DRUHÁ ČÁST

PŘEHLED DRUHÉ ČÁSTI

Tento přehled má podat čtenáři myšlenkový běh druhé části. U formálně psaných úvah se laikům stává, že vidí sice, že vše klape, dovedou si vše zkontrolovat, ale uniká jim souvislost. Proto nechť si čtenář pročte tento přehled a před čtením každého odstavce druhé části nechť si z přehledu zopakuje vše, co se týká odstavců dřívějších i toho, který hodlá číst.

Po zavedení základních pojmů a označení v odst. 2,1 definují v odst. 2,2 t. zv. *čítání* množin. Některé množiny, t. zv. *spočetné*, je možno čítat po jednom prvku tak, že vycházejíce od jakéhosi prvního prvku čítáme dál a dál nové a nové prvky, až se celá množina vyčerpá. Takovým čítáním se množina uspořádá a to tak, že prvek později čítaný je za prvkem čítaným dříve: věta 2,1. To uspořádání je velmi důležité a je studováno v odst. 2,2.

Při čítání dané množiny se mohou stát dvě věci: Buďto dojdeme k poslednímu prvku anebo nikdy k žádnému poslednímu prvku nedojdeme. V prvním případě říkáme, že naše množina je *konečná*, ve druhém případě je *nekonečná*. Je arciť možno danou množinu čítat všelijak, ale podle věty 4,2 dojdeme-li při *jednom* čítání ke konci, stane se tak při každém jiném čítání také. Při rozhodování, je-li množina konečná, tedy nezáleží nikterak na tom, které čítání jsme si vyvolili.

Odstavec 2,4 obsahuje základní věty o konečných množinách.

Množina N přirozených čísel je nekonečná spočetná množina. Je-li M konečná množina (neprázdná), pak se M dá očíslovat jistou množinou $\mathsf{N}(n)$. [$\mathsf{N}(n)$ je množina všech přirozených čísel až do n včetně.] To n je zcela určeno množinou M a je to počet prvků množiny M. Je-li M nekonečná spočetná, pak se dá očíslovat množinou N, t. j. všemi přirozenými čísly. Je-li dáno jisté čítání množiny M, pak je tím určeno zcela určité očíslování množiny M množinou $N(n)$ či množinou N: věta 5,3. („Čítáním“ žáků ve třídě podle abecedy je už dáno očíslování v katalogu. „Čítáním“ podle velikosti jsou už dána pořadová čísla v tělocviku a pod.) Dále jsou v odst. 2,5 zavedeny početní úkony s přirozenými čísly.

Odstavec 2,6 obsahuje základní věty o spočetných množinách. Na př. součet a kartézský součin spočetných množin je spočetná množina; srovnej odst. 1 a 3 první části.

V sedmém odstavci zavádím kladné zlomky, t. j. kladná racionální čísla. Je jich spočetně mnoho a jsou hustě uspořádána: mezi dvěma kladnými zlomky je vždy ještě jiný kladný zlomek a před a za každým kladným zlomkem je vždy ještě nějaký jiný kladný zlomek. (Srovnej s odst. 1,4.) Mám-li nyní zcela libovolnou spočetnou množinu A, která je uspořádána hustě, pak podle věty 7,3 to vlastně není zase nic jiného než množina kladných zlomků. Prvky množiny A odpovídají úplně kladným zlomkům tak, že se i uspořádání úplně zachová.

Avšak v množině kladných zlomků jsou mezery. Zaplněním těch mezer v odst. 2,8 dostaneme všecka kladná čísla; mezery jsou zaplněny čísly irracionálními. (Srovnej odst. 2,9 první části.) Množina kladných čísel už nemá mezer a obsahuje hustou spočetnou část (totiž kladné zlomky); říkáme, že je to *kontinuum*. A teď přijde důležitá věta 8,5: Je v podstatě jediné kontinuum. Každá dvě kontinua jsou si totiž podobná. A dokonce víc platí. Každé z daných kontinuí C_1 a C_2 obsahuje hustou spočetnou část A_1 a A_2. Teď si část A_1 očíslujeme pomocí části A_2 tak, aby uspořádání množin A_1 a A_2 si při tom očíslování odpovídalo. Pak jsme tím určili *automaticky* jedno zcela určité očíslování celé množiny C_1 množinou C_2 takové, že si uspořádání obou množin zase přesně odpovídají a při tom prvky množiny A_1 jsou očíslovány tak jako dříve (množinou A_2). Pamatujme si tedy, že chceme-li očíslovat kontinuum C_1 kontinuem C_2 (aby se uspořádání zachovalo), stačí se omezit na číslování jakýchsi hustých spočetných částí. To je základ pro očíslování kladných čísel pomocí desetinných rozvojů.

Zavedouce totiž v odst. 2,9 arabské číslice pro označování přirozených čísel, definujeme v odst. 2,10 kladné číslice; na př. číslice pro číslo π začíná 3,14159... Ty číslice tvoří kontinuum C_2. A máme jimi očíslovat kladná čísla, která tvoří kontinuum C_1. K tomu *stačí* očíslovat jistou hustou spočetnou část kontinua C_1 pomocí jisté husté spočetné části A_2 kontinua C_2. A jak to zařídíme, je nasnadě. Je-li d rovno desíti, pak A_1 budou čísla $\frac{a}{d^n}$ a A_2 znaky mající za desetinnou čárkou skoro samé nuly. A na př. číslo $\frac{365}{d^3}$ bude očíslováno znakem 0,365000..., číslo $\frac{87006}{d^2}$ znakem 870,06000 ..., číslo $\frac{30705}{d^7}$ znakem 0,0030705000... Pak už sama sebou jsou všecka kladná čísla očíslována kladnými znaky.

V odst. 2,11 jsou definována reálná čísla (i záporná). Početní úkony jsou zavedeny přímo jen pro racionální čísla. A úkony početní pro reálná čísla se definují pomocí nich. Máme-li na př. sečíst reálná čísla a a b, pak si počínáme takto: Součet $a + b$ nepočítáme přesně. Počítejme s chybou menší než ε, řekněme. To uděláme tak, že si místo a a b vezmeme *racionální* čísla a' a b' a počítáme $a' + b'$. Když čísla a' a b' byla zvolena dostatečně blízká číslům a a b (když se od nich lišila o méně než vhodné δ) pak $a' + b'$ nám aproximuje hledaný součet $a + b$ dostatečně přesně, s chybou menší než ε.

Součet $a + b$ je tím zcela přesně *definován* (cvičení 11,27): žádné jiné číslo se nám nepodaří součty aproximovat *libovolně* přesně. Jedině při počítání součtu $a + b$ možno přípustnou chybu ε zvolit *zcela libovolně malou*. Tak se skutečně sečítá: čísla zaokrouhlíme na vhodný počet cifer a výsledek vyjde s požadovanou přesností (srovnej odst. 1,9).

