# Počítání s neúplnými čísly

## II. Jednoduché početní výkony

In: Karel Hruša (author): Počítání s neúplnými čísly. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fysiků, 1949. pp. 15–29.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/403248

# II. JEDNODUCHÉ POČETNÍ VÝKONY

**4. Sčítání.** Je-li dáno několik neúplných čísel a provedeme-li s nimi nějaký početní výkon, je výsledkem zase neúplné číslo. Jde nám nyní o to, abychom výsledek sevřeli do určitých mezí, čili abychom stanovili neúplné číslo, jež určuje výsledek tohoto výkonu. Proto si všimneme nejprve jednotlivých základních početních výkonů podrobně.

Nechť jsou dána dvě čísla, jejichž přesné hodnoty jsou $A$, $B$, svými středními aproximacemi $a$, $b$ a horními hranicemi prostých chyb $\alpha$, $\beta$. Součet obou čísel je $A + B$, za střední aproximaci tohoto součtu zvolíme výraz $a + b$, t. j. součet středních aproximací obou sčítanců. Pak je prostá chyba součtu dána výrazem

$$(A + B) - (a + b),$$

podle definice prosté chyby uvedené v odst. 2. O horních hranicích prostých chyb sčítanců platí

$$|A - a| \leqq \alpha, \quad |B - b| \leqq \beta.$$

Podle známé věty o absolutní hodnotě součtu je

$$|(A + B) - (a + b)| = |(A - a) + (B - b)| \leqq |A - a| + \\ + |B - b| \leqq \alpha + \beta.$$

To značí: *absolutní hodnota prosté chyby součtu dvou sčítanců je menší nebo nejvýše rovna součtu horních hranic prostých chyb obou sčítanců*; můžeme tedy tento součet horních hranic prostých chyb obou sčítanců prohlásiti za horní hranici prosté chyby součtu.

*Příklad.* Je-li $\sqrt{2} \doteq 1{,}4142$, $\sqrt{3} \doteq 1{,}7321$, čili obšírněji $\sqrt{2} = 1{,}4142 \pm 5 \,.\, 10^{-5}$, $\sqrt{3} = 1{,}7321 \pm 5 \,.\, 10^{-5}$, je $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3{,}1463 \pm 10^{-4}$, neboť $5 \,.\, 10^{-5} + 5 \,.\, 10^{-5} = 10^{-4}$. To je v souhlasu s tím, co bylo vyšetřeno v odst. **1**, kde jsme nalezli, že $3{,}14625 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3{,}14627$.

Nalezený výsledek lze bez obtíží rozšířiti na součet většího počtu sčítanců. Zvolíme-li za střední aproximaci součtu opět součet středních aproximací sčítanců, můžeme tvrditi, že horní hranice prosté chyby součtu libovolného počtu sčítanců je nejvýš rovna součtu horních hranic prostých chyb daných sčítanců. Důkaz provedeme úplnou indukcí.

(1) Předpokládejme, že věta platí pro $n$ sčítanců $A = a \pm \alpha$, $B = b \pm \beta, \ldots, M = m \pm \mu$. Součet jejich přesných hodnot označme $S = A + B + \ldots + M$, střední aproximaci tohoto součtu označme $s = a + b + \ldots + m$. O horní hranici $\sigma$ prosté chyby součtu $S$ platí podle předpokladu $\sigma \leqq \alpha + \beta + \ldots + \mu$. Přidáme-li dalšího sčítance $T = t \pm \tau$, je podle právě dokázaného $|(S + T) - (s + t)| \leqq \sigma + \tau$, čili

$$|(A + B + \ldots + M + T) - (a + b + \ldots + m + t)| \leqq \\ \leqq \alpha + \beta + \ldots + \mu + \tau,$$

takže věta platí i pro součet $n + 1$ sčítanců.

(2) Protože věta platí pro dva sčítance (důkaz viz výše), platí podle bodu (1) i pro tři; protože platí pro tři, platí i pro čtyři, atd. bez jakéhokoli omezení.

Všimněme si ještě horní hranice poměrné chyby součtu dvou sčítanců, při čemž se omezíme na poměrnou chybu součtu třeba vzhledem k jeho střední aproximaci. Ta je podle odst. 2 a podle předcházejícího dána výrazem

$$\frac{\alpha + \beta}{a + b}.$$

Budeme předpokládati, že

$$\frac{\alpha}{a} \geqq \frac{\beta}{b}.$$

Kdyby tomu tak nebylo, lze pořádek obou sčítanců zaměniti. Z toho plyne $\alpha b \geqq \beta a$ (čísla $a, b$ jsou kladná podle úmluvy učiněné v odst. 2). Pak ale také

$$\alpha a + \alpha b \geqq \alpha a + \beta a \text{ a zároveň } \alpha b + \beta b \geqq \beta a + \beta b.$$

