvaze se ovšem přidržíme obvyklého postupu a budeme se symbolem (43) a s příslušnou formou f (jejich vzájemné přiřadění je, theoreticky vzato, jednojednoznačné) pracovati podle pravidel již dříve odvozených (pouze pojmenování „maticový obraz", nebo „obraz" budeme občas používati).

Transformujme formu (42) transformací

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{X}, \ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{Y}; \tag{45}$$

dostáváme její obraz ve tvaru (dokažte si napřed formuli $\overline{\boldsymbol{AB}} = \overline{\boldsymbol{B}}\overline{\boldsymbol{A}}$)

$$\overline{\boldsymbol{X}}\overline{\boldsymbol{C}}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{Y}, \tag{46}$$

z něhož je patrno, že transformovaná forma je opět bilineární v nových proměnných X_ν, Y_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), avšak s maticí $\overline{\boldsymbol{C}}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_2$. Odtud a z př. 1, str. 86 části plyne jednoduchý (avšak důležitý) důsledek, že se hodnost formy (42) nemění regulárními transformacemi proměnných.

Budiž na př. předložena úloha transformovati formu (44) do nových proměnných X_ν, Y_ν, ($\nu = 1, 2, 3$) substitucemi (obě jsou regulární)

$$\boldsymbol{C}_1 = \left\Vert \begin{matrix} 1, & 0, & -1 \\ 1, & 0, & 2 \\ -1, & 1, & 0 \end{matrix} \right\Vert, \quad \boldsymbol{C}_2 = \left\Vert \begin{matrix} -2, & 4, & 3 \\ 5, & 1, & -1 \\ -3, & 0, & 2 \end{matrix} \right\Vert.$$

Podle vzorce (46) dostaneme novou bilineární formu s maticí

$$\overline{\boldsymbol{C}}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_2 = \left\Vert \begin{matrix} 1, & 1, & -1 \\ 0, & 0, & 1 \\ -1, & 2, & 0 \end{matrix} \right\Vert . \left\Vert \begin{matrix} 5, & -2, & 0 \\ 7, & 6, & -4 \\ -1, & -4, & 2 \end{matrix} \right\Vert .$$

$$. \left\Vert \begin{matrix} -2, & 4, & 3 \\ 5, & 1, & -1 \\ -3, & 0, & 2 \end{matrix} \right\Vert = \left\Vert \begin{matrix} 32, & 60, & 19 \\ -24, & -8, & 5 \\ 76, & 50, & -3 \end{matrix} \right\Vert,$$

tedy formu

$$F = 32X_1Y_1 + 60X_1Y_2 + 19X_1Y_3 - 24X_2Y_1 - 8X_2Y_2 + \\ + 5X_2Y_3 + 76X_3Y_1 + 50X_3Y_2 - 3X_3Y_3. \tag{47}$$

Potvrďte si tento výsledek přímým dosazením nových proměnných do výrazu (44) a také to, že forma (47) má zase hodnost $h = 2$.

Nyní si dokážeme tuto **základní větu** o bilineárních formách:

Věta 9. Bilineární formu (42) o hodnosti $h < n$ je možno regulárními lineárními transformacemi uvésti na bilineární formu dvou řad po h proměnných.

Důkaz. Za daného předpokladu má soustava

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{a}$$

$n - h$ nezávislých řešení. Najdeme je a označíme

$$\xi_{1\varrho}, \xi_{2\varrho}, \ldots, \xi_{n\varrho}, \quad \varrho = h + 1, \ldots, n; \tag{b}$$

za dovoleného předpokladu, že $(n - h)$-řadový nenulový determinant se dá sestaviti z posledních $n - h$ sloupců soustav (b) (to znamená eventuelně jen přečíslování druhé řady proměnných v dané bilineární formě), konstruujme n-řadovou matici (dokažte, že je regulární)

$$\mathbf{B}_1 = \begin{Vmatrix} 1, & 0, & \ldots, & 0, & \xi_{1,h+1}, & \ldots, & \xi_{1n} \\ 0, & 1, & \ldots, & 0, & \xi_{2,h+1}, & \ldots, & \xi_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & 1, & \xi_{h,h+1}, & \ldots, & \xi_{hn} \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & \xi_{h+1,h+1} & \ldots, & \xi_{h+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & \xi_{n,h+1}, & \ldots, & \xi_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{48}$$