Odst. 2,12 obsahuje základní věty o kardinálních číslech, najmě v první části chybějící důkaz věty: Je-li $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ a $\mathfrak{b} < \aleph$, pak také $\mathfrak{a} < \aleph$. Z ní plyne: máme-li dokazovat, že množina A má $\mathfrak{a}$ prvků, stačí dokázat dvě věci a to, že A má aspoň $\mathfrak{a}$ prvků a za druhé, že A má nejvýše $\mathfrak{a}$ prvků (t. j. že nemá víc než $\mathfrak{a}$ prvků). Tím způsobem jsme počítali, kolik mají množiny prvků, většinou už v první části.

Každá uspořádaná spojitá množina (bez mezer a bez skoků) obsahuje podle cvičení 8,20 kontinuum. Kontinuum má ale $\aleph$ bodů a tedy každá spojitá množina musí mít aspoň $\aleph$ bodů (cvičení 12,19). Srovnej odst. 9 první části.

Zvláštní postavení má dosud přehlížený odst. 2,3. Obsahuje t. zv. *princip indukce*. Má-li se něco definovat pro všecka přirozená čísla, *stačí* to umět přímo definovat pro jedničku a pak pro každé jiné číslo už jenom za předpokladu, že jsme definici pro všecka menší čísla už provedli. Důležitost toho principu se znova a znova ukazuje v dalších kapitolách. Je to jeden z hlavních principů v matematice.

2,1. Základní pojmy. Základní pojem je *množina*.

Patří-li věc a do množiny A, t. j. je-li a prvek množiny A, píšeme $a \in$ A. Není-li x prvek množiny A, píšeme x non $\in$ A. Dvě množiny A a B jsou si rovny: A $=$ B, když a jen když mají stejné prvky, t. j. z $x \in$ A plyne $x \in$ B a naopak z $x \in$ B plyne $x \in$ A. Jestliže z $x \in$ A plyne $x \in$ B (ať už z $x \in$ B plyne $x \in$ A nebo ne), říkáme, že A je *část* (Teilmenge, sous-ensemble nebo partie, subset) množiny B; píšeme A $\subset$ B. Zvláště A $\subset$ A. Je-li A $\subset$ B a při tom A $\neq$ B (t. j. nikoliv A $=$ B), říkáme, že A je *pravá část* (echte Teilmenge, vrai sous-ensemble n. partie aliquote) množiny B.

Cvičení 1,1. Je-li A $\subset$ B a B $\subset$ C, pak také A $\subset$ C.

1,2. A $=$ B, když a jen když A $\subset$ B a zároveň B $\subset$ A.

Sjednocení čili *součet* A $+$ B množin A a B je množina takto definovaná: $x \in$ A $+$ B znamená, že buďto $x \in$ A anebo

$x \in B$ (anebo obojí zároveň). Obecně nechť $\mathfrak{J}$ je množina, jejíž prvky jsou množiny.

Abychom neříkali „množina množin", říkáme, že $\mathfrak{J}$ je *systém* nebo *třída* množin.

Pak *sjednocení* čili *součet* třídy $\mathfrak{J}$ je množina $\Sigma(\mathfrak{J})$ všech věcí, které patří do některé množiny, po př. do některých množin z třídy $\mathfrak{J}$.

Průnik $A \,.\, B$ čili prostě AB množin A a B je množina takto definovaná: $x \in AB$ znamená, že $x \in A$ a zároveň $x \in B$. Obecně *průnik* $\Pi(\mathfrak{J})$ třídy $\mathfrak{J}$ je množina těch věcí, které patří zároveň do všech množin třídy $\mathfrak{J}$. $A - B$ je množina těch věcí, které patří do A a při tom nepatří do B. $\{a\}$ je množina, jejíž jediný prvek je a, t. j. $x \in \{a\}$ znamená $x = a$.

$\emptyset$ značí t. zv. *prázdnou* množinu, která nemá vůbec prvků. Je-li $AB = \emptyset$, jsou množiny A a B *disjunktní* [(elemente) fremd, disjoint, disjoint n. disjoined n. disjunct].

Cvičení 1,3. Dokažte

$$
\begin{aligned}
(A + B) + C &= A + (B + C),\\
A + B &= B + A,\\
(AB)\, C &= A\, (BC),\\
AB &= BA,\\
A\,(B + C) &= AB + AC,\\
A + BC &= (A + B)(A + C).
\end{aligned}
$$

[Na vzor dokáži poslední rovnici. Máme dokázat dvě věci. Za prvé, že každý prvek levé strany je prvkem pravé strany. Za druhé, že každý prvek pravé strany je prvkem levé strany.

Buď tedy za prvé $x \in A + BC$. Pak buďto $x \in A$ anebo $x \in BC$. V případě $x \in A$ jest $x \in A + B$, jakož i $x \in A + C$, tedy vskutku jest $x \in (A + B)(A + C)$. V případě $x \in BC$ jest $x \in B$ a tedy $x \in A + B$ a zároveň je $x \in C$ a tedy $x \in A + C$, tedy zase $x \in (A + B)(A + C)$.

Nechť za druhé $x \in (A + B)(A + C)$. Pak buďto $x \in A$, v kterémžto případě $x \in A + BC$. Anebo $x \operatorname{non} \in A$. Pak z $x \in \mathsf{A} + \mathsf{B}$ plyne $x \in \mathsf{B}$ a ovšem z $x \in \mathsf{A} + \mathsf{C}$ plyne $x \in \mathsf{C}$, tedy $x \in \mathsf{BC}$, tedy opět $x \in \mathsf{A} + \mathsf{BC}$.]

Dále dokažte: Jsou-li $\mathfrak{J}_1$ a $\mathfrak{J}_2$ třídy množin, pak

$$\Sigma(\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2) = \Sigma(\mathfrak{J}_1) + \Sigma(\mathfrak{J}_2),$$
$$\Sigma\{\mathsf{A}\} = \mathsf{A}.$$

($\{\mathsf{A}\}$ je třída obsahující jenom množinu A.)

Další základní pojem je *uspořádaná dvojice*, stručně *pár* $\{a; b\}$. Má *první člen* a a druhý člen b. Rovnice $\{a; b\} = \{c; d\}$ značí, že $a = c$ a zároveň $b = d$.

Cvičení 1,4. Je-li $a \neq b$ (t. j. nikoliv $a = b$), pak $\{a; b\} \neq \{b; a\}$. Musí se tedy páry $\{a; b\}$ a $\{b; a\}$ dobře rozeznávat.

Množinu všech párů $\{a; b\}$, při čemž $a \in A$ a $b \in B$, označujeme $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$. (Neplést s $\mathsf{A} . \mathsf{B} = \mathsf{AB}$!) Je to t. zv. *kartézský* součin množin A a B.

