9. ZÁKLADY POČÍTÁNÍ MATICEMI.

V předchozích výkladech jsme se už častěji setkali s pojmem matice. Avšak teprve v theorii forem, transformací a elementárních dělitelů se maticím dostává plného uplatnění a to důsledným použitím t. zv. maticového počtu, který se opírá o několik jednoduchých definic a pojmů. V tomto paragrafu je stručně a přehledně nastíníme předpokládajíce, že jde o matice n-řadové a *vesměs čtverečné*. Že není tento předpoklad na újmu obecnosti, nahlédneme snadno, když event. doplníme příslušné matice řádky a sloupci nulovými, čímž se ve smyslu věty 11. nemění hodnost matice — a ta je pro všechny výpočty směrodatná. Čtverečné n-řadové matice, které se při počítání vyskytnou, budeme v tomto paragrafu označovati půltučnými písmeny (většinou velkými, ale podle potřeby i malými), jejich determinanty pak příslušnými kursivou tištěnými písmeny latinské abecedy.

a) *Rovnost dvou matic.*

Dvě matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *elementů resp.* a_{ik}, b_{ik} *pokládáme za stejné, když a jen když platí* n^2 *rovnic*

$$a_{ik} = b_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{70}$$

Jsou-li takové dvě matice stejné, jsou ovšem stejné i jejich determinanty. Opak však neplatí. Determinant A matice $\mathbf{A}$ je roven determinantu matice, jež z ní vznikne vzájemnou výměnou řádek a sloupců a přece obě tyto matice nejsou podle definice (70) sobě rovny.

Matici nazýváme *nulovou*, jsou-li všechny její elementy rovny nule, *jednotkovou* (značka $\mathbf{I}$), jsou-li *hlavní* její prvky rovny 1, ostatní pak všechny rovny nule. Nulovou matici značíme znakem $\mathbf{O}$.

b) *Sčítání matic.*

Součtem $\mathbf{S}$ *dvou matic* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *jmenujeme matici, jejíž elementy* s_{ik} *jsou dány vzorci*

$$s_{ik} = a_{ik} + b_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{71}$$

Píšeme pak

$$\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B}. \tag{72}$$

Pro toto sčítání ověříme pomocí vzorců (70) snadno platnost zákona komutativního i asociativního.

Příklad. Řešit rovnici

$$\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{O}. \tag{73}$$

Podle vzorců (70) jsou neznámé prvky x_{ik} druhé matice určeny rovnicemi

$$a_{ik} + x_{ik} = 0, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n,$$

takže jest

$$x_{ik} = -a_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Takto získanou matici označujeme znakem $-\mathbf{A}$ a píšeme tedy řešení rovnice (73) ve tvaru

$$\mathbf{X} = -\mathbf{A}. \tag{74}$$

c) *Násobení matic.*

Součinem dvou matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *rozumíme matici* $\mathbf{P}$, *jejíž prvky* p_{ik} *jsou dány vzorci*

$$p_{ik} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu k}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{75}$$

Značíme pak toto násobení symbolicky rovnicí

$$\mathbf{P} = \mathbf{AB}. \tag{76}$$

Poznámky. Násobení matic je úkon *asociativní, nikoli však* (obecně) *komutativní. Mimo to platí* zde — dokažte pomocí vzorců (70), (71), (75), (76) — *zákon distributivní*:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\,\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}. \tag{77}$$

Pro determinant P, příslušný k součinu dvou matic, platí vztah

$$P = A \,.\, B = B \,.\, A. \tag{78}$$

Je-li aspoň jedna z obou spolu násobených matic rovna nule, je i jejich součin maticí nulovou.

Násobení maticí jednotkovou je komutativní; výsledkem takového násobení je zase matice původní, takže lze jednotkovou matici v součinu vynechati.

Je-li k libovolné číslo, pak násobíme danou matici tímto číslem tak, že jím násobíme všechny její prvky.

