Determinanty a matice v theorii a praxi

5. Lineární transformace a lineární formy

In: Václav Vodička (author): Determinanty a matice v theorii a praxi. Část druhá. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1950. pp. 28–33.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403290

5. LINEÁRNÍ TRANSFORMACE A LINEÁRNÍ FORMY.

V tomto a v několika následujících paragrafech budeme často používati poznatků o počítání maticemi, z nichž nejdůležitější byly uvedeny v prvém dílu na str. 78—89.

Budiž dán určitý výraz $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a zaveďme do něho místo proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nové $X_1, X_2, \ldots, X_n$ lineárními rovnicemi

$$x_i = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} X_\nu, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{27}$$

Říkáme pak, že jsme výraz $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ transformovali do nových proměnných lineární transformací (27). Matici $\boldsymbol{A}$ nazýváme maticí (determinant A pak modulem) dané transformace a mluvíme prostě o transformaci $\boldsymbol{A}$. Hodností transformace rozumíme hodnost její matice — v tomto smyslu také mluvíme o transformacích regulárních a singulárních.

Transformaci (27) můžeme psáti vzhledem k příkladu na str. 81 prvé části také ve tvaru maticové rovnice

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}, \tag{27'}$$

z něhož můžeme činiti pohodlně různé důsledky. Je-li na příklad daná transformace regulární, existuje k ní inversní, která vyjadřuje nové proměnné původními. Násobíme-li vztah (27′) zleva maticí $\boldsymbol{A}^{-1}$, dostáváme tuto inversní transformaci ve tvaru

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} \tag{28}$$

takže její modul je (viz pojednání o reciprokých determinantech) roven výrazu A^{-1}.

Jsou-li proměnné nové $X_1, X_2, \ldots, X_n$ samy opět spjaty s jinými $y_1, y_2, \ldots, y_n$ lineární transformací

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{y}, \tag{29}$$

dostáváme složením obou po sobě jdoucích transformací (27′), (29) původní proměnné $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vyjádřeny novými $y_1, y_2, \ldots, y_n$ v maticové rovnici

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{y}. \tag{30}$$

Je odtud patrno, že složení dvou lineárních transformací vede k transformaci opět lineární, která obecně závisí na pořadí, v němž byly dané transformace skládány.

Příklady.

14. Jak nutno volit substituci (29), aby byla transformace (30) unimodulární, t. j., aby byl její determinant roven 1?

Za předpokladu $A \neq 0$ má tedy býti $A \,.\, B = 1$; jsou-li c_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ prvky libovolného determinantu o hodnotě 1 a $\mathbf{C}$ matice jimi určená, stačí, aby matice $\mathbf{B}$ splňovala vztah

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{C}, \text{ t. j. } \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}. \tag{31}$$

15. Základní vlastnosti transformace (27).

Nadrovina $(n - 1)$-rozměrného prostoru má v homogenních souřadnicích rovnici $\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu = 0$ a přejde lineární transformací (také lineární substitucí) (27) v útvar

$$0 = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{\nu\varkappa} X_\varkappa = \sum_{\varkappa=1}^{n} X_\varkappa \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu\varkappa} a_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{n} b_\varkappa X_\varkappa,$$

tedy opět v nadrovinu onoho prostoru, pokládáme-li body $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ za jeho dva body přiřazené sobě navzájem transformací (27). Rovnice této nové nadroviny tudíž zní

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu X_\nu = 0, \; b_\nu = \sum_{\varrho=1}^{u} a_{\varrho\nu} a_\varrho, \; \nu = 1, 2, \ldots, n; \tag{32}$$

vztahy pro určení koeficientů $b_1, b_2, \ldots b_n$ je ostatně možno vyjádřiti jedinou maticovou rovnicí

$$\boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{a}. \tag{33}$$

Útvar určený v $(n - 1)$-rozměrném prostoru body společnými $n - 2$ různým nadrovinám se jmenuje přímkou tohoto $(n - 1)$-rozměrného prostoru. Její rovnice tedy jsou

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_{i\nu} x_\nu = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n - 2. \tag{34}$$

Protože se transformací (27) každá z oněch $n - 2$ nadrovin přímku určujících transformuje opět v nadrovinu, převádí transformace (27) každou přímku $(n - 1)$-rozměrného prostoru opět v přímku. Rovnice této nové přímky budou podle výsledků (32) a (33)

$$\sum_{\nu=1}^{n} d_{i\nu} X_\nu = 0, \; \boldsymbol{d}_i = \overline{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{c}_i, \; i = 1, 2, \ldots, n - 2. \tag{35}$$

Specielní k-rozměrná $(0 \leqq k \leqq n - 2)$ varieta určená v $(n - 1)$-rozměrném prostoru $n - 1 - k$ nadrovinami se transformací (27) převádí zase v takovou varietu k-rozměrnou.

Transformace (27) je zobecněním kolineace známé z geometrie roviny a trojrozměrného prostoru do prostoru $(n - 1)$-rozměrného. Upozorňujeme, že $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i $X_1, X_2, \ldots, X_n$ pokládáme v tomto příkladě za homogenní bodové souřadnice.