Cvičení 1,5.
$$\mathsf{A} \times (\mathsf{B} + \mathsf{C}) = \mathsf{A} \times \mathsf{B} + \mathsf{A} \times \mathsf{C}$$
$$\mathsf{A} \times (\mathsf{BC}) = (\mathsf{A} \times \mathsf{B})\, (\mathsf{A} \times \mathsf{C})$$
$$\mathsf{A} \times (\mathsf{B} - \mathsf{C}) = (\mathsf{A} \times \mathsf{B}) - (\mathsf{A} \times \mathsf{C}).$$

Další základní pojem je *zobrazení* množiny A do množiny B (in, dans, onto a part of B). Takové zobrazení f je pravidlo, které *každému* $a \in \mathsf{A}$ přiřazuje zcela určitý prvek $f(a)$ množiny B. $f(\mathsf{C})$ označujeme množinu všech prvků $f(c)$, kde $c \in \mathsf{AC}$. Je-li $f(\mathsf{A}) = \mathsf{B}$, je f zobrazení množiny A *na* B. Jestliže f různým prvkům množiny A přiřazuje různé prvky množiny B t. j. když ze vztahů $a_1 \in \mathsf{A}$, $a_2 \in \mathsf{A}$, $a_1 \neq a_2$ plyne $f(a_1) \neq f(a_2)$, říkáme, že zobrazení f je *prosté n. jednoznačné*. Příkladem prostého zobrazení f množiny A na A je t. zv. zobrazení *identické*, které každému $a \in \mathsf{A}$ přiřazuje zase $a : f(a) = a$.

Cvičení 1,6. $f(\mathsf{C}) = f(\mathsf{AC})$.

1,7. f je zobrazení množiny A na $f(\mathsf{A})$.

1,8. f je zobrazení množiny A na B, když a jen když každý prvek množiny B je přiřazen některému prvku (případně některým prvkům) množiny A.

1,9. f je prosté, když a jen když každý prvek z $f(A)$ je přiřazen jednomu jedinému prvku z A.

Je-li f prosté zobrazení množiny A na B, pak podle 1,9 každý prvek b množiny B je přiřazen jednomu jedinému prvku množiny $A : b = f(a)$. Ten prvek a označujeme $f^{-1}(b)$.

Cvičení 1,10. f^{-1} je prosté zobrazení množiny B na A.

Je to t. zv. *zobrazení inversní* k f.

[* Sinus je zobrazení množiny A všech úhlů do množiny R všech (reálných) čísel, nikoliv však *na* množinu R. Neboť (je-li $f(x) = \sin x$) $f(A)$ není rovna R, $f(A)$ obsahuje jen čísla mezi -1 a $+1$ (včetně). Sinus není funkce prostá, neboť na př. $0° \neq 180°$ a přesto $\sin 0° = \sin 180°$ (obojí je 0).

Je-li R množina všech reálných čísel, pak pro $f(x) = x^2$ jest f zobrazení množiny R do R, nikoliv na R, neboť záporná čísla do $f(R)$ nepatří. Není to zobrazení prosté, neboť $-5 \neq 5$ a přesto $f(-5) = f(+5)$ (obojí je 25).

Je-li však P množina *kladných* čísel, $f(x) = x^2$, pak f je zobrazení množiny P na P. Neboť každé kladné číslo je druhou mocninou jistého kladného čísla (své druhé odmocniny). A je to zobrazení prosté, neboť dvě různá kladná čísla mají různé druhé mocniny (to větší z nich má větší druhou mocninu). Inversní zobrazení f^{-1} k našemu f je druhá odmocnina (se znaménkem $+$), $f^{-1}(x) = +\sqrt{x}$.

Nechť f je zobrazení množiny R všech reálných čísel do množiny R, $f(x) = x^3$. Pak f je zobrazení množiny R na R a to prosté. Jest $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.]

Nechť f je zobrazení množiny A do B a nechť g je zobrazení množiny B do C. Je-li nyní dán libovolný prvek a množiny A, pak mu je přiřazen v množině B určitý prvek $f(a) = b$. A tomu prvku B je zase přiřazen určitý prvek $g(b) = c$ množiny C. Tím způsobem jsme ke každému prvku a množiny A našli určitý prvek c množiny C. Označíme-li $c = h(a)$, pak h

je zobrazení množiny A do C; říkáme mu zobrazení složené z f a g a označujeme je gf.

[* Na př. sinus úhlů tupých je zobrazení množiny těchto úhlů do množiny čísel a logaritmus je zobrazení množiny čísel do množiny čísel (logaritmus čísla je zase jakési číslo) do které jsme přidali symbol $-\infty$ (neboť $\log 0 = -\infty$). Z nich složené zobrazení log sin je zobrazení množiny tupých úhlů do množiny čísel doplněné symbolem $-\infty$. A vypočte se tak, že k danému tupému úhlu se najde sinus a k tomu sinu logaritmus.]

Cvičení 1,11. Zobrazení složené z prostých je prosté.

1,12. Je-li f zobrazení množiny A na B a g zobrazení množiny B na C, pak gf je zobrazení množiny A na C.

1,13. Je-li f prosté, pak $f^{-1}f$ je identické. Říkáme, že A je *ekvivalentní k* B (nebo s B), když je možno udati nějaké prosté zobrazení množiny A na B; píšeme $A \sim B$.

1,14. Užívajíce postupně zobrazení identického, inversního a složeného, dokažte:

(reflexivita) $A \sim A$;

(symetrie) je-li $A \sim B$, pak také $B \sim A$;

(transitivita) je-li $A \sim B$ a zároveň $B \sim C$, pak také $A \sim C$.

Označme B^A množinu všech zobrazení množiny A do B.

1,15. Za předpokladu, že $A \sim A'$ a $B \sim B'$, dokažte: Je-li $AB = \emptyset$ a $A'B' = \emptyset$, pak $A + B \sim A' + B'$, $A \times B \sim A' \times B'$, $B^A \sim B'^{A'}$.

1,16. $(A + B) + C \sim A + (B + C)$; mimo to z $AB = AC = BC = \emptyset$ plyne $(A + B)\,C = \emptyset$, jakož i $A\,(B + C) = \emptyset$.

1,17. $A + B \sim B + A$; mimo to z $AB = \emptyset$ plyne $BA = \emptyset$.

1,18. $(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C)$.

1,19. $A \times B \sim B \times A$.

1,20. $\{a\} \times A \sim A$.

1,21. $A \times (B + C) \sim (A \times B) + (A \times C)$; mimo to z $BC = \emptyset$ plyne $(A \times B)\,(A \times C) = \emptyset$.

1,22. Je-li $AB = \emptyset$, pak $C^{A+B} \sim C^A \times C^B$.

1,23. $C^{B\times A} \sim (C^B)^A$.

1,24. $C^{\{a\}} \sim C$.

[Na vzor naznačím důkaz pro 1,22 a 1,23. Ostatek je velmi lehký.

Ad 1,22. Nechť $f \in C^{A+B}$; označme f_1 (resp. f_2) zobrazení množiny A (resp. B) do C takové, že pro $x \in A$ (resp. $x \in B$) jest $f_1(x) = f(x)$ (resp. $f_2(x) = f(x)$). Nechť $h(f) = \{f_1; f_2\}$. Čtenář uváží, že h je prosté zobrazení množiny C^{A+B} na $C^A \times C^B$ (za předpokladu $AB = \emptyset$).