Příklad. Řešit rovnici

$$\mathbf{AX} = \mathbf{I}. \tag{79}$$

Podle definice jednotkové matice a podle vzorce (75) musí pro neznámé elementy x_{ik} platit rovnice

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_{\nu k} = \delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n;$$

δ_{ik} je tak řečený Kroneckerův symbol, definovaný vztahy $\delta_{ik} = 0$ pro $i \neq k$, $\delta_{ii} = 1$. Při pevném k zde máme systém rovnic pro neznámé $x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{nk}$ s determinantem A. Řešitelnost žádá v důsledku relace — v. (78) —

$$A \, . \, X = 1,$$

aby A bylo různé od nuly. Pak je ale podle Cramerova pravidla (podrobnosti viz v II. díle tohoto spisu)

$$x_{\nu k} = \frac{A_\nu}{A}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

při čemž A_ν je determinant, který vznikne z A tak, že prvky ν-tého sloupce nahradíme čísly $\delta_{1k}, \delta_{2k}, \ldots, \delta_{nk}$. Rozvedením podle těchto prvků najdeme $A_\nu = A_{k\nu}$, takže má hledaná matice elementy

$$x_{\nu k} = \frac{A_{k\nu}}{A}, \quad k, \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{79'}$$

Nazýváme pak matici takto určenou maticí reciprokou k $\mathbf{A}$ a píšeme

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}. \tag{80}$$

Existuje tedy k regulární matici (tak nazýváme tu, jejíž *determinant je různý od nuly*) *jediná matice reciproká* (také inversní); její prvky se určí ze vztahů (79′). Tato matice je co do násobení komutativní s maticí původní.

Příklad. Provésti násobení matice $\mathbf{A}$ maticí

$$\mathbf{x} = \begin{Vmatrix} x_1, & 0, \ldots, 0 \\ x_2, & 0, \ldots, 0 \\ \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ x_n, & 0, \ldots, 0 \end{Vmatrix}. \tag{81}$$

Pro elementy y_{ik} výsledné matice $\mathbf{y}$ máme obecně [prvky matice (81) značme pro okamžik x_{ik}] vzorce

$$y_{ik} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_{\nu k}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Je však $x_{\nu k} = 0$ pro $k = 2, 3, \ldots, n$, takže je také $y_{ik} = 0$ pro $k \neq 1$ a $y_{i1} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu$; máme tedy výsledek

$$y_{i1} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu, \; y_{ik} = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n, \; k = 2, 3, \ldots, n. \tag{82}$$

Lze tudíž vysloviti tuto skutečnost: Násobíme-li matici $\mathbf{A}$ maticí (81), dostáváme jako výsledek matici, která vznikne z (81) tím, že prvý sloupec nahradíme veličinami

$$y_i = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

d) *Podobnost dvou matic.*

Matici $\mathbf{C}$ nazýváme podobnou s maticí $\mathbf{A}$, existuje-li regulární matice $\mathbf{R}$ tak, že jest

$$\mathbf{C} = \mathbf{RAR}^{-1}. \tag{83}$$

Tak je na př. matice

$$\begin{Vmatrix} -1, & 0, & 1 \\ 2, & 3, & 4 \\ -1, & 1, & 0 \end{Vmatrix} \text{ podobná matici } \begin{Vmatrix} 1, & -\frac{4}{3}, & \frac{2}{3} \\ 6, & -4, & 3 \\ 6, & -3, & 5 \end{Vmatrix};$$

matice $\boldsymbol{R}$ zde má tvar (ověřte si to)

$$\boldsymbol{R} = \left\| \begin{matrix} 2, & 0, & 0 \\ 3, & 1, & -1 \\ 0, & 2, & 1 \end{matrix} \right\| . \tag{83'}$$

Z rovnice (83) plyne

$$\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^{-1}$$

a dále

$$\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}; \tag{83''}$$

protože pak matice inversní k matici reciproké je rovna matici původní (vhodné cvičení pro čtenáře), lze poznatek (83″) vyslovit větou, že podobnost matice $\boldsymbol{C}$ s maticí $\boldsymbol{A}$ má za důsledek podobnost matice $\boldsymbol{A}$ s maticí $\boldsymbol{C}$.