Transformujeme-li pak proměnné y v dané bilineární formě lineární substitucí

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}_1 \mathbf{Y} \tag{49}$$

dostaneme novou v proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ a s maticí $\mathbf{AB}_1$, která má obecný prvek (b_{ik}, i, $k = 1, 2, \ldots, n$ jsou prvky matice $\mathbf{B}_1$)

$$p_{ik} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu k} = a_{ik} \text{ pro } k \leqq h,$$

$$p_{ik} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu k} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} \xi_{\nu k} = 0 \text{ pro } k \geqq h + 1. \tag{c}$$

Má tudíž nová bilineární forma matici, jejichž prvních h sloupců je stejných, jako u matice původní, posledních pak $n - h$ sloupců je tvořeno samými nulami. Tato nová matice má ovšem stejnou hodnost h jakou měla původní.

Rovnice

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu\varkappa} x_\nu = 0, \ \varkappa = 1, 2, \ldots, h \tag{d}$$

mají fundamentální systém řešení

$$\eta_{\varrho 1}, \eta_{\varrho 2}, \ldots, \eta_{\varrho n}, \ \varrho = h + 1, \ldots, n. \tag{e}$$

Za předpokladu, že opět lze nenulový determinant sestaviti z $n - h$ posledních sloupců soustav (e) (to znamená v případě nutnosti jenom přečíslování prvé řady proměnných v původní bilineární formě), sestrojíme regulární matici

$$\boldsymbol{B}_2 = \left\| \begin{matrix} 1, & 0, & \ldots, & 0, & \eta_{h+1,1}, & \ldots, & \eta_{n1} \\ 0, & 1, & \ldots, & 0, & \eta_{h+1,2}, & \ldots, & \eta_{n2} \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0, & 0, & \ldots, & 1, & \eta_{h+1,h}, & \ldots, & \eta_{nh} \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & \eta_{h+1,h+1}, & \ldots, & \eta_{n,h+1} \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & \eta_{h+1,n}, & \ldots, & \eta_{nn} \end{matrix} \right\| \tag{50}$$

a podrobíme také ještě proměnné x lineární transformaci

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}_2 \boldsymbol{X}. \tag{51}$$

Tím přechází částečně již transformovaná bilineární forma v konečný tvar — bilineární formu s maticí $\overline{\boldsymbol{B}}_2 \boldsymbol{A} \boldsymbol{B}_1$ a s obecným prvkem (β_{ik}, $i, k = 1, 2, \ldots, n$ je obecný element matice $\boldsymbol{B}_2$)

$$q_{ik} = \sum_{\nu=1}^{n} \beta_{\nu i} p_{\nu k} = \sum_{\nu=1}^{n} \beta_{\nu i} a_{\nu k} = a_{ik} \text{ pro } i, k \leqq h, \ q_{ik} = 0$$
$$\text{pro } k \geqq h + 1, \ q_{ik} = 0 \text{ pro } i \geqq h + 1, \ k \leqq h. \tag{f}$$

Úhrnem tedy můžeme říci: Dvěma regulárními lineárními transformacemi (49), (51) se nám podařilo transformovati původní bilineární formu (42) na tvar

$$\sum_{i,k} a_{ik} X_i Y_k, \quad i, k = 1, 2, \ldots, h, \tag{52}$$

o němž mluví věta 9.

Proveďme tento postup numericky pro formu (44) o hodnosti $h = 2$. Systém (a) jest zde

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 \phantom{{}- 4x_3} &= 0 \\ 7x_1 + 6x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

a řešení (b) — zde jediné — je podle vzorce (22) dáno úměrou

$$\xi_{13} : \xi_{23} : \xi_{33} = 8 : 20 : 44 = 2 : 5 : 11;$$

volíme

$$\xi_{13} = 2, \ \xi_{23} = 5, \ \xi_{33} = 11.$$

Matice (48) má pak tvar

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{Vmatrix} 1, & 0, & 2 \\ 0, & 1, & 5 \\ 0, & 0, & 11 \end{Vmatrix}.$$

Systém (d) bude:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 7x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 6x_2 - 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

a jeho řešení (e)

$$\eta_{31} : \eta_{32} : \eta_{33} = -22 : 22 : 44 = -1 : 1 : 2;$$

položíme ovšem

$$\eta_{31} = -1, \ \eta_{32} = 1, \ \eta_{33} = 2.$$

Matice (50) pak jest

$$\boldsymbol{B}_2 = \begin{Vmatrix} 1, & 0, & -1 \\ 0, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & 2 \end{Vmatrix}.$$

