Determinanty a matice v theorii a praxi

2. Pravidlo Cramerovo

In: Václav Vodička (author): Determinanty a matice v theorii a praxi. Část druhá. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1950. pp. 12–17.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403287

2. PRAVIDLO CRAMEROVO.

Budiž dána soustava n lineárních rovnic s n neznámými $x_1, x_2, \ldots, x_n$, již píšeme ve tvaru

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{10}$$

a předpokládáme, že jest její determinant $A = |a_{ik}|$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$ různý od nuly.

Násobme rovnice (10) po řadě čísly $A_{1k}, A_{2k}, \ldots, A_{nk}$ (jsou to doplňky prvků $a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk}$ v A) a sečtěme. Dostaneme (viz vzorec (12,2) dílu prvého)

$$\sum_{i=1}^{n} b_i A_{ik} = \sum_{i=1}^{n} A_{ik} \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \sum_{i=1}^{n} a_{i\nu} A_{ik} = x_k \,.\, A = A x_k.$$

Protože však jest $\sum_{i=1}^{n} b_i A_{ik}$ rovno determinantu — označme jej A_k — který vznikne z A tím, že k-tý sloupec nahradíme čísly $b_1, b_2, \ldots, b_n$ a protože jest podle předpokladu $A \neq 0$, nacházíme — provedouce právě naznačený postup po řadě pro všechna $k = 1, 2, \ldots, n$ — tento důsledek rovnic (10):

$$x_k = \frac{A_k}{A}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

Rovnice (10) lze však obráceně pokládati za důsledek vztahů (11). Násobíme-li totiž ν-tý z nich číslem $a_{i\nu}$ a sečteme přes všechna $\nu = 1, 2, \ldots, n$, dostaneme postupně

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu = \frac{1}{A} \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} A_\nu = \frac{1}{A} \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} \sum_{l=1}^{n} b_l A_{l\nu} = \frac{1}{A} \sum_{l=1}^{n} b_l \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} A_{l\nu} =$$
$$= \frac{1}{A} \,.\, b_i A = b_i,$$

tedy právě i-tou rovnici ze soustavy (10). Provedeme-li tento postup pro $i = 1, 2, \ldots, n$, máme celou soustavu (10) jako důsledek vztahů (11).

Tento poznatek, který má velkou důležitost, vyjádříme *větou* 5. (t. zv. věta Cramerova):

Soustava n lineárních rovnic o n neznámých s nenulovým determinantem má jediné řešení. Dostaneme je tak, že v determinantu soustavy nahradíme postupně všechny sloupce absolutními členy (t. j. koeficienty bez neznámých) *stojícími na pravé straně rovnic soustavy a determinanty takto vzniklé pak dělíme determinantem soustavy.*

Příklady.

6. Řešiti soustavu

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0. \end{aligned} \qquad (12)$$

Determinant A této soustavy má podle příkladu 4. hodnotu 3; determinanty A_1, A_2, A_3, A_4 se zde dají v důsledku jednoduchých pravých stran rovnic (12) snadno vypočísti. Dostaneme

$$A_1 = 18,\ A_2 = -20,\ A_3 = -10,\ A_4 = 13;\ A = 3,$$

takže jest jediné řešení soustavy (12) dáno čísly

$$x_1 = 6,\ x_2 = -\tfrac{20}{3},\ x_3 = -\tfrac{10}{3},\ x_4 = \tfrac{13}{3}. \qquad (12,1)$$

7. Derivace funkcí implicitních.

Buďtež proměnné $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dány jako derivabilní funkce nezávisle proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_m$ soustavou n implicitních vztahů

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (13)$$

v nichž má každá z funkcí f_i spojité parciální derivace podle $x_1, x_2, \ldots, y_n$.