Z těchto nerovností však plyne

$$\frac{\alpha}{a} \geqq \frac{\alpha + \beta}{a + b} \geqq \frac{\beta}{b}.$$

Mimo to je

$$\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha + \beta}{a + b} = \frac{\alpha b - \beta a}{a + b} \cdot \frac{1}{a}, \quad \frac{\alpha + \beta}{a + b} - \frac{\beta}{b} = \frac{\alpha b - \beta a}{a + b} \cdot \frac{1}{b},$$

takže za předpokladu $\alpha b > \beta a$ ze vztahu

$$\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha + \beta}{a + b} \gtreqless \frac{\alpha + \beta}{a + b} - \frac{\beta}{b}$$

vyplývá, že $b \gtreqless a$. Můžeme tedy vysloviti o horních hranicích poměrných chyb vzhledem ke středním aproximacím tuto větu: *Jsou-li horní hranice poměrných chyb obou sčítanců navzájem rovny, jsou také rovny horní hranici poměrné chyby součtu; jestliže však horní hranice poměrných chyb obou sčítanců jsou navzájem různé, leží horní hranice poměrné chyby součtu co do velikosti mezi oběma, a to blíže k horní hranici poměrné chyby toho čísla, jehož střední aproximace je větší.*

*Příklad.* Součet dvou úseček, jejichž délky jsou udány neúplnými čísly $(52{,}35 \pm 0{,}05)$ cm a $(5{,}26 \pm 0{,}02)$ cm je $(57{,}61 \pm 0{,}07)$ cm. Horní hranice jeho poměrné chyby je $0{,}07 : 57{,}61 \doteq 0{,}0012$, kdežto horní hranice poměrných chyb sčítanců jsou $0{,}05 : 52{,}35 \doteq 0{,}0010$ a $0{,}02 : 5{,}26 \doteq$ $\doteq 0{,}0038$. Skutečně je horní hranice poměrné chyby součtu blíže horní hranice poměrné chyby většího sčítance.

*Cvičení.* **5.** Dokažte a vyslovte větu o horní hranici poměrné chyby součtu vzhledem k jeho dolní (horní) aproximaci, zcela obdobnou k větě vyslovené na konci tohoto odstavce o horní hranici poměrné chyby součtu vzhledem k jeho střední aproximaci. — [Ve výpočtu stačí místo $a$, $b$ položiti $a - \alpha$, $b - \beta$, příp. $a + \alpha$, $b + \beta$.]

**6.** Dokažte větu: Horní hranice poměrné chyby součtu libovolného počtu sčítanců je větší než horní hranice poměrné chyby sčítance nejpřesnějšího a menší než horní hranice poměrné chyby sčítance nejméně přesného. Přitom jest bráti všechny horní hranice poměrných chyb současně buď vzhledem ke střední nebo k dolní nebo k horní aproximaci.

**5. Odčítání.** Obdobně jako u součtu budeme za střední aproximaci rozdílu dvou neúplných čísel volit rozdíl středních aproximací obou daných čísel. Jsou-li dána čísla $A = a \pm \alpha$, $B = b \pm \beta$, jejich rozdíl $A - B$ má střední aproximaci $a - b$, takže prostá chyba rozdílu je

$$(A - B) - (a - b).$$

Pak absolutní hodnota této chyby

$$|(A - B) - (a - b)| = |(A - a) - (B - b)| \leqq |A - a| + \\ + |B - b| \leqq \alpha + \beta.$$

*Absolutní hodnota prosté chyby rozdílu není větší než součet horních hranic prostých chyb menšence a menšitele*, takže tento součet horních hranic lze považovati za horní hranici prosté chyby rozdílu.

Jde-li o algebraický součet většího počtu členů (z nichž některé mají znaménko + a některé —), je horní hranice jeho prosté chyby také rovna součtu horních hranic prostých chyb jednotlivých členů, neboť lze v něm nejprve sečísti všecky členy se znaménkem + a pak všecky členy se znaménkem — a daný výraz je pak rozdílem dvou součtů. Pro rozdíl platí právě dokázaná věta, ale táž věta platí podle odst. 4 i pro oba součty.

Horní hranice poměrné chyby rozdílu vzhledem k jeho střední aproximaci je

$$\frac{\alpha + \beta}{a - b}.$$

Ta je na prvý pohled větší než horní hranice poměrné chyby menšence vzhledem k jeho střední aproximaci, neboť je vždy

$$\frac{\alpha + \beta}{a - b} > \frac{\alpha}{a}$$

a může nabýti značně velkých hodnot, zejména tehdy, je-li rozdíl středních aproximací menšence a menšitele dosti malý. Proto se doporučuje zařídit měření pokud možno tak, aby nebylo třeba odčítati dvě neúplná čísla, jež se navzájem liší jen nepatrně.