Ad 1,23. $f \in C^{B\times A}$ značí, že f je zobrazení množiny párů $\{b; a\}$, kde $b \in B$ a $a \in A$, do C. Nechť $h(f)$ je zobrazení množiny A do C^B, které prvku $a \in A$ přiřazuje zobrazení f_a množiny B do C takové, že $f_a(b) = f(\{b; a\})$. Jde o to ukázat, že h je prosté zobrazení množiny $C^{B\times A}$ na $(C^B)^A$.]

Cvičení 1,25. Nechť $A \sim B$ $B = B_1 + B_2$ s disjunktními sčítanci. Pak možno psáti $A = A_1 + A_2$ s disjunktními sčítanci $A_1 \sim B_1$ $A_2 \sim B_2$.

Je-li f prosté zobrazení množiny B na A stačí klást $A_1 = f(B_1)$, a $A_2 = f(B_2)$. Analogicky pro víc sčítanců.

Cvičení 1,26. Je-li $AB = \emptyset$ $A' \subset A$ $B' \subset B$ $A' + B' = A + B$, pak $A' = A$ a $B' = B$.

2,2. Čítání. Obvyklé definice konečných množin mají tu nevýhodu, že nejsou prostou formalisací toho, co má normální člověk na mysli, mluví-li o konečné množině. Hodlám zde postupovat způsobem, který co nejtěsněji sleduje vývoj představ od dětství. Bude to formalisace genetického vývoje matematických pojmů.

Normální člověk rozumí konečnou množinou takovou, kterou může „čítat", přebírat po jednom prvku a při tom se dostane na konec, nastane okamžik, kdy už celou množinu přebral. Jakým způsobem čítáme množinu M? Takto:

(A) Zvolíme výchozí prvek a; ten čítáme jako první.

(B) Ke každému již čítanému prvku x množiny M, *pokud to ještě jde*, t. j. pokud jsme celou M ještě nevyčerpali, zvolíme v M „následovníka" $\nu(x)$, kterého čítáme hned po x.

Při tom ovšem

(C) výchozí prvek a není následovníkem žádného prvku z M;

(D) žádný prvek nečítáme dvakrát, tedy různé prvky mají různé následovníky a konečně

(E) naším čítáním musíme vyčerpat celou množinu M; nesmí zbýt nic nečítaného, t. j. přechodem od a k $\nu(a)$ a pak vůbec od každého x k $\nu(x)$ proběhneme celou M. Jinými slovy: Když hodíme do nádoby $\mathfrak{M}$ především prvek a a za každým x hodíme do $\mathfrak{M}$ také následovníka $\nu(x)$, tož nakonec jsme naházeli do nádoby $\mathfrak{M}$ celou množinu M.

Formalisujeme:

Čítání množiny M je určeno dvěma věcmi a a ν, které hoví těmto pravidlům:

(A) a je prvek množiny M.

(B) ν je pravidlo, které některým (ne však nutně všem) prvkům x množiny M přiřazuje jakési prvky $\nu(x)$ množiny M. Prvek x určuje jednoznačně prvek $\nu(x)$.

Množinu všech x, kterým jsou nějaké prvky $\nu(x)$ přiřazeny, označíme ν_{M}.

(C) a se nerovná žádnému $\nu(x)$.

(D) Jsou-li x a y dva různé prvky množiny ν_{M}, pak také $\nu(x)$ a $\nu(y)$ jsou dva různé prvky.

(E) $\mathfrak{M}$ nechť je množina, která obsahuje prvek a a mimo to, když $\mathfrak{M}$ obsahuje nějaký prvek x množiny ν_{M}, pak vždycky $\mathfrak{M}$ obsahuje též příslušný prvek $\nu(x)$. Za těchto předpokladů $\mathfrak{M}$ obsahuje všechny prvky množiny M.

Čítání množiny M určené prvkem a a pravidlem ν označujeme vždycky $\mathsf{M}(a, \nu)$.

Uvidíme později, že jsou množiny, ke kterým se žádné čítání vůbec nalézt nedá, které se čítat nedají; jsou to t. zv. množiny nespočetné. Dá-li se k množině M nalézt vůbec nějaké čítání, říkáme, že množina M je *spočetná*. Je zvykem počítat prázdnou množinu $\emptyset$ také mezi spočetné množiny. Taková spočetná množina je na př. množina všech přirozených čísel: za a zvolíme číslo 1 a pro každé přirozené číslo x označíme $\nu(x) = x + 1$. Čtenář si za cvičení uvědomí, že pravidla (A) až (E) jsou splněna; na př. (E) vyslovuje t. zv. princip úplné indukce. [Uvádím tento příklad, protože je všem běžný. Později ale budu precisovat pojem přirozeného čísla a definovat $x + 1$. Budiž mi odpuštěno, že jsem pro jasnost výkladu předběhl.] Vidíme tedy, že spočetné množiny mohou být nekonečné; naproti tomu všecky konečné množiny jsou spočetné, neboť pravidla (A) až (E) jsme dělali podle konečných množin. Otázka, kdy je množina konečná, zůstává ještě otevřena; precisaci pojmu konečnosti musíme zatím poodložit a promluvit si trochu víc o čítání.

Uspořádání množiny M je pravidlo $<$, které určuje pro každé dva prvky x a y množiny M, je-li či není „x před y při uspořádání $<$", což píšeme $x < y$. Při tom požadujeme splnění těchto dvou pravidel (x, y a z jsou prvky množiny M):

1. Zákon trichotomie: Je buďto $x < y$ anebo $x = y$ anebo $y < x$. Při tom žádné dva z oněch případů nemohou nastat současně.

2. Zákon transitivity: Jestliže $x < y$ a zároveň $y < z$, pak také platí $x < z$. Říkáme též, že M je uspořádaná (geordnet, ordonné, ordered) množina. Je-li $W \subset M$, pak pravidlo $<$ je také uspořádáním množiny W: pro $x \in W$ a $y \in W$ je vztah $x < y$ definován, neboť $x \in M$ a $y \in M$ a oba zákony pro uspořádání ovšem platí ve W, platily-li dokonce ve větší množině M. Bude-li řeč o uspořádané množině, pak její části budeme automaticky považovat za uspořádané týmž pravidlem. Místo $a < b$ se psává též $b > a$. Někdy, abychom vyznačili uspořádání $<$ množiny M, budeme psát M($<$).

Jsou-li $<$ a $\prec$ dvě uspořádání a je-li $x < y$ přesně tehdy, když $x \prec y$, pak považujeme uspořádání $<$ a $\prec$ za sobě rovna. $x \leqq y$ znamená že buďto $x = y$ anebo $x < y$.

V dalším budiž pevně dána spočetná množina M a její čítání $\mathsf{M}(a, \nu)$.

Věta 2,1. *Existuje jedno jediné uspořádání $<$ množiny M takové, že pro každý prvek x množiny ν_{M} platí $x < \nu(x)$.*

Jest

(1) *$a \leqq n$ pro každé $n \in \mathsf{M}$*

(2) *je-li $m \in \nu_{\mathsf{M}}$, $n \in \mathsf{M}$, $m < n$ pak $\nu(m) \leqq n$.*

Důkaz bude poněkud obtížnější, ale to je málo platné. To další půjde pak už docela hravě.