Úlohou jest určiti parciální derivace funkcí $y_1, y_2, \ldots, y_n$ podle $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Provedeme to tak, že každou z rovnic (13) derivujeme parciálně postupně podle všech proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Derivujeme-li na př. podle x_k, dostaneme soustavu n rovnic

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_\nu} \cdot \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} = -\frac{\partial f_i}{\partial x_k}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{14}$$

o n neznámých $\frac{\partial y_1}{\partial x_k}, \frac{\partial y_2}{\partial x_k}, \ldots, \frac{\partial y_n}{\partial x_k}$. Za předpokladu, že determinant $\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_\nu}\right| \neq 0$, $i, \nu = 1, 2, \ldots, n$ této soustavy — budeme jej také označovati symbolem

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$$

a nazývati funkcionálním (nebo Jacobiho) determinantem funkcí $f_1, f_2, \ldots, f_n$ podle proměnných $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — není roven nule, lze podle věty Cramerovy rovnice (14) řešiti a formule pro hledané parciální derivace se dají psáti ve tvaru

$$\frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} = -\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(y_1, \ldots, y_{\nu-1}, x_k, y_{\nu+1}, \ldots, y_n)} : \tag{15}$$

$$: \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \; k = 1, 2, \ldots, m;$$

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}, & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}, & \ldots, & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}, & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}, & \ldots, & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}, & \frac{\partial f_n}{\partial y_2}, & \ldots, & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}. \tag{16}$$

U prostorové čáry $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ máme na př.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{D(F, G)}{D(x, z)} : \frac{D(F, G)}{D(y, z)}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{D(F, G)}{D(y, x)} : \frac{D(F, G)}{D(y, z)} \tag{17}$$

za předpokladu, že jest $\dfrac{D(F, G)}{D(y, z)} \neq 0$.

8. Provésti dělení polynomu

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{n-\nu} \tag{a}$$

binomem $x - x_1$, t. j. určiti koeficienty $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}, q_n$ tak, aby platilo identicky

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{n-\nu} = (x - x_1)\sum_{\varrho=0}^{n-1} q_\varrho x^{n-\varrho-1} + q_n. \tag{b}$$

Rovnici (b) upravíme na tvar

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{n-\nu} = \sum_{\varrho=0}^{n-1} q_\varrho x^{n-\varrho} - \sum_{\varrho=0}^{n-1} x_1 q_\varrho x^{n-\varrho-1} + q_n = \sum_{\varrho=0}^{n-1} q_\varrho x^{n-\varrho} -$$

$$- \sum_{\varkappa=1}^{n} x_1 q_{\varkappa-1} x^{n-\varkappa} + q_n = \sum_{\varrho=0}^{n} (q_\varrho - x_1 q_{\varrho-1})\, x^{n-\varrho}, \quad q_{-1} = 0$$

a z něho dostáváme ve smyslu methody neurčitých součinitelů systém $n + 1$ rovnic pro neznámé koeficienty $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n$:

$$- x_1 q_{\nu-1} + q_\nu = a_\nu, \; \nu = 0, 1, 2, \ldots, n; \; q_{-1} = 0. \tag{c}$$

Snadno nahlédneme, že má determinant této soustavy hodnotu 1, takže se při jejím řešení nemohou vyskytnouti žádné nesnáze. Toto řešení je potom podle Cramerovy věty dáno vzorci

$$q_\nu = A_\nu, \; \nu = 0, 1, 2, \ldots, n; \tag{d}$$

označíme-li v determinantu soustavy (c) sloupce pořadovými čísly $0, 1, 2, \ldots n$, znamená A_ν determinant vzniklý z něho tím, že sloupec s pořadovým číslem ν nahradíme novým s elementy $a_0, a_1, a_2 \ldots, a_n$. Rozvedením podle prvých $\nu + 1$ řádků dostaneme pak A_ν ve tvaru

$$A_\nu = \begin{vmatrix} 1 & 0, & 0, \ldots, & 0, & a_0 \\ -x_1, & 1, & 0, \ldots, & 0, & a_1 \\ 0, & -x_1, & 1, \ldots, & 1, & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, \ldots, & 1, & a_{\nu-1} \\ 0, & 0, & 0, \ldots, & -x_1, & a_\nu \end{vmatrix},$$

t. j. podle vzorců (13), (13′) dílu prvého

$$A_\nu = a_0 x_1{}^\nu + a_1 x_1{}^{\nu-1} + \ldots + a_\nu.$$

Máme tedy definitivní řešení soustavy (c):

$$q_\nu = a_0 x_1{}^\nu + a_1 x_1{}^{\nu-1} + \ldots + a_\nu,\ \nu = 0, 1, 2, .,,, n. \qquad \text{(d1)}$$