*Příklad.* Pro $\sqrt{3} = 1{,}7321 \pm 5 \,.\, 10^{-5}$, $\sqrt{2} = 1{,}4142 \pm$ $\pm\, 5 \,.\, 10^{-5}$ dostáváme $\sqrt{3} - \sqrt{2} = 0{,}3179 \pm 10^{-4}$. Horní hranice poměrné chyby rozdílu je $0{,}0001 : 0{,}3179 \doteq 0{,}00031$, kdežto horní hranice poměrné chyby menšence je jen asi $5 \,.\, 10^{-5} : 1{,}7321 < 3 \,.\, 10^{-5}$ a menšitele $5 \,.\, 10^{-5} : 1{,}4142 <$ $< 4 \,.\, 10^{-5}$.

*Cvičení.* **7.** Tlouštka stěn válcové nádoby byla měřena jednak přímo, jednak tak, že byl změřen vnější a vnitřní průměr. Při každém použití měřítka jest počítati s touž horní hranicí prosté chyby $\alpha$. Porovnejte horní hranice poměrné chyby obou měření vzhledem k jejich střední aproximaci. — [Jsou stejné $\alpha : a$, kde $a$ je tlouštka stěny.]

**8.** Dokažte správnost vět: a) Horní hranice poměrné chyby rozdílu vzhledem k jeho dolní (horní) aproximaci je vždy větší než horní hranice poměrné chyby menšence vzhledem k jeho dolní (horní) aproximaci. b) Horní hranice poměrné chyby rozdílu vzhledem k jeho dolní (horní) aproximaci je větší než horní hranice poměrné chyby menšitele vzhledem k jeho dolní (horní) aproximaci tehdy a jen tehdy, je-li horní hranice poměrné chyby rozdílu vzhledem k jeho střední aproximaci větší než horní hranice poměrné chyby menšitele vzhledem k jeho střední aproximaci.

**6. Násobení.** Při násobení za střední aproximaci součinu neúplných čísel zvolíme součin středních aproximací činitelů. Jsou-li dány dva činitelé $A = a \pm \alpha$, $B = b \pm \beta$, kde $\alpha > 0$, $\beta > 0$, jejich součin $AB$ má podle toho střední aproximaci $ab$ a prostá chyba součinu je $AB - ab$. Ježto je

$$AB - ab = (A - a)b + a(B - b) + (A - a)(B - b),$$

jak se snadno přesvědčíme, provedeme-li naznačená násobení, je také

$$|AB - ab| \leq |A - a|\, b + a\, |B - b| + \\ + |A - a| \,.\, |B - b| \leq \alpha b + a\beta + \alpha\beta.$$

Napsaná nerovnost bude však tím spíše splněna, přidáme-li na pravou stranu kladné číslo $\alpha\beta$, takže lze psát

$$|AB - ab| < \alpha(b + \beta) + (a + \alpha)\beta.$$

Podle toho *prostá chyba součinu je menší než součet dvou čísel, která vzniknou, násobíme-li horní hranici prosté chyby jednoho činitele horní aproximací druhého činitele.* Proto budeme takto utvořený výraz pokládati za horní hranici prosté chyby součinu.

*Příklad.* Počítáme-li výraz $\sqrt{2} \,.\, \pi$ ze zaokrouhlených hodnot $\sqrt{2} \doteq 1{,}4142$, $\pi \doteq 3{,}1416$, vyjde střední aproximace součinu zaokrouhlená na pět desetinných míst 4,44285. Horní hranice prosté chyby je podle toho, co jsme právě uvedli, rovna výrazu $5 \,.\, 10^{-5} \,.\, 3{,}14165 + 5 \,.\, 10^{-5} \,.\, 1{,}41425 \doteq$ $\doteq 5 \,.\, 10^{-5} \,.\, 4{,}5559 \doteq 23 \,.\, 10^{-5}$. Je tedy $\sqrt{2} \,.\, \pi = 4{,}44285 \pm$ $\pm\, 23 \,.\, 10^{-5}$.

V praxi ovšem počítáme horní hranici prosté chyby ze zaokrouhlených horních aproximací činitelů, jež však jsou zpravidla rovny jejich zaokrouhleným středním aproximacím, takže za horní hranici prosté chyby bereme nejčastěji výraz

$$\alpha b + a\beta,$$

který zaokrouhlíme vzestupně. V našem případě vyjde táž hodnota $23 \,.\, 10^{-5}$.

