4. HODNOST MATICE A DETERMINANTU.

Z matice $\|a_{ik}\|$; $i = 1, 2, \ldots, m$, $k = 1, 2, \ldots, n$ o m řádcích a n sloupcích lze tvořiti determinanty tím způsobem, že je zbudujeme z prvků společných libovolným r řádkům a libovolným r sloupcům té matice. Takových determinantů r-řadových lze v dané matici nalézti celkem $\binom{m}{r} \cdot \binom{n}{r}$. V souvislosti s nimi pak zavádíme číslo nejvýš důležité v theorii matic i determinantů, t. zv. *hodnost matice.*

Definice 7. *Matice má hodnost h, jsou-li všechny její determinanty více než h-řadové rovny nule, avšak alespoň jeden determinant h-řadový od nuly různý.*

Poznámka. Úplně stejným způsobem definujeme hodnost determinantu pomocí jeho subdeterminantů.

Věta 10. Hodnost matice se nemění, přičteme-li k některé její řadě c-násobek jiné řady s prvou rovnoběžné.

Důkaz. Nechť se jedná v matici $\|a_{ik}\|$ s hodností h o řádek r-tý a s-tý. Nová matice, vzniklá uvedenou změnou, se liší od původní tím, že má v r-tém řádku prvky $a_{r1} + ca_{s1}$, $a_{r2} + ca_{s2}, \ldots, a_{rn} + ca_{sn}$ místo $a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{rn}$. Obě matice mají společné všechny $(h + 1)$-řadové determinanty, které neobsahují prvky řádku r-tého; tyto jsou tedy nulové i v matici nové. Ony $(h + 1)$-řadové determinanty, které obsahují prvky řádky r-té, se rozpadají buď každý na součet dvou $(h + 1)$-řadových (a tedy nulových) determinantů matice původní, nebo na součet $(h + 1)$-řadového determinantu původní matice (ten je proto nulový), a determinantu $(h + 1)$-řadového, který má dva řádky stejné a je proto také nulový. Jsou tedy všechny $(h + 1)$-řadové determinanty pozměněné matice rovny nule a její hodnost není větší, než h, t. j. než hodnost matice původní.

Protože pak je $a_{r\nu} = (a_{r\nu} + ca_{s\nu}) - ca_{s\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, lze si původní matici představiti jako vzniklší z nové toutéž změnou, o jaké mluví věta 10. a proto není její hodnost větší, než hodnost matice nové. Jsou tedy obě hodnosti opravdu stejné, jak tvrdí věta 10.

Poznámka. Platnost věty 10. lze zřejmě rozšířit v tom smyslu, že lze k libovolné řadě matice bez vlivu na její hodnost přičíst každou lineární kombinaci jiných řad rovnoběžných.

Věta 11. Změna počtu řad matice připojením nebo vynecháním řady, která je lineární kombinací jiných řad rovnoběžných, nemá vlivu na její hodnost.

Věta je téměř samozřejmá pro případ, že připojená řada je nulová (rozmyslete si věc podrobně!); připojíme-li však k dané matici $\boldsymbol{M}$ řadu, která je lineární kombinací jiných rovnoběžných řad, lze matici $\boldsymbol{M}_1$ tak vzniklou změnit ve smyslu poznámky k větě 10. tak, že nová matice $\boldsymbol{M}_2$ má tutéž hodnost jako $\boldsymbol{M}_1$ a liší se od $\boldsymbol{M}$ pouze tím, že obsahuje o nulovou řadu více. Je tedy hodnost matice $\boldsymbol{M}_2$ rovna hodnosti matice $\boldsymbol{M}$ a zároveň (jak už pověděno) hodnosti matice $\boldsymbol{M}_1$, takže obě matice: původní $\boldsymbol{M}$ a nová $\boldsymbol{M}_1$ mají vskutku stejnou hodnost, jak praví věta 11.