Jsou-li matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$ navzájem podobné a k libovolné číslo, tu jsou také matice $k\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ a $k\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}$ navzájem podobné. Je totiž $k\boldsymbol{I}$ matice, jejíž hlavní úhlopříčka má všechny prvky rovny číslu k, ostatní pak elementy jsou rovny nule. Takováto matice (říká se jí diagonální) je (jak se snadno zjistí) co do násobení komutativní s každou jinou, takže platí

$$\boldsymbol{R} \,.\, k\boldsymbol{I} \,.\, \boldsymbol{R}^{-1} = k\boldsymbol{I} \,.\, \boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{-1} = k\boldsymbol{I} \,.\, \boldsymbol{I} = k\boldsymbol{I}$$

a můžeme psáti

$$k\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C} = \boldsymbol{R}k\boldsymbol{I}\boldsymbol{R}^{-1} - \boldsymbol{R}\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}^{-1} = (\boldsymbol{R}k\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R}\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{R}^{-1} =$$
$$= \boldsymbol{R}(k\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{R}^{-1};$$

tato rovnice však vyjadřuje podobnost obou matic $k\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}$ a $k\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$.

Snadno se dá ukázati také fakt, že dvě matice, podobné třetí, jsou též navzájem podobné. Provedení tohoto důkazu je zcela jednoduché, dokážeme-li si napřed pomocnou větu, že matice inversní k součinu $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ je rovna součinu $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$. Předpokládejme ovšem, že jsou oba faktory maticemi regulárními; pak je také jejich součin $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ maticí regulární v. vzorec (78) — a proto k němu existuje matice inversní $\boldsymbol{P}^{-1}$. O té ovšem platí $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$ a proto také

$$IB^{-1}A^{-1} = B^{-1}A^{-1} = P^{-1}ABB^{-1}A^{-1} = P^{-1}.$$

Je tedy opravdu

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \tag{84}$$

Buďte nyní obě matice A, B podobny třetí matici C. Lze pak psáti

$$A = RCR^{-1} = RSBS^{-1}R^{-1} = TBT^{-1},$$

což je právě matematický výraz podobnosti matic A a B.

e) *Charakteristická funkce dané matice.*

V tomto odstavci se jen letmo a většinou bez důkazů dotkneme jistých fakt, která stojí na samém počátku vlastní theorie matic a jejichž dalším rozvedením lze vybudovati celou zajímavou nauku o elementárních dělitelích. Ačkoli tyto věci beze sporu patří do theorie determinantů, musíme zde od jejich podrobnějšího studia upustit, už také proto, aby tato kniha, určená praktické potřebě techniků, nebyla přetížena abstraktními úvahami. Čtenář, který by chtěl tyto věci poznati blíže, najde poučení o nich v každé dobré učebnici algebry.

Charakteristickou funkcí $\varphi(\varrho)$ dané matice A nazýváme determinant matice $\varrho I - A$, takže

$$\varphi(\varrho) = \begin{vmatrix} \varrho - a_{11}, & -a_{12}, & -a_{13}, \dots, & -a_{1n} \\ -a_{21}, & \varrho - a_{22}, & -a_{23}, \dots, & -a_{2n} \\ -a_{31}, & -a_{32}, & \varrho - a_{33}, \dots, & -a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1}, & -a_{n2}, & -a_{n3}, \dots, & \varrho - a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{85}$$

Tato funkce je zřejmě polynom proměnné ϱ stupně n-tého a lze ji tedy psáti ve tvaru

$$\varphi(\varrho) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}\varrho + \frac{\varphi''(0)}{2!}\varrho^2 + \dots +$$
$$+ \frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\varrho^{n-1} + \frac{\varphi^{n}(0)}{n!}\varrho^{n}.$$

Nyní však je $\varphi(0) = (-1)^n A$; $\varphi'(\varrho)$ je pak podle věty o derivování determinantu (v. § 5) rovno součtu všech hlavních minorů $(n-1)$-řadových determinantu (85), takže

$$\varphi'(0) = (-1)^{n-1}(A_{11} + A_{22} + \ldots + A_{nn}) = (-1)^{n-1}\alpha_{n-1}.$$