Za horní aproximaci součinu čísel $A = a \pm \alpha$, $B = b \pm \beta$, lze považovati výraz $(a + \alpha)(b + \beta)$, neboť je to největší možná hodnota, jíž může nabýt součin dvou čísel z intervalů $[a - \alpha, a + \alpha]$ a $[b - \beta, b + \beta]$. Jednoduchý výraz dostaneme, budeme-li počítati poměrnou chybu součinu vzhledem k této horní aproximaci. Vyjde

$$\frac{|AB - ab|}{(a + \alpha)(b + \beta)} < \frac{\alpha}{a + \alpha} + \frac{\beta}{b + \beta} < \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b}.$$

Podle toho *poměrná chyba součinu vzhledem k horní aproximaci je menší než součet horních hranic poměrných chyb činitelů vzhledem k jejich horním aproximacím a je také menší než součet horních hranic poměrných chyb činitelů vzhledem k jejich aproximacím středním.* Ježto však v praxi počítáme horní hranice poměrných chyb jen ze zaokrouhlených hodnot, lze při praktických výpočtech nalezené číslo považovati za horní hranici poměrné chyby součinu vzhledem k jeho střední aproximaci a počítati je jako součet horních hranic poměrné chyby činitelů vzhledem k jejich středním aproximacím.

V příkladě svrchu uvedeném horní hranice poměrné chyby čísla $\sqrt{2}$ je $5 \cdot 10^{-5} : \sqrt{2} \doteq 3{,}54 \cdot 10^{-5}$ a horní hranice poměrné chyby čísla $\pi$ je $5 \cdot 10^{-5} : \pi \doteq 1{,}59 \cdot 10^{-5}$, takže horní hranice poměrné chyby součinu je $3{,}54 \cdot 10^{-5} + 1{,}59 \cdot 10^{-5} = 5{,}13 \cdot 10^{-5}$. Odtud můžeme zjistit horní hranici prosté chyby součinu jako výraz $5{,}13 \cdot 10^{-5} \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \doteq 23 \cdot 10^{-5}$ v souhlase s výpočtem předešlým. Horní hranici prosté chyby součinu vypočteme z horních hranic poměrných chyb činitelů velice pohodlně, použijeme-li ke všem těmto výpočtům logaritmického pravítka. Jeho přesnost při všech výpočtech tohoto druhu zcela postačí, neboť vždy jde jen o hodnoty zaokrouhlené na několik málo cifer.

Nalezený výsledek lze rozšířiti na součin libovolného počtu činitelů podobně, jako jsme to udělali při součtu.

(1) Předpokládejme, že pro součin $S$ $n$ čísel $A = a \pm \alpha$, $B = b \pm \beta, \ldots, M = m \pm \mu$, jehož střední aproximace je $s = ab \ldots m$ a horní aproximace je $s_2 = (a + \alpha)(b + \beta) \ldots \ldots (m + \mu)$, platí

$$\frac{|S - s|}{s_2} < \frac{\sigma}{s_2} = \frac{\alpha}{a + \alpha} + \frac{\beta}{b + \beta} + \ldots + \frac{\mu}{m + \mu}$$

a přidejme k němu dalšího činitele $T = t \pm \tau$. Horní hranice poměrné chyby součinu $ST$ vzhledem k jeho horní aproximaci je

$$\frac{|ST - st|}{s_2(t + \tau)} < \frac{\sigma}{s_2} + \frac{\tau}{t + \tau} = \frac{\alpha}{a + \alpha} + \frac{\beta}{b + \beta} + \ldots + \frac{\mu}{m + \mu} + \frac{\tau}{t + \tau},$$

takže nalezená věta platí i pro součin $n + 1$ činitelů.

(2) Poněvadž věta platí pro dva činitele, platí podle bodu (1) také pro tři; protože platí pro tři, platí i pro čtyři atd. bez omezení.

Jestliže v součinu $n$ činitelů $AB \dots M$ je $A = B = \dots = M$, dostáváme odtud ihned, že horní hranice poměrné chyby $n$-té mocniny čísla $A = a \pm \alpha$ vzhledem k její horní aproximaci je rovna $n$-násobné horní hranici poměrné chyby mocněnce vzhledem k jeho horní aproximaci, t. j. $n\alpha :$ $: (a + \alpha)$. Násobíme-li horní aproximací této mocniny, t. j. číslem $(a + \alpha)^n$, shledáme, že pro prostou chybu mocniny s mocnitelem celým a kladným platí

$$|A^n - a^n| < n\alpha(a + \alpha)^{n-1}.$$

Poznámka. Součin dvou neúplných čísel $A = a \pm \alpha$, $B = b \pm \beta$ lze stanoviti také takto: Dolní aproximace tohoto součinu je $c_1 =$ $= (a - \alpha)(b - \beta)$, jeho horní aproximace je $c_2 = (a + \alpha)(b + \beta)$, takže součin obou čísel lze vyjádřiti intervalem $[c_1, c_2]$. Tu jsme volili za střední aproximaci součinu číslo $c = \frac{1}{2}(c_1 + c_2) = ab + \alpha\beta$ a za horní hranici jeho prosté chyby číslo $\gamma = \frac{1}{2}(c_2 - c_1) = \alpha b + a\beta$. Pak je horní hranice poměrné chyby součinu vzhledem k jeho střední aproximaci

$$\frac{\gamma}{c} = \frac{\alpha b + a\beta}{ab + \alpha\beta} \leqq \frac{\alpha b + a\beta}{ab} = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b}.$$

Rovnost nastane, je-li jeden z činitelů dán přesně.