Především ukážeme, že (3) pro každé $n \in \nu_{\mathsf{M}}$ jest n různé od $\nu(n)$. Za tím účelem označme P množinu těch $n \in \nu_{\mathsf{M}}$, pro která n se nerovná $\nu(n)$. Položme $\mathfrak{M} = \mathsf{P} + (\mathsf{M} - \nu_{\mathsf{M}})$. Především $a \in \mathfrak{M}$, neboť buďto $a \in \mathsf{M} - \nu_{\mathsf{M}}$; anebo $a \in \nu_{\mathsf{M}}$, v kterémžto případě jest a různé od $\nu(a)$ podle (C) a tedy $a \in \mathsf{P}$. Je-li za druhé $x \in \mathfrak{M}$, pak buďto $x \in \mathsf{M} - \nu_{\mathsf{M}}$ anebo $x \in \mathsf{P}$ čili $x \neq \nu(x)$. Buďto $\nu(x) \in \mathsf{M} - \nu_{\mathsf{M}}$; anebo $\nu(x) \in \nu_{\mathsf{M}}$ a v tomto případě z různosti prvků x a $\nu(x)$ podle (D) vyplývá různost prvků $\nu(x)$ a $\nu[\nu(x)]$, čili $\nu(x) \in \mathsf{P}$. Tedy jest $a \in \mathfrak{M}$ a je-li $x \in \mathfrak{M}$, $x \in \nu_{\mathsf{M}}$, pak také $\nu(x) \in \mathfrak{M}$. Podle (E) tedy $\mathsf{M} \subset \mathfrak{M}$. Tedy každý prvek n množiny ν_{M} patří také do $\mathfrak{M}$, tedy do P (neboť do $\mathsf{M} - \nu_{\mathsf{M}}$ nepatří), čili pro každý prvek n množiny ν_{M} jest $n \neq \nu(n)$ a to jsme chtěli dokázat.

Budiž nyní n pevný prvek množiny M. Označíme na okamžik $\mathfrak{K}$ třídu všech částí L množiny M takových že

(a′) $n \in \mathsf{L}$

(b′) je-li $x \in \nu_{\mathsf{M}}$, $\nu(x) \in \mathsf{L}$, pak také $x \in \mathsf{L}$.

Čtenář si za cvičení uvědomí, že taková L skutečně existují (na př. $\mathsf{L} = \mathsf{M}$) a že průnik $\mathsf{M}(n) = \Pi(\mathfrak{K})$ třídy $\mathfrak{K}$ hoví těmto podmínkám:

(a) $n \in \mathsf{M}(n)$,

(b) je-li $x \in \nu_{\mathsf{M}}$, $\nu(x) \in \mathsf{M}(n)$, pak také $x \in \mathsf{M}(n)$,

(c) je-li L část množiny M, která splňuje (a′) a (b′), pak $\mathsf{M}(n) \subset \mathsf{L}$. Možno říci prostě, že $\mathsf{M}(n)$ je nejmenší z množin L, které splňují (a′) a (b′).

Pomocí (C) si dále čtenář dokáže, že

(4) $\mathsf{M}(a) = \{a\}$.

Nyní si dokážeme:

(5) *Je-li* $m \in \nu_{\mathsf{M}}$, *pak* $\mathsf{M}[\nu(m)] = \mathsf{M}(m) + \{\nu(m)\}$, *při čemž* $\nu(m)$ *není prvkem množiny* $\mathsf{M}(m)$.

Především podle (a) $\nu(m) \in \mathsf{M}[\nu(m)]$ a za druhé $\mathsf{L} = \mathsf{M}[\nu(m)]$ podle (b), kde klademe $x = m$, splňuje (a′) a podle (b) L splňuje (b′) a tedy podle (c) jest $\mathsf{M}(m) \subset \mathsf{L}$ a celkem

$$\mathsf{M}(m) + \{\nu(m)\} \subset \mathsf{M}[\nu(m)].$$

Naopak si čtenář uváží, že $\mathsf{L} = \mathsf{M}(m) + \{\nu(m)\}$ splňuje (a′) a (b′), kde $n = \nu(m)$ a tedy podle (c)

$$\mathsf{M}[\nu(m)] \subset \mathsf{M}(m) + \{\nu(m)\}.$$

Celkem tedy skutečně

$$\mathsf{M}[\nu(m)] = \mathsf{M}(m) + \{\nu(m)\}.$$

Buď nyní P množina těch $m \in \nu_{\mathsf{M}}$, pro která *není* $\nu(m) \in \in \mathsf{M}(m)$. Buď $\mathfrak{M} = \mathsf{P} + (\mathsf{M} - \nu_{\mathsf{M}})$. Buďto $a \in \mathsf{M} - \nu_{\mathsf{M}}$ anebo $a \in \nu_{\mathsf{M}}$ a pak podle (3) $a \neq \nu(a)$ a na druhé straně podle (4) $\mathsf{M}(a) = \{a\}$ a tedy *není* $\nu(a) \in \mathsf{M}(a)$, t. j. $a \in \mathsf{P}$. V každém případě tedy $a \in \mathfrak{M}$.

Buď nyní $x \in \mathfrak{M}$, $x \in \nu_{\mathsf{M}}$; pak $x \in \mathsf{P}$ a tedy *není* $\nu(x) \in \mathsf{M}(x)$. Buďto $\nu(x) \in \mathsf{M} - \nu_{\mathsf{M}}$ anebo $\nu(x) \in \nu_{\mathsf{M}}$. V tomto druhém případě *není* $\nu[\nu(x)] \in \mathsf{M}(x)$. [Kdyby totiž bylo $\nu[\nu(x)] \in \mathsf{M}(x)$, pak by podle (b) bylo $\nu(x) \in \mathsf{M}(x)$.] Podle (3) jest $\nu[\nu(x)] \neq \nu(x)$ a tedy *není* $\nu[\nu(x)] \in \mathsf{M}(x) + \{\nu(x)\} = \mathsf{M}[\nu(x)]$. Tedy $\nu(x) \in \mathsf{P}$ a z $x \in \mathfrak{M}$, $x \in \nu_{\mathsf{M}}$ obecně plyne $\nu(x) \in \mathfrak{M}$. Podle (E) tedy $\mathsf{M} \subset \subset \mathfrak{M}$ a tedy pro $m \in \nu_{\mathsf{M}}$ jest $m \in \mathfrak{M}$, tedy $m \in \mathsf{P}$, z čehož vychází i druhá část tvrzení (5).

A teď budeme definovat pravidlo $<$. Vztah $x < y$ bude nám značit (pro $x \in \mathsf{M}$, $y \in \mathsf{M}$), že $\mathsf{M}(x) \subset \mathsf{M}(y)$ a při tom $\mathsf{M}(x) \neq \mathsf{M}(y)$. Především jde o to, že pravidlo $<$ je uspořádání, t. j. že splňuje zákon trichotomie a transitivity. Relace $x < \nu(x)$ pro všechna $x \in \nu_{\mathsf{M}}$ plyne ihned z (5) a zákon transitivity je zřejmý, jak čtenář uváží.

I trichotomie plyne z (5), ale trochu složitěji. Nejdříve si musíme dokázat (1) a (2).

