7. VĚTA SYLVESTEROVA-FRANKEOVA.

Budiž dán determinant $A = |a_{ik}|$; $i, k = 1, 2, \ldots, n$ a libovolné celé číslo $1 < r < n$. V determinantu A lze nalézti, jak víme, celkem $N^2 = \binom{n}{r}^2$ subdeterminantů r-řadových a je z nich možno vybudovati obecně $(N^2)! = \left[\binom{n}{r}^2\right]!$ různých determinantů N-řadových. Při vhodném způsobu konstrukce je možno hodnotu determinantu A_r, takto vzniklého, vyjádřiti pomocí výchozího determinantu A.

Označme si čísly $1, 2, \ldots, N = \binom{n}{r}$ jednotlivé kombinace r-té třídy tvořené z řady $1, 2, \ldots, n$. Tak na př. budeme rozuměti znakem 1 kombinaci $1, 2, \ldots, r$, znakem 2 kombinaci $1, 2, \ldots, r - 1, r + 1$, atd. Na pořadí, v jakém je bereme, při tom ostatně nezáleží — utvoříme jich prostě všech možných $N = \binom{n}{r}$, napíšeme v libovolném pořadí a označíme znaky $1, 2, \ldots, N$. Buďte h, k dvě z nich; pak budeme znakem M_{hk} označovati onen minor determinantu A, který je utvořen z jeho elementů patřících řádkům určeným kombinací h a sloupcům daným kombinací k. Tak je na př.

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, a_{1r} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, a_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r-1,1} & a_{r-1,2}, & \ldots, a_{r-1,r} \\ a_{r+1,1}, & a_{r+1,2}, & \ldots, a_{r+1,r} \end{vmatrix}.$$

Budeme pak determinantem A_r rozuměti determinant

$$A_r = \begin{vmatrix} M_{11}, & M_{12} & \ldots & M_{1N} \\ M_{21}, & M_{22}, & \ldots, & M_{2N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ M_{N1}, & M_{N2}, & \ldots, & M_{NN} \end{vmatrix}. \qquad (18)$$

Nyní však je $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$, takže lze ke každé kombinaci r-té třídy elementů $1, 2, \ldots, n$ přiřaditi kombinaci třídy $(n - r)$-té těchto prvků. Je to na př. ta, která se s onou první doplňuje na celou řadu $1, 2, \ldots, n$. Tyto „doplňkové kombinace“ určují determinant

$$A_{n-r} = \begin{vmatrix} \overline{M}_{11}, & \overline{M}_{12}, & \ldots, & \overline{M}_{1N} \\ \overline{M}_{21}, & \overline{M}_{22}, & \ldots, & \overline{M}_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{M}_{N1}, & \overline{M}_{N2}, & \ldots, & \overline{M}_{NN} \end{vmatrix}, \tag{19}$$

jehož obecný element $\overline{M}_{hk}$ je $(n - r)$-řadový minor přidružený v determinantu A k minoru r-řadovému M_{hk}.

Místo subdeterminantů $\overline{M}_{k\nu}$ přidružených v A k minorům $M_{k\nu}$ si zavedeme doplňky $D_{k\nu}$ těchto minorů $M_{k\nu}$. Značí-li $S(k)$, $S(\nu)$ součty čísel v kombinacích k, ν, platí podle definice 5.

$$D_{k\nu} = (-1)^{S(k)+S(\nu)}\overline{M}_{k\nu}, \quad \overline{M}_{k\nu} = (-1)^{S(k)+S(\nu)}D_{k\nu}. \tag{a}$$

Tyto výrazy vložme do determinantu A_{n-r}; vytkneme-li z elementů prvního řádku $(-1)^{S(1)}$, z prvků druhého řádku $(-1)^{S(2)}, \ldots$ až z posledního řádku $(-1)^{S(N)}$ a taktéž naložíme se sloupci, dostaneme A_{n-r} ve tvaru

$$A_{n-r} = \begin{vmatrix} D_{11}, & D_{12}, & \ldots, & D_{1N} \\ D_{21}, & D_{22}, & \ldots, & D_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{N1}, & D_{N2}, & \ldots, & D_{NN} \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Znásobme si determinanty A_r a A_{n-r} spolu po řádcích. Obecný člen

$$\alpha_{hk} = \sum_{\nu=1}^{N} M_{h\nu}D_{k\nu} \tag{b}$$

součinu je roven A pro $k = h$ podle věty Laplaceovy. Pro $k \neq h$ jde o součet součinů r-řadových subdeterminantů