*Cvičení.* **9.** Jestliže horní hranice prosté chyby každého ze dvou činitelů je menší než $\varepsilon$ jednotek stojících na $p$-tém místě toho činitele (počítáno zleva) a je-li řád nejvyšší číslice součinu roven součtu řádů nejvyšších číslic činitelů, je horní hranice prosté chyby součinu menší než $\varepsilon(a_0 + b_0 + 2)$ jednotek stojících na $p$-tém místě součinu (opět počítáno zleva); je-li však řád nejvyšší číslice součinu vyšší než součet řádů nejvyšších číslic činitelů, je horní hranice prosté chyby součinu menší než $0{,}1 \,.\, \varepsilon(a_0 + b_0 + 2)$ jednotek stojících na $p$-tém místě součinu; přitom $a_0$, $b_0$ jsou nejvyšší číslice obou činitelů. Dokažte! — [Jsou-li $r$, $s$ řády nejvyšších číslic činitelů, je $\alpha < \varepsilon \,.\, 10^{r-p+1}$, $\beta < \varepsilon \,.\, 10^{s-p+1}$, při čemž lze předpokládati, že $a < (a_0 + 1) \,.\, 10^r$, $b < (b_0 + 1) \,.\, 10^s$.]

**10.** K tomu, aby horní hranice prosté chyby součinu dvou činitelů nepřesáhla $\varepsilon$ jednotek $p$-tého místa (počítáno zleva), stačí, aby horní hranice prosté chyby činitelů nebyla větší než $\varepsilon : (a_0 + b_0 + 2)$

jednotek $p$-tého místa (počítáno zleva), je-li řád nejvyšší číslice součinu roven součtu řádů nejvyšších číslic činitelů, a $10\varepsilon : (a_0 + b_0 + 2)$ jednotek $p$-tého místa, je-li řád nejvyšší číslice součinu větší než součet řádů nejvyšších číslic činitelů. Přitom $a_0$, $b_0$ značí nejvyšší číslice činitelů.

**11.** K tomu, aby součin dvou zaokrouhlených čísel zaokrouhlený na $p$ cifer se v těchto $p$ cifrách shodoval s přesným výsledkem zaokrouhleným rovněž na $p$ cifer (nejvýše s výjimkou, kdy první vynechaná číslice je čtyrka nebo pětka — viz cvič. **8**), stačí součin počítati z činitelů zaokrouhlených na $p + 2$ cifry, je-li řád nejvyšší číslice součinu roven součtu řádů nejvyšších číslic činitelů, a na $p + 1$ cifru, je-li řád nejvyšší číslice součinu větší než součet řádů nejvyšších číslic činitelů.

**7. Dělení.** Také při dělení dvou neúplných čísel budeme za střední aproximaci podílu voliti podíl střední aproximace dělence a střední aproximace dělitele. Je-li dělenec $A = a \pm \alpha$ a dělitel $B = b \pm \beta$, jejich podíl má střední aproximaci $\frac{a}{b}$ a prostou chybu $\frac{A}{B} - \frac{a}{b}$. Dále je

$$\left|\frac{A}{B} - \frac{a}{b}\right| = \frac{|Ab - aB|}{Bb} = \frac{|(A - a)b - a(B - b)|}{Bb}.$$

Ježto $|(A - a)b - a(B - b)| \leqq |A - a|b + a|B - b| \leqq \alpha b + a\beta$ a $B \geqq b - \beta$, je

$$\left|\frac{A}{B} - \frac{a}{b}\right| \leqq \frac{\alpha b + a\beta}{(b - \beta)b}.$$

Násobíme-li pravou stranu činitelem $\frac{a + \alpha}{a}$, který není menší než 1, nezmenšíme ji, a proto bude platit tím spíše

$$\left|\frac{A}{B} - \frac{a}{b}\right| \leqq \frac{\alpha b + a\beta}{ab} \cdot \frac{a + \alpha}{b - \beta}.$$

Podle toho horní hranice prosté chyby podílu není větší než nalezený výraz. Rovnost může nastati jen tehdy, je-li dělenec dán přesně a je-li přesná hodnota dělitele rovna své dolní aproximaci. Tento neobvyklý případ můžeme ze svých úvah vyloučiti.

Výsledek nabude na přehlednosti, uvědomíme-li si, že $(a + \alpha) : (b - \beta)$ je největší možná hodnota, které může dosáhnouti podíl, jehož dělenec je obsažen v intervalu $[a - \alpha, a + \alpha]$ a dělitel v intervalu $[b - \beta, b + \beta]$. Je to tedy horní aproximace podílu $A : B$. Odtud plyne, že

$$\left|\frac{A}{B} - \frac{a}{b}\right| : \frac{a + \alpha}{b - \beta} < \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b},$$

takže dostáváme větu: *Poměrná chyba podílu vzhledem k jeho horní aproximaci je menší než součet horních hranic poměrné chyby dělence i dělitele vzhledem k jejich středním aproximacím.**)

V praxi, kde se počítají horní hranice poměrné chyby zaokrouhlené jen na několik málo číslic, se ovšem poměrná chyba vzhledem k horní aproximaci opět neliší od poměrné chyby vzhledem k střední aproximaci.