Podle této formule je tudíž možno přímo vypočítati koeficienty $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$ podílu, jakož i zbytek q_n při dělení výše uvedeném; tento zbytek má ovšem hodnotu $q_n = f(x_1)$, jak vychází také přímo ze vzorce (d1).

Velmi pohodlný výpočet koeficientů $q_0, q_1, \ldots, q_n$ se opírá o relace (c) a uspořádává do t. zv. *schematu Hornerova*:

$$\begin{array}{c|llllll} & a_0, a_1, & a_2, & a_3, & \ldots, a_{n-1}, & a_n & \\ x_1 & & x_1 a_0, & x_1 q_1, & x_1 q_2, \ldots, & x_1 q_{n-2}, & x_1 q_{n-1} \\ \hline & a_0, & q_1, & q_2, & q_3, & \ldots, q_{n-1}, & q_n = f(x_1). \end{array} \qquad \text{(e)}$$

9. Jako další příklad provedeme určení koeficientů $c_1, c_2, \ldots, c_m$, které vystupovaly v prvém dílu při stanovení hodnoty determinantu *Sternova* (vztah 66). Mají se nalézti c_i tak, aby platilo identicky v x

$$f_m(x) \equiv x^m + \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu{}^{(m)} x^{m-\nu} = x^m + \sum_{\varrho=1}^{m} c_\varrho f_{m-\varrho}(x) =$$

$$= x^m + \sum_{\varrho=1}^{m} c_\varrho \sum_{\varkappa=0}^{m-\varrho} a_\varkappa{}^{(m-\varrho)} x^{m-\varkappa-\varrho} = x^m + \sum_{\varrho=1}^{m} c_\varrho \sum_{\nu=\varrho}^{m} a_{\nu-\varrho}^{(m-\varrho)} x^{m-\nu} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{m} x^{m-\nu} \sum_{\varrho=1}^{\nu} c_\varrho a_{\nu-\varrho}^{(m-\varrho)},\ a_0{}^{(m-\varrho)} = 1.$$

Tento požadavek vede ve smyslu methody neurčitých součinitelů k systému rovnic pro neznámé c_ϱ

$$\sum_{\varrho=1}^{\nu} a_{\nu-\varrho}^{(m-\varrho)} c_\varrho = a_\nu^{(m)}, \ \nu = 1, 2, \ldots, m.$$

Determinant D tohoto systému má hodnotu

$$D = a_0^{(0)} \,.\, a_0^{(1)} \,.\, a_0^{(2)} \,.\, \ldots \,.\, a_0^{(m-1)} = 1,$$

determinant D_k, vzniklý z D tím, že k-tý sloupec nahradíme soustavou čísel $a_1^{(m)}, a_2^{(m)}, \ldots, a_m^{(m)}$ pak rozvedeme podle prvních k řádků a dostaneme pro něj výraz

$$D_k = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & \ldots, a_1^{(m)} \\ a_1^{(m-1)}, & 1, & 0, & \ldots, a_2^{(m)} \\ a_2^{(m-1)}, & a_1^{(m-2)}, & 1, & \ldots, a_3^{(m)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k-1}^{(m-1)}, & a_{k-2}^{(m-2)}, & a_{k-3}^{(m-3)}, & \ldots, a_k^{(m)} \end{vmatrix}.$$

Podle Cramerova pravidla tedy máme pro c_k hodnoty

$$c_k = D_k, \ k = 1, 2, \ldots, m;$$

to jsou koeficienty oné lineární kombinace, které jsme použili při výpočtu hodnoty determinantu Sternova.