Transformacemi

$$\begin{aligned} x_1 &= X_1 - X_3, & y_1 &= Y_1 + 2Y_3 \\ x_2 &= X_2 + X_3, & y_2 &= Y_2 + 5Y_3 \\ x_3 &= 2X_3, & y_3 &= 11Y_3 \end{aligned}$$

musí tedy forma (44) přejíti ve tvar

$$5X_1Y_1 - 2X_1Y_2 + 7X_2Y_1 + 6X_2Y_2. \tag{53}$$

Přesvědčte se, že tomu tak skutečně jest a vypočítejte také matici $\overline{\boldsymbol{B}}_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_1$.

Jest zřejmé, že při formě o hodnosti h je počet proměnných h (pro x i pro y) nejmenší počet, na který lze formu redukovat. Kdyby existoval počet nižší než h, musila by příslušná transformovaná forma, ježto povstala z dané regulárními transformacemi, míti hodnost opět h — to ovšem není při počtu proměnných menším než h možno.

Dále jsme získali prostředek, jak libovolnou matici $\boldsymbol{A}$ o hodnosti h převésti násobením regulárními maticemi $\boldsymbol{B}_1$ zprava a $\overline{\boldsymbol{B}}_2$ zleva na tvar, který z ní dostaneme prostě tím, že ty prvky a_{ik}, jichž aspoň jeden index je větší než h, nahradíme nulami, ostatní pak ponecháme. Nahlédneme opět snadno, že tato redukce je nejvyšší možná.

Bilineární forma (52) je už regulární s maticí $\boldsymbol{A}_1 = \|a_{ik}\|$, $i, k = 1, 2, \ldots, h$. Lineární regulární transformací (všechny matice jsou zde h-řadové, což je odchylkou od úmluvy v odst. 9. první části)

$$\boldsymbol{X} = (\overline{\boldsymbol{A}}_1)^{-1}\boldsymbol{x}', \ \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}' \tag{54}$$

přechází v bilineární formu s obrazem

$$\overline{\boldsymbol{x}}'\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{y}' = \overline{\boldsymbol{x}}'\boldsymbol{y}', \tag{55}$$

t. j. ve formu

$$x_1'y_1' + x_2'y_2' + \ldots + x_h'y_h'. \tag{56}$$

Toto jest t. zv. *normální tvar*, na který tedy lze každou bilineární formu o hodnosti h uvésti. Tak máme v případě formy (53):

$$\mathbf{A}_1 = \left\|\begin{matrix} 5, & -2 \\ 7, & 6 \end{matrix}\right\|, \quad \bar{\mathbf{A}}_1 = \left\|\begin{matrix} 5, & 7 \\ -2, & 6 \end{matrix}\right\|, \quad (\mathbf{A}_1)^{-1} = \left\|\begin{matrix} \frac{6}{44}, & -\frac{7}{44} \\ \frac{2}{44}, & \frac{5}{44} \end{matrix}\right\|,$$

takže zde vede k cíli substituce

$$X_1 = \tfrac{6}{44}x_1' - \tfrac{7}{44}x_2', \quad Y_1 = y_1'$$
$$X_2 = \tfrac{2}{44}x_1' + \tfrac{5}{44}x_2', \quad Y_2 = y_2'.$$

Potvrďte skutečným výpočtem, že převádí formu (53) na normální tvar

$$x_1'y_1' + x_2'y_2'.$$

Na konec se ještě zmíníme o jistém druhu vyjádření bilineárních forem, kteréžto je východiskem při studiu jejich souvislosti s vyššími komplexními (hyperkomplexními) čísly.