*Příklad.* Počítejme chybu podílu $\sqrt{2} : \pi$ z hodnot $\sqrt{2} \doteq 1{,}4142$, $\pi \doteq 3{,}1416$. Střední aproximace podílu je $1{,}4142 : 3{,}1416 \doteq 0{,}450153$. Pro horní hranici poměrné chyby vyjde podle příkladu v odst. 6 týž výraz jako při násobení, t. j. $5{,}13 \,.\, 10^{-5}$. Je tedy horní hranice prosté chyby podílu rovna

$$5{,}13 \,.\, 10^{-5} \,.\, \frac{\sqrt{2}}{\pi} \doteq 2{,}3 \,.\, 10^{-5}, \text{ takže } \frac{\sqrt{2}}{\pi} = 0{,}450153 \pm 23 \,.\, 10^{-6}.$$

Je-li ve zvl. případě $\alpha = 0$, $A = a = 1$, je

$$\left|\frac{1}{B} - \frac{1}{b}\right| : \frac{1}{b - \beta} < \frac{\beta}{b},$$

t. j. poměrná chyba převrácené hodnoty neúplného čísla vzhledem k její horní aproximaci je menší než horní hranice poměrné chyby původní hodnoty vzhledem k její střední aproximaci.

Chceme-li vyšetřit poměrnou chybu složitějšího výrazu $\dfrac{A \,.\, B \,.\, C \ldots}{P \,.\, R \,.\, S \ldots}$, kde $A = a \pm \alpha$, $B = b \pm \beta$, $C = c \pm \gamma, \ldots$,

*) Na tuto formulaci věty o poměrné chybě podílu mě upozornil p. prof. Dr. *Vl. Knichal*, jemuž za to srdečně děkuji.

$P = p \pm \pi$, $R = r \pm \varrho$, $S = s \pm \sigma, \ldots$, stačí jej přepsati do tvaru součinu $A \,.\, B \,.\, C \ldots \dfrac{1}{P} \cdot \dfrac{1}{R} \cdot \dfrac{1}{S} \ldots$ a pak podle věty o poměrné chybě součinu většího počtu činitelů poměrná chyba daného výrazu vzhledem k jeho horní aproximaci je menší než součet

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \ldots + \frac{\pi}{p} + \frac{\varrho}{r} + \frac{\sigma}{s} + \ldots .$$

Je-li konečně $A = B = C = \ldots = 1$, $P = R = S = \ldots$, t. j. jde-li o výraz $1 : P^n = P^{-n}$, dostáváme odtud, že jeho poměrná chyba vzhledem k horní aproximaci je menší než $n\pi : p$. Násobíme-li horní aproximací výrazu $P^{-n}$, t. j. číslem $(p - \pi)^{-n}$, vychází pro odhad absolutní hodnoty prosté chyby mocniny se záporným celým mocnitelem

$$|P^{-n} - p^{-n}| < \frac{n\pi}{p} (p - \pi)^{-n} < n\pi(p - \pi)^{-n-1} .$$

Poznámka. Podíl $A : B$ dvou neúplných čísel $A = a \pm \alpha$, $B = b \pm \beta$ lze stanoviti také takto: Dolní aproximace tohoto podílu je $c_1 = \dfrac{a - \alpha}{b + \beta}$, jeho horní aproximace je $c_2 = \dfrac{a + \alpha}{b - \beta}$, takže podíl obou čísel lze vyjádřiti intervalem $[c_1, c_2]$. Tu jsme volili za střední aproximaci podílu číslo $c = \frac{1}{2}(c_1 + c_2) = \dfrac{ab + \alpha\beta}{b^2 - \beta^2}$ a za horní hranici jeho prosté chyby číslo $\gamma = \frac{1}{2}(c_2 - c_1) = \dfrac{\alpha b + a\beta}{b^2 - \beta^2}$. Pak je horní hranice poměrné chyby podílu vzhledem k jeho střední aproximaci

$$\frac{\gamma}{c} = \frac{\alpha b + a\beta}{ab + \alpha\beta} \leqq \frac{\alpha b + a\beta}{ab} = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} .$$

Rovnost nastane, je-li dělenec nebo dělitel dán přesně.

*Cvičení* **12.** Horní hranice poměrné chyby převrácené hodnoty čísla zaokrouhleného na $p$ číslic je menší než $5 \,.\, 10^{-p} : a_0$, kde $a_0$ je nejvyšší číslice daného čísla od nuly různá. Dokažte!