Derivujeme-li $\varphi'(\varrho)$ dále podle ϱ, dostaneme za výsledek 2!-násobný (rozvažte si tuto věc podrobně) součet všech hlavních minorů $(n-2)$-řadových determinantu $\varphi(\varrho)$, takže je

$$\varphi''(0) = (-1)^{n-2} \, . \, 2!\alpha_{n-2}.$$

Dalším derivováním se objeví $\varphi'''(\varrho)$ jako 3!-násobný součet všech $(n-3)$-řadových hlavních subdeterminantů determinantu $\varphi(\varrho)$ a proto jest

$$\varphi'''(0) = (-1)^{n-3} \, . \, 3!\alpha_{n-3}.$$

Je jasno (a lze to dokázati na př. úplnou indukcí), že obecně platí

$$\varphi^{(k)}(0) = (-1)^{n-k}k!\alpha_{n-k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{86}$$

při čemž značí α_{n-k} součet všech $(n-k)$-řadových hlavních minorů determinantu A. Je tedy možno psáti charakteristickou funkci matice $\boldsymbol{A}$ ve tvaru

$$\varphi(\varrho) = \varrho^n - \alpha_1\varrho^{n-1} + \alpha_2\varrho^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-2}\alpha_{n-2}\varrho^2 + \\ + (-1)^{n-1}\alpha_{n-1}\varrho + (-1)^n A. \tag{87}$$

Tak má ku příkladu matice (83') charakteristickou funkci

$$\varphi(\varrho) = \begin{vmatrix} \varrho - 2, & 0, & 0 \\ -3, & \varrho - 1, & 1 \\ 0, & -2, & \varrho - 1 \end{vmatrix} = \varrho^3 - 4\varrho^2 + 7\varrho - 6. \tag{87'}$$

Je-li $\vartheta(\varrho)$ největší společný dělitel všech $(n-1)$-řadových subdeterminantů determinantu $\varphi(\varrho)$, je funkce proměnné ϱ

$$\lambda(\varrho) = \frac{\varphi(\varrho)}{\vartheta(\varrho)} \tag{88}$$

celistvá racionální a říká se jí n-tý elementární dělitel charakteristické funkce $\varphi(\varrho)$.

Důkaz provedeme snadno pomocí theorie determinantu reciprokého k $\varphi(\varrho)$. Budiž tento označen znakem $\Phi(\varrho)$ a jeho elementy [doplňky to prvků determinantu $\varphi(\varrho)$] symboly $F_{ik}(\varrho)$. Je tedy

$$\Phi(\varrho) = \varphi^{n-1}(\varrho) = |F_{ik}(\varrho)|, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n$$

a protože podle předpokladu platí

$$F_{ik}(\varrho) = \vartheta(\varrho) f_{ik}(\varrho), \quad i, k = 1, 2, \ldots, n,$$

máme dále

$$\varphi^{n-1}(\varrho) = |\vartheta(\varrho)\, f_{ik}(\varrho)| = \vartheta^n(\varrho)\, |f_{ik}(\varrho)|, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n,$$

takže konečně

$$\lambda^{n-1}(\varrho) = \left[\frac{\varphi(\varrho)}{\vartheta(\varrho)}\right]^{n-1} = \vartheta(\varrho)\, |f_{ik}(\varrho)|, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (89)$$

Protože však jsou $\vartheta(\varrho)$ a $f_{ik}(\varrho)$ polynomy proměnné ϱ, je $\lambda^{n-1}(\varrho)$ též polynom v této proměnné a tedy i $\lambda(\varrho)$ samo (umocněním racionální lomené funkce vzniká totiž funkce zase taková).

Tak je na př. pro funkci (87') $\vartheta(\varrho) = 1$, takže je tato funkce identická se svým třetím elementárním dělitelem.

O výrazu $\lambda(\varrho)$ a matici $\boldsymbol{A}$ se pak dokazuje v algebře tato věta: Rovnice nejnižšího stupně, které hoví matice $\boldsymbol{A}$, je rovnice $\lambda(\boldsymbol{A}) = 0$ (mocniny matice se při tom získají násobením); říkává se jí fundamentální rovnice matice $\boldsymbol{A}$. Samozřejmě vyhovuje pak každá matice ve smyslu relace (88) také rovnici $\varphi(\boldsymbol{A}) = 0$, tedy své charakteristické rovnici [charakteristickou rovnicí matice $\boldsymbol{A}$ nazýváme rovnici $\varphi(\varrho) = 0$].