(1) platí: Buď totiž $\mathfrak{M}$ množina takových n, pro která (1) je splněno. Zřejmě $a \in \mathfrak{M}$. Je-li $x \in \mathfrak{M}$, $x \in \nu_{\mathsf{M}}$, pak $a \leqq x$ a ovšem $x < \nu(x)$ a tedy podle zákona transitivity $a < \nu(x)$, tedy $\nu(x) \in \mathfrak{M}$. Podle (E) tedy $\mathsf{M} \subset \mathfrak{M}$, což je právě tvrzení (1).

(2) platí: $m < n$ znamená: $\mathsf{M}(m) \subset \mathsf{M}(n)$, $\mathsf{M}(m) \neq \mathsf{M}(n)$. Označme $\mathsf{L} = \mathsf{M}(n) - \{m\}$; jak čtenář si pomocí (D) ihned ověří, kdyby neplatilo $\nu(m) \in \mathsf{M}(n)$, množina L by splňovala (a′) a (b′) a tedy by podle (c) bylo $\mathsf{M}(n) \subset \mathsf{L}$, tedy též $\mathsf{M}(m) \subset$ $\subset \mathsf{L}$, tedy podle (a) též $m \in \mathsf{L}$, což ovšem není možné. Tedy nutně $\nu(m) \in \mathsf{M}(n)$; z toho pomocí (5) vychází

$$\mathsf{M}[\nu(m)] = \mathsf{M}(m) + \{\nu(m)\} \subset \mathsf{M}(n),$$

čili $\nu(m) \leqq n$, což je právě tvrzení (2).

A teď k trichotomii! Buď $\mathfrak{M}$ množina těch x, že pro každý prvek $n \in \mathsf{M}$ je buďto $n \leqq x$ anebo $x < n$. Podle (1) jest $a \in \mathfrak{M}$. Nechť $x \in \mathfrak{M}$, $x \in \nu_{\mathsf{M}}$. Buďto $n \leqq x$ a pak z $x < \nu(x)$ a zákona transitivity plyne $n < \nu(x)$, anebo $x < n$ a pak podle (2) jest $\nu(x) \leqq n$. Podle (E) jest tedy $\mathsf{M} \subset \mathfrak{M}$, tedy pro každé dva prvky x a $y \in \mathsf{M}$ je buďto $x \leqq y$ anebo $y < x$. Ty vztahy se vylučují, sic by z nich a ze zákona transitivity plynulo $x < x$, tedy zvláště $\mathsf{M}(x) \neq \mathsf{M}(x)$.

Jde nyní jen o to, že uspořádání $<$ je požadavkem $x <$ $< \nu(x)$ jednoznačně určeno. Mějme tedy ještě jedno uspořádání $\prec$ množiny M; pro všechna $x \in \nu_{\mathsf{M}}$ budiž $x \prec \nu(x)$. Buď dán prvek m množiny M a označme P množinu všech takových $x \in \mathsf{M}$, pro která $m \preceq x$. Buď Q množina těch $x \in \mathsf{M}$, pro která

$x \leqq m$. Položme $\mathfrak{M} = \mathsf{P} + \mathsf{Q}$. Podle (1) jest $a \in \mathsf{Q}$ a tedy $a \in \mathfrak{M}$. Nechť $x \in \mathfrak{M}$, $x \in \nu_{\mathsf{M}}$. Pak buďto $x \in \mathsf{P}$ a tedy $m \precsim x$; ze vztahu $x \prec \nu(x)$ a zákona transitivity pro $\prec$ pak vychází $m \prec \nu(x)$, tedy $\nu(x) \in \mathsf{P}$, tedy $\nu(x) \in \mathfrak{M}$. Anebo $x \in \mathsf{Q} - \mathsf{P}$; pak $x < m$, tedy podle (2) $\nu(x) \leqq m$, tedy $\nu(x) \in \mathsf{Q}$, tedy zase $\nu(x) \in \mathfrak{M}$. V každém případě tedy $\nu(x) \in \mathfrak{M}$ a podle (E), tedy $\mathsf{M} \subset \mathfrak{M}$, z čehož snadno plyne $\mathsf{M} - \mathsf{Q} \subset \mathsf{P}$. Čili: neplatí-li $x \leqq m$, jest $m \precsim x$. Jinak řečeno: Z $m < x$ plyne $m \precsim x$ a tedy $m \prec x$. Naopak z $x \prec m$ plyne $x < m$, neboť z $m \leqq x$ by plynulo $m \precsim x$. Tedy $u < v$ a $u \prec v$ značí přesně totéž; $\prec$ je totéž jako $<$. Tím je první a nejtěžší věta dokázána.

V důkazu věty 1 definované množiny $\mathsf{M}(n)$, $n \in \mathsf{M}$, lze nyní definovat jinak, totiž: $\mathsf{M}(n)$ je množina všech $x \in \mathsf{M}$, pro která $x \leqq n$.

[Buď totiž $\mathfrak{M}$ množina těch $n \in \mathsf{M}$, pro která tomu tak jest; podle (1) a (4) jest $a \in \mathsf{M}$. Buď nyní $m \in \mathfrak{M}$, $m \in \nu_{\mathsf{M}}$; pak $x \in \mathsf{M}(m)$ znamená totéž jako $x \leqq m$, $x \in \mathsf{M}$. Podle (5) tedy $x \in \mathsf{M}[\nu(m)]$ znamená totéž jako: buďto $x \leqq m$ anebo $x = \nu(m)$. Je-li však $x \leqq m$, jest $x < \nu(m)$. A je-li $x < \nu(m)$, jest $x \leqq m$, neboť není $\nu(m) \leqq x$ a tedy podle (2) není $m < x$. Tedy $x \in \mathsf{M}[\nu(m)]$ znamená totéž jako $x \leqq \nu(m)$, čili $\nu(m) \in \mathfrak{M}$. Podle (E) tudíž $\mathsf{M} \subset \mathfrak{M}$, c. b. d.]

Buď A nějaká množina, $\prec$ její uspořádání, $\emptyset \neq \mathsf{B} \subset \mathsf{A}$. Má-li nějaký prvek $b \in \mathsf{B}$ tu vlastnost, že z $x \in \mathsf{B}$ plyne $b \precsim x$, pak b se nazývá *první* prvek množiny B (při daném uspořádání). $\prec$ je *dobré uspořádání* (Wohlordnung) množiny A, když každá neprázdná část množiny A má první prvek.

Cvičení 2,1. Množina B má nanejvýš jeden první prvek.

Věta 2,2. *Buď $\prec$ zcela libovolné uspořádání množiny* $\mathsf{M}(n)$, $n \in \mathsf{M}$. *Pak $\prec$ je dobré uspořádání množiny* $\mathsf{M}(n)$.