**13.** Dělíme-li spolu dvě zaokrouhlená čísla, z nichž méně přesné má $p$ číslic, a je-li řád nejvyšší číslice podílu roven rozdílu řádu nejvyšší číslice dělence a řádu nejvyšší číslice dělitele, shoduje se vzniklý podíl zaokrouhlený na $p - 2$ cifry s přesným výsledkem zaokrouhleným rovněž na $p - 2$ cifry; je-li však řád nejvyšší číslice podílu menší než rozdíl řádu nejvyšší číslice dělence a řádu nejvyšší číslice dělitele, shoduje se vzniklý podíl zaokrouhlený na $p - 3$ cifry s přesným výsledkem zaokrouhleným na $p - 3$ cifry. Dokažte! Může nastati výjimka z tohoto pravidla?

**14.** Násobíme-li nebo dělíme-li neúplné číslo číslem přesným, nemění se horní hranice poměrné chyby, naproti tomu horní hranice prosté chyby výsledku je rovna horní hranici prosté chyby daného neúplného čísla násobené nebo dělené daným přesným číslem. Dokažte!

**8. Odmocňování.** Za střední aproximaci $n$-té odmocniny čísla $A = a \pm \alpha$ budeme opět voliti $n$-tou odmocninu střední aproximace odmocněnce, t. j. výraz $\sqrt[n]{a}$.*) Pak platí

$$\left|\sqrt[n]{A} - \sqrt[n]{a}\right| = \frac{|A - a|}{\sqrt[n]{A^{n-1}} + \sqrt[n]{A^{n-2}a} + \sqrt[n]{A^{n-3}a^2} + \ldots + \sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

vzhledem k tomu, že

$$(\sqrt[n]{A} - \sqrt[n]{a})(\sqrt[n]{A^{n-1}} + \sqrt[n]{A^{n-2}a} + \sqrt[n]{A^{n-3}a^2} + \ldots + \sqrt[n]{a^{n-1}}) = \\ = A - a.$$

Ježto však vždy $A \geqq a - \alpha$ a rovněž $a > a - \alpha$, pokud $\alpha > 0$, je jmenovatel vždy větší než $n\sqrt[n]{(a - \alpha)^{n-1}}$, takže platí

$$\left|\sqrt[n]{A} - \sqrt[n]{a}\right| < \frac{\alpha}{n\sqrt[n]{(a - \alpha)^{n-1}}}.$$

Počítáme-li poměrnou chybu vzhledem k dolní aproximaci $\sqrt[n]{a - \alpha}$, dostaneme pro ni výraz menší než $n$-tinu

*) Znakem $\sqrt[n]{a}$, kde $a > 0$, rozumíme kladné číslo $x$, pro které platí $x^n = a$.

poměrné chyby odmocněnce vzhledem k jeho dolní aproximaci, neboť jest

$$\frac{\left|\sqrt[n]{A} - \sqrt[n]{a}\right|}{\sqrt[n]{a-\alpha}} < \frac{\alpha}{n(a-\alpha)}.$$

Poněvadž v praxi zase počítáme poměrnou chybu vždy z hodnot zaokrouhlených, lze napsaný výraz s dostatečnou přesností počítati z horní hranice poměrné chyby vzhledem k zaokrouhlené střední aproximaci.

*Příklad 1.* Počítejme $\sqrt{\pi}$ z hodnoty $\pi \doteq 3{,}1416$. Střední aproximace této odmocniny je 1,772456, poměrná chyba je menší než $5 \,.\, 10^{-5} : 2 \,.\, 3{,}14 \doteq 0{,}8 \,.\, 10^{-5}$, takže $\sqrt{\pi} = 1{,}772456 \pm 8 \,.\, 10^{-6}$.

*Příklad 2.* Vypočteme ještě přeponu $C$ pravoúhlého trojúhelníka, jsou-li dány odvěsny $A = (32{,}5 \pm 0{,}02)$ cm, $B = (16{,}3 \pm 0{,}02)$ cm. Podle věty Pythagorovy je $C = \sqrt{A^2 + B^2}$; střední aproximace tohoto výrazu je $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{32{,}5^2 + 16{,}3^2} = \sqrt{1321{,}94} \doteq 36{,}36$. Abychom odhadli horní hranici prosté chyby, třeba si uvědomiti, že podle odst. 6 je $A^2$ dáno s prostou chybou menší než $2\alpha(a + \alpha)$, $B^2$ je dáno s prostou chybou menší než $2\beta(b + \beta)$, výraz $A^2 + B^2$ lze tedy podle odst. 4 vypočísti s prostou chybou menší než $2\alpha(a + \alpha) + 2\beta(b + \beta)$ a tedy $C$ je podle předcházejícího stanoveno s prostou chybou, jež je menší než

$$\frac{2\alpha(a + \alpha) + 2\beta(b + \beta)}{2\sqrt{(a-\alpha)^2 + (b-\beta)^2}}.$$

Ježto tuto hranici prosté chyby zaokrouhlíme na několik málo míst, lze pro její odhad s dostatečnou přesností vzíti výraz

$$\frac{\alpha a + \beta b}{c} = \frac{0{,}02 \,.\, 48{,}8}{36{,}36} \doteq 0{,}027,$$

což zaokrouhlíme na 0,03. Je tedy $C = (36{,}36 \pm 0{,}03)$ cm.