Důkaz této věty, která je základem pro celou vyšší theorii matic, podal *Frobenius* — bohužel vybočuje tato věc už zcela z rámce našeho pojednání. Ověříme si jen její správnost pro matici (83'). Její druhá a třetí mocnina (proveďte podrobně) jsou matice

$$\begin{Vmatrix} 4, & 0, & 0 \\ 9, & -1, & -2 \\ 6, & 4, & -1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 8, & 0, & 0 \\ 15, & -5, & -1 \\ 24, & 2, & -5 \end{Vmatrix},$$

což dosazeno do $\varphi(\varrho)$ — v. (87′) — dává

$$\begin{Vmatrix} 8, & 0, & 0 \\ 15, & -5, & -1 \\ 24, & 2, & -5 \end{Vmatrix} - 4 \begin{Vmatrix} 4, & 0, & 0 \\ 9, & -1, & -2 \\ 6, & 4, & -1 \end{Vmatrix} + 7 \begin{Vmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 3, & 1, & -1 \\ 0, & 2, & 1 \end{Vmatrix} -$$

$$-6 \begin{Vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 8, & 0, & 0 \\ 15, & -5, & -1 \\ 24, & 2, & -5 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 16, & 0, & 0 \\ 36, & -4, & -8 \\ 24, & 16, & -4 \end{Vmatrix} +$$

$$+ \begin{Vmatrix} 14, & 0, & 0 \\ 21, & 7, & -7 \\ 0, & 14, & 7 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} 6, & 0, & 0 \\ 0, & 6, & 0 \\ 0, & 0, & 6 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{Vmatrix},$$

takže matice (83′) vskutku splňuje svou rovnici charakteristickou, která je v tomto případě zároveň její rovnicí fundamentální. Podle věty Frobeniovy pak víme, že neexistuje žádná rovnice stupně prvého nebo druhého, kterou by tato matice splňovala.

P ř í k l a d y. Propočítáme nyní jako aplikace předchozích vývodů několik příkladů, jejichž výsledků použijeme v dalších částech tohoto spisu.

P ř í k l a d 1. Dokázati, že hodnost součinu dvou matic nemůže překročiti hodnost žádné z nich.

Každý r-řadový subdeterminant součinu $\boldsymbol{AB}$ dvou matic je — v. vzorce (75), (76) a pak vzorec (47) — řádkovým součinem dvou matic: prvá je tvořena jistými r řádky matice $\boldsymbol{A}$, druhá pak r řádky matice vzhledem k $\boldsymbol{B}$ transponované (to je matice, která vznikne, když v $\boldsymbol{B}$ vyměníme řádky a sloupce navzájem; tím se ovšem hodnost matice nemění). Je tedy každý takový subdeterminant součtem $\binom{n}{r}$ součinů po dvou faktorech: jeden je r-řadovým subdeterminantem matice $\boldsymbol{A}$, druhý r-řadovým subdeterminantem matice $\boldsymbol{B}$. Je-li hodnost prvé matice h, jsou její determinanty $(h+1)$-řadové rovny všechny nule a tedy také všechny $(h+1)$-řadové determinanty součinu $\boldsymbol{AB}$; proto nemá tento součin hodnost větší než h a věta je dokázána.

Jednoduchým jejím důsledkem je, že se hodnost matice nemění, když ji násobíme maticí regulární.

Příklad 2. Násobte spolu matice

$$\left\| \begin{matrix} a_{11}, \ldots, a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}, \ldots, a_{nn} \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} A_{11}, \ldots, A_{n1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{1n}, \ldots, A_{nn} \end{matrix} \right\|.$$

Obecný element součinu bude (δ_{ik} je známý Kroneckerův symbol)

$$p_{ik} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} A_{k\nu} = \delta_{ik} A,$$

takže má součin obou matic tvar

$$\left\| \begin{matrix} A, & 0, \ldots, 0 \\ 0, & A, \ldots, 0 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ 0, & 0, \ldots, A \end{matrix} \right\|.$$

Je-li hodnost prvé z nich $n - 1$, jsou obě nenulové, kdežto součin je matice nulová. Může tedy nulová matice zcela dobře vzniknouti násobením dvou nenulových.