Důkaz. Označme $\mathfrak{M}$ množinu těch $n \in \mathsf{M}$, pro která věta platí. Podle (4) zcela triviálně $a \in \mathfrak{M}$. Buď nyní $m \in \mathfrak{M}$, $m \in \nu_{\mathsf{M}}$. Abychom dokázali větu 2,2 pro všechna $n \in \mathsf{M}$, stačí podle (E) dokázat, že platí pro $n = \nu(m)$. Buď $\prec$ zcela libovolné uspořádání množiny $\mathsf{M}(n)$. Podle (5) jest $\mathsf{M}(m) \subset \mathsf{M}(n)$ a pravidlo $\precsim$ je též uspořádání množiny $\mathsf{M}(m)$. Buď $\emptyset \neq \mathsf{B} \subset \mathsf{M}(n)$. Buďto B neobsahuje $n = \nu(m)$ a pak podle (5) $\mathsf{B} \subset \mathsf{M}(m)$ a B má první prvek. Anebo $\mathsf{B} = \{n\}$ a B má zase první prvek, totiž n. Nebo konečně $n \in \mathsf{B} \neq \{n\}$. Pak podle (5) je $\mathsf{B} - \{n\}$ neprázdná část množiny $\mathsf{M}(m)$ a podle předpokladu má první prvek b. Je-li $b \precsim n$, je b první prvek množiny B; je-li $n \precsim b$, je n první prvek množiny B a jsme hotovi.

$<$ bude vždy uspořádání množiny M udané ve větě 2,1.

Věta 2,3. *$<$ je dobré uspořádání množiny* M.

Důkaz. Buď $\emptyset \neq \mathsf{B} \subset \mathsf{M}$, $n \in \mathsf{B}$. Buď $\mathsf{B}(n)$ množina těch x, pro která $x \in \mathsf{B}$, $x \leq n$. Pak $n \in \mathsf{B}(n)$ a tedy $\emptyset \neq \mathsf{B}(n) \subset \mathsf{M}(n)$. podle věty 2,2 má množina $\mathsf{B}(n)$ první prvek b. Jest $b \in \mathsf{B}$. Tvrdím, že b je první prvek množiny B. Kdyby ne, pak by existovalo $x \in \mathsf{B}$, $x < b$. Ježto $b \leq n$, bylo by $x < n$ a tedy $x \in \mathsf{B}(n)$, což není možné, neboť b byl první prvek množiny $\mathsf{B}(n)$.

Viděli jsme, že uspořádání $<$ bylo čítáním $\mathsf{M}(a, \nu)$ jednoznačně určeno. Nyní si uvědoměme, že i naopak čítání $\mathsf{M}(a,\nu)$ je přesně určeno uspořádáním $<$. [Ovšem není pravda, že by každé uspořádání množiny určovalo nějaké její čítání, jak ještě uvidíme.] Možno to říci takto: Dána-li dvě různá čítání množiny M, pak k nim podle věty 2,1 patřící uspořádání jsou mezi sebou různá. To bude obsahem věty 2,5.

Napřed si dokážeme pomocnou větu. Při tom je-li A nějaká množina, $\precsim$ její uspořádání, $b \in \mathsf{B} \subset \mathsf{A}$ a $x \precsim b$ pro všechna $x \in \mathsf{B}$, pak b je t. zv. *poslední* prvek množiny B.

Cvičení 2,2. Množina B má nanejvýš jeden poslední prvek.

Věta 2,4. *Není-li n poslední prvek množiny* M, $n \in \mathsf{M}$, *pak* $n \in \nu_{\mathsf{M}}$. *Je-li n poslední prvek množiny* M, *pak n nepatří do* ν_{M}.

Důkaz. Buď $\mathsf{M} - \nu_{\mathsf{M}} \neq \emptyset$. Podle věty 2,3 má množina $\mathsf{M} - \nu_{\mathsf{M}}$ první prvek n, t. j. z $x < n$ plyne $x \in \nu_{\mathsf{M}}$. Buď $\mathfrak{M} = \mathsf{M}(n)$. Podle (1) jest $a \in \mathfrak{M}$. Je-li dále $x \in \mathfrak{M}$, $x \in \nu_{\mathsf{M}}$, jest

$x < n$ a tedy podle (2): $\nu(x) \leq n$, t. j. $\nu(x) \in \mathfrak{M}$. Podle (E) tedy $\mathfrak{M} \supset \mathsf{M}$, t. j. n je poslední prvek množiny M. A je-li m vůbec nějaký prvek množiny $\mathsf{M} - \nu_{\mathsf{M}}$, pak podle definice prvku n jest $n \leq m$ a z toho, že n je poslední v M plyne, že $m \leq n$ a tedy $m = n$. Tedy $\mathsf{M} - \nu_{\mathsf{M}}$ obsahuje vskutku jenom případný poslední prvek množiny M.

A je-li n poslední prvek množiny M, pak ovšem n nepatří do ν_{M}, neboť by $n < \nu(n)$.

Věta 2,5. *Čítání* $\mathsf{M}(a, \nu)$ *množiny* M *je jejím uspořádáním* $<$ *jednoznačně určeno.*

Důkaz. a je podle (1) první prvek množiny M. Množina ν_{M} je určena větou 2,4. A pro $m \in \nu_{\mathsf{M}}$ je $\nu(m)$ podle (2) první prvek množiny $\mathsf{M} - \mathsf{M}(m)$.

Zvláště tedy byl prvek a čítáním $\mathsf{M}(a, \nu)$ jednoznačně určen podle (1). Jiné jednoznačné určení prvku a obsahuje

Věta 2,6. *Ke každému prvku* $n \in \mathsf{M}$ *vyjma* a *existuje* $m \in \mathsf{M}$, $n = \nu(m)$.

Důkaz. Buď P množina všech $\nu(m)$, $m \in \mathsf{M}$, $\mathfrak{M} = \{a\} + \mathsf{P}$. Podle (E) jest $\mathsf{M} \subset \mathfrak{M}$ a tedy pro $a \neq n \in \mathsf{M}$ jest $n \in \mathsf{P}$, tedy $n = \nu(m)$. Že a činí výjimku, plyne z (C).

Cvičení 2,3. Prvek m ve větě 2,6 je prvkem n přesně určen.

Každý prvek $n \in \mathsf{M}$ vyjma a má tedy zcela určitého „předchůdce“ m, t. j. prvek $m \in \mathsf{M}$, pro který $n = \nu(m)$.

Cvičení 2,4. Je-li m předchůdce prvku n, pak $k < n$, když a jen když $k \in \mathsf{M}(m)$. Tedy zvláště $m < n$.

Podle věty 2,4 je nejvýš jeden prvek množiny M, který není prvkem množiny ν_{M}. Jsou případy, že vůbec takového prvku není; na př. je-li M množina přirozených čísel, $a = 1$, $\nu(n) = n + 1$. Buď nyní $\mathsf{U} \subset \mathsf{M}$, $\mathsf{U} \neq \mathsf{M}$ a nechť z $\nu(x) \in \mathsf{U}$ plyne $x \in \mathsf{U}$. Takové množiny budeme nazývat *úseky* množiny M. Uvidíme, že $\mathsf{U}(a, \nu)$ je čítání množiny U a že U ($\neq \emptyset$) má vždy poslední prvek, tedy podle věty 2,4 prvek, který není v ν_{U}.

