

Determinanty a matice v teorii a praxi

4. Hodnota matice a determinantu

In: Václav Vodička (author): Determinanty a matice v teorii a praxi. Část první. (Czech).
Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1950. pp. 23–24.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/403273>

Terms of use:

© Jednota československých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

4. HODNOST MATICE A DETERMINANTU.

Z matice $\|a_{ik}\|$; $i = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, n$ o m řádcích a n sloupcích lze tvořiti determinanty tím způsobem, že je zbudujeme z prvků společných libovolným r řádkům a libovolným r sloupcům té matice. Takových determinantů r -řadových lze v dané matici nalézt celkem $\binom{m}{r} \cdot \binom{n}{r}$. V souvislosti s nimi pak zavádíme číslo nejvýš důležité v theorii matic i determinantů, t. zv. *hodnost matice*.

Definice 7. Matice má hodnost h , jsou-li všechny její determinanty více než h -řadové rovny nule, avšak alespoň jeden determinant h -řadový od nuly různý.

Poznámka. Úplně stejným způsobem definujeme hodnost determinantu pomocí jeho subdeterminantů.

Věta 10. Hodnost matice se nemění, přičteme-li k některé její řadě c -násobek jiné řady s prvou rovnoběžné.

Důkaz. Nechť se jedná v matici $\|a_{ik}\|$ s hodností h o řádek r -tý a s -tý. Nová matice, vzniklá uvedenou změnou, se liší od původní tím, že má v r -tém řádku prvky $a_{r1} + ca_{s1}$, $a_{r2} + ca_{s2}$, ..., $a_{rn} + ca_{sn}$ místo a_{r1} , a_{r2} , ..., a_{rn} . Obě matice mají společné všechny $(h + 1)$ -řadové determinanty, které neobsahují prvky řádku r -tého; tyto jsou tedy nulové i v matici nové. Ony $(h + 1)$ -řadové determinanty, které obsahují prvky řádky r -té, se rozpadají buď každý na součet dvou $(h + 1)$ -řadových (a tedy nulových) determinantů matice původní, nebo na součet $(h + 1)$ -řadového determinantu původní matice (ten je proto nulový), a determinantu $(h + 1)$ -řadového, který má dva řádky stejné a je proto také nulový. Jsou tedy všechny $(h + 1)$ -řadové determinanty pozměněné matice rovny nule a její hodnost není větší, než h , t. j. než hodnost matice původní.

Protože pak je $a_{rv} = (a_{rv} + ca_{sv}) - ca_{sv}$ ($v = 1, 2, \dots, n$), lze si původní matici představit jako vznikší z nové toutéž změnou, o jaké mluví věta 10. a proto není její hodnota větší, než hodnota matice nové. Jsou tedy obě hodnoty opravdu stejné, jak tvrdí věta 10.

Poznámka. Platnost věty 10. lze zřejmě rozšířit v tom smyslu, že lze k libovolné řadě matice bez vlivu na její hodnotu přičíst každou lineární kombinaci jiných řad rovnoběžných.

Věta 11. Změna počtu řad matice připojením nebo vynecháním řady, která je lineární kombinací jiných řad rovnoběžných, nemá vlivu na její hodnotu.

Věta je téměř samozřejmá pro případ, že připojená řada je nulová (rozmyslete si věc podrobně!); připojíme-li však k dané matici \mathbf{M} řadu, která je lineární kombinací jiných rovnoběžných řad, lze matici \mathbf{M}_1 tak vzniklou změnit ve smyslu poznámky k větě 10. tak, že nová matice \mathbf{M}_2 má tutéž hodnotu jako \mathbf{M}_1 a liší se od \mathbf{M} pouze tím, že obsahuje o nulovou řadu více. Je tedy hodnota matice \mathbf{M}_2 rovna hodnotě matice \mathbf{M} a zároveň (jak už pověděno) hodnotě matice \mathbf{M}_1 , takže obě matice: původní \mathbf{M} a nová \mathbf{M}_1 mají vskutku stejnou hodnotu, jak praví věta 11.