Příklad 3. Budiž $\boldsymbol{A}$ matice regulární, $\boldsymbol{A}^{-1}$ matice k ní inversní, $\overline{\boldsymbol{A}}$ matice k $\boldsymbol{A}$ transponovaná (to je ta, jež vznikne z $\boldsymbol{A}$ vzájemnou výměnou řádků a sloupců) a $(\overline{\boldsymbol{A}})^{-1}$ matice k této inversní. Studovati různé vlastnosti těchto matic.

Prvek stojící v i-tém řádku a k-tém sloupci je pro jednotlivé matice

$$a_{ik}, \frac{A_{ki}}{A}, a_{ki}, \frac{A_{ik}}{A}. \tag{90}$$

a) Čemu je rovno $(\mathbf{A}^{-1})^{-1}$, t. j. matice reciproká k inversní?

Protože je obecný element γ_{ik} matice $\mathbf{A}^{-1}$ roven $\frac{A_{ki}}{A}$, má hledaná matice obecný prvek $\varepsilon_{ik} = \frac{\Gamma_{ki}}{\Gamma}$, kde jest $\Gamma = |\gamma_{ik}| = \left|\frac{A_{ki}}{A}\right| = \frac{1}{A^n} \cdot |A_{ki}| = A^{-n}A^{n-1} = \frac{1}{A}$ a Γ_{ki} doplněk prvku γ_{ki} v determinantu Γ. Ten je však roven [v. vzorec (34)] výrazu $\frac{a_{ik}}{A}$, takže máme $\varepsilon_{ik} = a_{ik}$ a lze psáti vztah

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}. \tag{91}$$

Odtud a ze vzorců (73), (74) plyne snadno relace

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}. \tag{92}$$

b) Čemu je rovno $(\overline{\mathbf{A}^{-1}})$, t. j. matice transponovaná k matici reciproké?

Obecný prvek ε_{ik} hledané matice je zřejmě roven $\frac{A_{ik}}{A}$, tedy stejnolehlému prvku matice $(\overline{\mathbf{A}})^{-1}$; proto platí vzorec

$$(\overline{\mathbf{A}^{-1}}) = (\overline{\mathbf{A}})^{-1}. \tag{93}$$

c) Čemu je rovna matice inversní k $(\overline{\mathbf{A}^{-1}})$, tedy matice $[(\overline{\mathbf{A}^{-1}})]^{-1}$?

Podle vzorců (93) a (91) máme ihned

$$[(\overline{\mathbf{A}^{-1}})]^{-1} = \overline{\mathbf{A}}. \tag{94}$$

d) Čemu je rovno $(\overline{\overline{\mathbf{A}}})$, t. j. matice transponovaná k transponované?

Protože obecný element γ_{ik} matice $\overline{\mathbf{A}}$ je a_{ki}, má dotčená matice obecný prvek $\varepsilon_{ik} = a_{ik}$ a je

$$(\overline{\overline{\mathbf{A}}}) = \mathbf{A}, \tag{95}$$

jak je ostatně ihned patrno z prostého názoru.

Příklad 4. Potvrďte identitu

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

$$. \begin{vmatrix} A_{11} + A_{11}, & A_{12} + A_{21}, & \dots, & A_{1n} + A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} + A_{1n}, & A_{n2} + A_{2n}, & \dots, & A_{nn} + A_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \dots, & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}, & A_{n2}, & \dots, & A_{nn} \end{vmatrix} .$$

$$. \begin{vmatrix} a_{11} + a_{11}, & a_{12} + a_{21}, & \dots, & a_{1n} + a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} + a_{1n}, & a_{n2} + a_{2n}, & \dots, & a_{nn} + a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Z rovnosti

$$\mathbf{A}[(\bar{\mathbf{A}})^{-1} + \mathbf{A}^{-1}] = (\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{A})(\bar{\mathbf{A}})^{-1}$$

dostáváme, násobíce ji determinantem A, novou:

$$\mathbf{A}[A(\bar{\mathbf{A}})^{-1} + A\mathbf{A}^{-1}] = (\bar{\mathbf{A}} + \mathbf{A}) \, . \, A(\bar{\mathbf{A}})^{-1}.$$

Napíšeme rovnost mezi determinanty, která z této maticové rovnice plyne ve smyslu vzorce (78) a dostaneme přímo svrchu uvedenou identitu.