$M_{h\nu}$ se soustavou doplňků $D_{k\nu}$ minorů $M_{k\nu}$, stejnolehlých s prvými (t. j. s $M_{h\nu}$) co do sloupců, avšak vzatých z jiných řádků determinantu A, než ze kterých pocházely minory $M_{h\nu}$. Proto má každý subdeterminant $M_{h\nu}$ alespoň jeden řádek společný s $D_{k\nu}$ a α_{hk} je podle Laplaceovy věty rovno determinantu, jehož alespoň dva rovnoběžné řádky jsou stejné. Je tedy $\alpha_{hk} = 0$ pro $k \neq h$ a máme výsledek

$$A_r \, . \, A_{n-r} = A^N = A^{\binom{n}{r}}. \tag{21}$$

To je prvý poznatek, který jsme získali o determinantu A_r a také A_{n-r}. Každý z nich je dělitelem výrazu $A^{\binom{n}{r}}$. Pomocí formule (21) dokážeme už poměrně snadno větu Sylvester-Frankeovu:

Věta 14. Hodnota determinantu A_r, definovaného vztahem (18), je určena vzorcem

$$A_r = A^{\binom{n-1}{r-1}}. \tag{22}$$

Důkaz. Použijeme úplné indukce předpokládajíce, že věta je už dokázána pro determinant složený z minorů $(n - 1)$-řadového determinantu.

Pokládáme-li v determinantu A prvek a_{nn} za proměnný (a označíme jej v důsledku toho znakem x), ostatní elementy pak za konstanty, vidíme ze vzorce (21), že také determinanty A_r, A_{n-r} jsou funkcemi proměnné x. Zavedeme-li číslování $1, 2, \ldots, N$ kombinací r-té třídy z prvků $1, 2, \ldots, n$ tak, že napřed dáme ty, které obsahují prvek n — je jich celkem $Q = \binom{n-1}{r-1}$ — bude proměnná x zastoupena pouze v Q^2 prvcích M_{hk} $(h, k = 1, 2, \ldots, Q)$ determinantu A_r a to v každém jen v prvé mocnině, takže jest $M_{hk} = R_{hk} \, . \, x + S_{hk}$. Nyní rozvedeme determinant A_r podle prvých Q řádků:

$$A_r = \begin{vmatrix} M_{11}, \ldots, M_{1Q} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_{Q1}, \ldots, M_{QQ} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} M_{Q+1,Q+1}, \ldots, M_{Q+1,N} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_{N,Q+1}, \quad \ldots, M_{NN} \end{vmatrix} + \ldots =$$

$$= \begin{vmatrix} xR_{11} + S_{11}, \ldots, xR_{1Q} + S_{1Q} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ xR_{Q1} + S_{Q1}, \ldots, xR_{QQ} + S_{QQ} \end{vmatrix} .$$

$$. \begin{vmatrix} M_{Q+1,Q+1}, \ldots, M_{Q+1,N} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_{N,Q+1}, \quad \ldots, M_{NN} \end{vmatrix} + \ldots =$$

$$= x^Q . \begin{vmatrix} R_{11}, \ldots, R_{1Q} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_{Q1}, \ldots, R_{QQ} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} M_{Q+1,Q+1}, \ldots, M_{Q+1,N} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_{N,Q+1}, \quad \ldots, M_{NN} \end{vmatrix} + \ldots ;$$

členy s nižšími mocninami proměnné x, než je x^Q, jsme nevypisovali.

Snadno však nahlédneme, že jsou R_{hk} minory $(r - 1)$-řadové determinantu $(n - 1)$-řadového

$$B = \begin{vmatrix} a_{11}, \quad \ldots, a_{1,n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1.1}, \ldots, a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

a M_{ij} jeho minory r-řadové. Protože pak pro $(n - 1)$-řadový determinant už předpokládáme platnost vzorce (22) dokázánu a protože minory R_{hk} $(h, k = 1, 2, \ldots, Q)$ a M_{ij} $(i, j = Q + 1, Q + 2, \ldots, N)$ jsou všechny $(r - 1)$-resp. r-řadové, které je vůbec možno z determinantu B utvořit, máme dále

$$A_r = x^Q . B^{\binom{n-2}{r-2}} . B^{\binom{n-2}{r-1}} + \ldots = x^Q . B^{\binom{n-1}{r-1}} + \ldots =$$
$$= x^Q . B^Q + \ldots \qquad \text{(c)}$$

Uvážíme-li, že jest $A = xB + C$ (C nezávisí na x), máme podle vzorce (21)

$$A_r A_{n-r} = (xB + C)^N,$$

z čehož je patrno, že kořeny racionální celistvé funkce A_r

proměnné x jsou všechny stejné a rovny číslu $-\frac{C}{B}$; je tedy

$$A_r = B^Q\left(x + \frac{C}{B}\right)^Q = (Bx + C)^Q = A^Q = A^{\binom{n-1}{r-1}},$$

čímž je vzorec (22) a tedy i věta 14. dokázána pro determinanty n-řadové za předpokladu, že platí pro $(n - 1)$-řadové. Protože však je pro dvouřadové determinanty samozřejmá, je její platnost obecná.

Poznámka. Pro $r = n - 1$ dostáváme ze vzorce (22) známé pravidlo pro určování hodnoty determinantu *reciprokého* k danému nikoli nulovému (v § 8e).