*Příklad 3.* Podobně lze počítati odvěsnu pravoúhlého trojúhelníka, je-li dána přepona $C = (12{,}25 \pm 0{,}01)$ cm a odvěsna $A = (10{,}40 \pm 0{,}01)$ cm. Obdobně jako v příkladě předcházejícím je $B = \sqrt{C^2 - A^2}$, střední aproximace $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{150{,}0625 - 108{,}16} = \sqrt{41{,}9025} \doteq 6{,}47$. Také tu je $C^2$ dáno s chybou menší než $2\gamma(c + \gamma)$, $A^2$ s chybou menší než $2\alpha(a + \alpha)$, $C^2 - A^2$ s chybou menší než $2\gamma(c + \gamma) + 2\alpha(a + \alpha)$ a $B$ vyjde s chybou menší než

$$\frac{2\gamma(c + \gamma) + 2\alpha(a + \alpha)}{2\sqrt{(c - \gamma)^2 - (a + \alpha)^2}},$$

což lze vzhledem k požadované přesnosti nahraditi výrazem $(\gamma c + \alpha a) : b = 0{,}01 \,.\, 22{,}65 : 6{,}47 \doteq 0{,}04$. Je tedy celkem $B = (6{,}47 \pm 0{,}04)$ cm.

Poznámka. Výpočet v příkladě 3 lze provésti také tak, že výraz $B = \sqrt{C^2 - A^2}$ upravíme na tvar $B = \sqrt{(C + A)(C - A)}$, ale tu třeba při odhadu chyby dát náležitý pozor. Je-li $C$ dáno s prostou chybou menší než $\gamma$, $A$ s prostou chybou menší než $\alpha$, je $C + A$ i $C - A$ dáno s prostou chybou menší než $\alpha + \gamma$, takže bychom mohli být svedeni k domněnce, že horní hranice prosté chyby výrazu $(C + A)(C - A)$ je $(\alpha + \gamma)(c - a + \alpha + \gamma) + (\alpha + \gamma)(c + a + \alpha + \gamma) = 2(\alpha + \gamma) \,.\, (c + \alpha + \gamma)$, což by mohlo být podstatně větší než výraz $2\gamma(c + \gamma) + 2\alpha(a + \alpha)$, který jsme obdrželi při předcházejícím výpočtu, zejména kdyby bylo $c$ značně větší než $a$. Třeba si uvědomit, že prosté chyby výrazů $C + A$ a $C - A$ nejsou navzájem nezávislé, neboť v dvojčlenu $C + A$ se chyba čísla $A$ přičítá, kdežto v dvojčlenu $C - A$ se táž chyba odčítá. Naše vzorce pro odhad chyby však byly odvozeny za předpokladu, že chyby čísel, s nimiž se výpočet provádí, jsou navzájem nezávislé, takže jich k výpočtu uvedeného výrazu v tomto případě použít nelze. V dalším bude odvozena obecná methoda k výpočtu horní hranice chyby, která ukáže, jak lze tuto nesnáz obejíti.

*Cvičení.* **15.** Horní hranice poměrné chyby $n$-té odmocniny čísla zaokrouhleného na $p$ cifer je menší než $5 \,.\, 10^{-p} : na_0$, kde $a_0$ je nejvyšší číslice daného čísla. Dokažte!

**16.** K tomu, aby druhá odmocnina čísla, jehož nejvyšší číslice $a_0$ je řádu $r$-tého, měla horní hranici prosté chyby menší než $\varepsilon$ jednotek $p$-tého místa (počítáno odleva), stačí, aby odmocněnec byl aproximován s horní hranicí prosté chyby menší než $2\varepsilon\sqrt{a_0}$ jednotek stojících na $p$-tém místě (počítáno odleva), je-li $r$ sudé, a $6\varepsilon\sqrt{a_0}$ jednotek $(p+1)$ho místa (opět počítáno odleva), je-li $r$ liché. Dokažte!

**17.** Při pokusu odkapávala kapalina ze silnostěnné kapiláry v kapkách. Bylo zváženo 200 kapek a zjištěno, že váží $(6{,}72 \pm 0{,}01)$g. Hustota kapaliny je $(0{,}845 \pm 0{,}001)$g/cm$^3$. S jakou přesností lze z těchto údajů stanoviti průměr kapky za předpokladu, že jsou všecky kapky stejné? ($\pi \doteq 3{,}1416$.) — [$2r = (0{,}4235 \pm 0{,}0004)$ cm.]