Budiž $\mathbf{F}_{ik}$ n-řadová matice s jediným nenulovým prvkem, který stojí v i-tém řádku na jeho k-tém místě a má hodnotu 1; ostatní elementy této matice buďtež nulové. Pro násobení takových speciálních matic platí vzorec

$$\mathbf{F}_{ik}\mathbf{F}_{lm} = \delta_{kl}\mathbf{F}_{im}, \quad i, k, l, m = 1, 2, \ldots, n. \tag{57}$$

Označíme-li totiž obecný element prvého faktoru na levé straně této rovnice znakem $f_{r\varrho}$, obecný element druhého faktoru pak symbolem $\varphi_{r\varrho}$ (r, $\varrho = 1, 2, \ldots, n$), má součin na levé straně obecný prvek

$$p_{rs} = \sum_{\varrho=1}^{n} f_{r\varrho}\varphi_{\varrho s},$$

takže je zřejmě $p_{rs} = 0$ pro $r \neq i$, $s \neq m$. Jediný úvahyhodný prvek tedy je

$$p_{im} = \sum_{\varrho=1}^{n} f_{i\varrho}\varphi_{\varrho m};$$

protože však jest $f_{i\varrho} = \delta_{k\varrho}$, $\varphi_{\varrho m} = \delta_{\varrho l}$, máme dále

$$p_{im} = \sum_{\varrho=1}^{n} \delta_{k\varrho}\delta_{\varrho l} = \delta_{kl}.$$

Je tudíž součin na levé straně rovnice (57) roven n-řadové matici s elementy p_{rs} vesměs nulovými až na prvek p_{im}, který má hodnotu δ_{kl} (δ_{kl} je stále Kroneckerův symbol). To však je právě matice stojící na pravé straně vzorce (57).

Bilineární forma s maticovým obrazem $\bar{\mathbf{x}}\mathbf{F}_{ik}\mathbf{y}$ je velmi jednoduchá, totiž $x_i y_k$, takže lze každou bilineární formu

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i y_k, \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

zobraziti také ve tvaru

$$\sum_{i,k} a_{ik} \mathbf{x} \mathbf{F}_{ik} \mathbf{y} \tag{58}$$

a nezáleží-li nám právě na tom, jaké má forma proměnné, lze ji zobraziti i ve tvaru

$$\sum_{i,k} a_{ik} \mathbf{F}_{ik}. \tag{58'}$$

Tento druhý způsob psaní už přímo vede k souvislosti bilineárních forem s vyššími čísly komplexními. Stačí, abychom výrazy $\mathbf{F}_{ik}$ interpretovali jako n^2 nezávislých jednotek komplexního čísla.

Funkce (85) resp. (87) prvé části se jmenuje *charakteristickou funkcí dané formy bilineární*, rovnice vzniklá tím, že tuto charakteristickou funkci položíme rovnu nule, jest pak charakteristickou rovnicí dané formy. Seznámíme se s ní blíže v pojednání o formách Hermiteových (v odst. 12.).

Poznámka. Je-li matice bilineární formy (42) *souměrná* (t. j. platí-li $a_{ik} = a_{ki}$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$), nazýváme *formu souměrnou*. Transformujeme-li v ní obě řady proměnných toutéž lineární substitucí $\mathbf{C}$, dostaneme opět formu bilineární souměrnou. Výsledná forma bude totiž míti podle vzorce (46) matici $\bar{C}AC$, jejíž obecný prvek γ_{ik} má tvar

$$\gamma_{ik} = \sum_{\varrho=1}^{n} c_{\varrho i} \sum_{\nu=1}^{n} a_{\varrho\nu} c_{\nu k} = \sum_{\varrho, \nu} c_{\varrho i} a_{\varrho\nu} c_{\nu k} = \sum_{\nu, \varrho} c_{\nu k} a_{\nu\varrho} c_{\varrho i} = \gamma_{ki},$$

$$i, k = 1, 2, \ldots, n;$$

transformovaná forma je tedy vskutku souměrná.

Jde-li na př. o formu s maticí

$$A = \begin{Vmatrix} 0, & 3, & -1 \\ 3, & 2, & 1 \\ -1, & 1, & 0 \end{Vmatrix}$$

a je-li dále

$$C = \begin{Vmatrix} 1, & 0, & -1 \\ 1, & 0, & 2 \\ -1, & 1, & 0 \end{Vmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{Vmatrix} 1, & 1, & -1 \\ 0, & 0, & 1 \\ -1, & 2, & 0 \end{Vmatrix},$$

dostáváme po krátkém počítání matici transformované formy

$$\bar{C}AC = \begin{Vmatrix} 8, & 0, & 4 \\ 0, & 0, & 3 \\ 4, & 3, & -4 \end{Vmatrix};$$

ta pak je vskutku souměrná.