16. Díváme-li se na soustavu n lineárních rovnic o n neznámých a s nenulovým determinantem

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu = y_i, \; i = 1, 2, \ldots, n \tag{36}$$

jako na lineární substituci, která každé soustavě čísel y_1,

$y_2, \ldots, y_n$ přiřazuje určitou soustavu $x_1, x_2, \ldots, x_n$, lze ony rovnice psáti ve tvaru

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} \tag{36'}$$

a jejich řešení je pak

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}. \tag{36''}$$

Vedle soustavy (36′) zavedeme ještě transponovanou

$$\overline{\mathbf{A}}\mathbf{s} = \mathbf{t} \tag{37}$$

a určíme hodnotu výrazu $\sum_{i=1}^{n} x_i t_i$. Dostáváme postupně

$$\sum_{i=1}^{n} x_i t_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{A} \sum_{\nu=1}^{n} A_{\nu i} y_\nu \sum_{\varrho=1}^{n} a_{\varrho i} s_\varrho = \frac{1}{A} \sum_{\nu,\varrho}^{1,2,\ldots,n} s_\varrho y_\nu \sum_{i=1}^{n} a_{\varrho i} A_{\nu i} =$$
$$= \sum_{\nu,\varrho}^{1,2,\ldots,n} s_\varrho y_\nu \delta_{\varrho\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} s_\nu y_\nu.$$

Nalezli jsme tak jednoduchý a zajímavý vztah mezi řešeními $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $s_1, s_2, \ldots, s_n$ a pravými stranami $y_1, y_2, \ldots, y_n$, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ dané soustavy (36′) a soustavy k ní transponované (37):

$$x_1 t_1 + x_2 t_2 + \ldots + x_n t_n = s_1 y_1 + s_2 y_2 + \ldots + s_n y_n. \tag{38}$$

Tak má na př. soustava (12) z př. 6. řešení (12,1) a soustava k ní transponovaná (na př.)

$$\begin{aligned}
3s_1 + s_2 + 3s_3 + 3s_4 &= -1\\
2s_1 + 3s_2 + 3s_3 + 3s_4 &= 0\\
4s_1 + s_2 + 3s_3 + 2s_4 &= 0\\
2s_1 + 4s_2 + 3s_3 + 2s_4 &= 0
\end{aligned}$$

pak řešení

$$s_1 = 3,\ s_2 = 2,\ s_3 = -6,\ s_4 = 2.$$

Máme tedy

$$
\begin{array}{llll}
x_1 = 6, & x_2 = -\frac{20}{3}, & x_3 = -\frac{10}{3}, & x_4 = \frac{13}{3} \\
y_1 = 0, & y_2 = 0, & y_3 = 1, & y_4 = 0 \\
s_1 = 3, & s_2 = 2, & s_3 = -6, & s_4 = 2 \\
t_1 = -1, & t_2 = 0, & t_3 = 0, & t_4 = 0
\end{array}
$$

a přesvědčíme se snadno, že tyto veličiny splňují opravdu vztah (38).

* * *

Lineární forma y v n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ má tvar

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n. \tag{39}$$

Dvě lineární formy týchž proměnných

$$y_1 = \sum_{\nu=1}^{n} a_{1\nu}x_\nu, \quad y_2 = \sum_{\nu=1}^{n} a_{2\nu}x_\nu$$

pokládáme za různé, jsou-li soustavy $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}; a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}$ jejich koeficientů lineárně nezávislé. Tak na př. jsou formy

$$y_1 = 2x_1 - 3x_2 + \tfrac{1}{2}x_3, \quad y_2 = -x_1 + \tfrac{3}{2}x_2 - \tfrac{1}{4}x_3$$

navzájem stejné. Z úvah odstavce 1. pak vyplývá poznatek, že v soustavě m lineárních forem

$$y_i = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}x_\nu, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{40}$$

lze nalézti právě tolik navzájem různých, kolik je hodnost h matice soustavy jejich koeficientů (tuto matici ovšem doplníme ve smyslu odst. 9. části prvé na čtverečnou nulovými řadami, abychom také na systémy lineárních forem mohli užíti pravidel maticového počtu). Navzájem různé jsou pak ty formy, z jejichž matice lze vytvořiti nenulový determinant h-řadový. Soustavu (40) píšeme také zde ve známém tvaru

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{40'}$$

Poznámka. Lineární transformace $(\bar{\mathbf{A}})^{-1}$ se nazývá kontragredientní k transformaci $\mathbf{A}$. Vzorce (93), (91) a (95) části I ukazují, že kontragredience dvou lineárních homogenních transformací je vzájemná.

Lze dokázati platnost této *věty*:

Nutná a postačující podmínka, aby byly dvě transformace $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{s} = \mathbf{B}\mathbf{t}$ navzájem kontragredientní, je vyjádřena rovnicí

$$\sum_{i=1}^{n} y_i s_i = \sum_{i=1}^{n} x_i t_i. \tag{41}$$

Jsou-li totiž kontragredientní, je $\mathbf{B} = (\bar{\mathbf{A}})^{-1}$, tedy druhá transformace má tvar $\mathbf{t} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{s}$ a podle příkladu 16 dospíváme přímo k rovnici (41).

Je-li naopak tato rovnice splněna pro všechny systémy (x), (y), (s), (t) navzájem si odpovídající, volme systém (x) tak, že $x_i = 0$ pro $i \neq k$, $x_k = 1$. Tomuto systému odpovídá systém (y) určený vztahy $y_i = a_{ik}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Zavedeme-li tyto speciální soustavy do rovnice (41), dostáváme

$$t_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} s_i.$$

Tento vztah ovšem platí pro všechna k, t. j. pro $k = 1, 2, \ldots, n$ a ukazuje, že lze psáti

$$\mathbf{t} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{s},$$

t. j. $\mathbf{s} = (\bar{\mathbf{A}})^{-1}\mathbf{t}$. Na druhé straně však víme, že $\mathbf{s} = \mathbf{B}\mathbf{t}$, takže je $\mathbf{B} = (\bar{\mathbf{A}})^{-1}$ a obě lineární transformace, o nichž věta mluví, jsou vskutku kontragredientní.