Především definujme úseky jinak a to pomocí uspořádání $<$:

Věta 2,7. *Neprázdné úseky množiny* M *jsou právě ty neprázdné její části* $\mathsf{U} \neq \mathsf{M}$, *pro které z* $n \in \mathsf{U}$, $x < n$ *plyne* $x \in \mathsf{U}$. *Neprázdné úseky množiny* M *jsou právě množiny* $\mathsf{M}(n)$, $n \in \mathsf{M}$. *Tedy každý neprázdný úsek množiny* M *má poslední prvek.*

Důkaz. Je-li $\mathsf{U} \neq \emptyset$ úsek, pak $\mathsf{M} - \mathsf{U} \neq \emptyset$ a tedy podle věty 2,3 jest v $\mathsf{M} - \mathsf{U}$ první prvek m. Buď za prvé $m = a$, $\mathfrak{M} = \mathsf{M} - \mathsf{U}$; pak z (E) plyne $\mathsf{M} \subset \mathfrak{M}$, t. j. $\mathsf{U} = \emptyset$, což není. Tedy $m \neq a$ a podle věty 2,6 lze psáti m ve tvaru $m = \nu(n)$. Podle definice prvku m jest $\mathsf{M}(n) \subset \mathsf{U}$. Kdyby $\mathsf{M}(n) \neq \mathsf{U}$, pak by podle věty 2,3 v množině $\mathsf{U} - \mathsf{M}(n)$ byl první prvek u různý od a podle (1), tedy $u = \nu(v)$ podle věty 2,6. Pak ale $v \in \mathsf{U}$, $v < u$ a tedy $v \in \mathsf{M}(n)$, tedy $v \leqq n$. Kdyby $v = n$, pak by $u = \nu(v) = m \in \mathsf{M} - \mathsf{U}$. Tedy $v < n$ a podle (2) $u \in \mathsf{M}(n)$, což je spor. Tedy $\mathsf{U} = \mathsf{M}(n)$.

Je-li nyní U neprázdná část množiny M, $\mathsf{U} \neq \mathsf{M}$, buď m první prvek množiny $\mathsf{M} - \mathsf{U}$. Jestliže z $n \in \mathsf{U}$, $x < n$ plyne $x \in \mathsf{U}$, pak podle (1) $a \in \mathsf{U}$ a tedy $m \neq a$, $m = \nu(n)$ podle věty 2,6. Pak $\mathsf{U} = \mathsf{M}(n)$. Za prvé totiž podle definice prvku m jest $\mathsf{M}(n) \subset \mathsf{U}$. Kdyby $u \in \mathsf{U} - \mathsf{M}(n)$, pak by $n < u$ a podle (2): $\nu(n) \leqq u$, tedy $m = \nu(n) \in \mathsf{U}$, což je spor. Tedy zase $\mathsf{U} = \mathsf{M}(n)$.

Cvičení 2,5. Buď U úsek množiny M, tedy $\mathsf{U} = \mathsf{M}(n)$. Buď $\nu'_{\mathsf{U}} = \mathsf{U} - \{n\}$. Je-li $u \in \nu'_{\mathsf{U}}$, položíme $\nu'(u) = \nu(u)$. Pak platí (A) až (E) pro U, a, ν' místo M, a, ν. To právě znamenalo tvrzení, že $\mathsf{U}(a, \nu)$ je čítání množiny U. Píšeme-li stále U, a, ν' místo M, a, ν', pak podle věty 2,1 dostaneme přesně jedno uspořádání $<'$ množiny U takové, že $x <' \nu'(x)$ pro všechna $x \in \nu'_{\mathsf{U}}$. Pro $x \in \mathsf{U}$, $y \in \mathsf{U}$ znamená $x <' y$ přesně totéž co $x < y$.

[Vše je lehké; ukáži sám na př., že je splněno (E) pro U, a, ν. Buď $\mathfrak{M}'$ množina obsahující a a z $x \in \mathfrak{M}'$, $x \in \nu'_{\mathsf{U}}$ nechť plyne

$\nu'(x) \in \mathfrak{M}'$. Buď $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + (\mathsf{M} - \mathsf{U})$. Pak $a \in \mathfrak{M}$; je-li $x \in \nu'_{\mathsf{U}}$, pak z $x \in \mathfrak{M}$ plyne $x \in \mathfrak{M}'$ a tedy $\nu(x) = \nu'(x) \in \mathfrak{M}$. Je-li $x \in \nu_{\mathsf{M}} - \nu'_{\mathsf{U}}$, $x \in \mathsf{U}$, pak podle věty 2,5 je x poslední prvek množiny U, tedy $x = n$ a jest $\nu(x) = \nu(n) \in \mathsf{M} - \mathsf{U}$, $\nu(x) \in \mathfrak{M}$. Je-li konečně $x \in \nu_{\mathsf{M}}$, $x \in \mathsf{M} - \mathsf{U}$, pak $\nu(x) \in \mathsf{M} - \mathsf{U}$ a tedy $\nu(x) \in \mathfrak{M}$. Podle (E) tedy $\mathsf{M} \subset \mathfrak{M}$, tedy $\mathfrak{M}' \supset \mathsf{U}$, o. b. d.]

Říkáme, že $\mathsf{M}(a, \nu)$ *indukuje* v U čítání $\mathsf{U}(a, \nu')$, čili prostě $\mathsf{U}(a, \nu)$.

Podle našeho cvičení tedy platí

Korolár. *Každý úsek spočetné množiny je spočetná množina.*

2,3. Indukce. Buď $\mathsf{M}(a, \nu)$ čítání množiny M, $<$ uspořádání definované ve větě 2,1.

Čtenář si všiml, že v hořejších důkazech hrála podmínka (E) hlavní roli. Můžeme ji formulovat takto: *Je-li* $\mathsf{V}(x)$ *nějaký výrok, který má smysl pro každý prvek x množiny* M, *pak k tomu, abychom dokázali* $\mathsf{V}(x)$ *pro všechna x, stačí dokázat přímo jenom* $\mathsf{V}(a)$ *a jinak dokázat* $\mathsf{V}(x)$ *jenom za předpokladu, že platí* $\mathsf{V}(y)$ *pro předchůdce y prvku x.*

Označme totiž $\mathfrak{M}$ množinu těch $x \in \mathsf{M}$, pro která $\mathsf{V}(x)$ platí. Pak dokážeme-li $\mathsf{V}(a)$, jest $a \in \mathfrak{M}$. A za druhé z platnosti výroku $\mathsf{V}(y)$ dovedeme dokázat platnost výroku $\mathsf{V}[\nu(y)]$ $[\nu(y) = x]$ a tedy z $y \in \mathfrak{M}$ plyne $\nu(y) \in \mathfrak{M}$. Podle (E) tedy $\mathsf{M} \subset \mathfrak{M}$, t. j. platí $\mathsf{V}(x)$ pro všechna x.

K některým důkazům hořejší formulace je trochu slabá. Silnější formulace zní takto:

Je-li $\mathsf{V}(x)$ *výrok, který má smysl pro každý prvek x množiny* M, *pak k tomu, abychom dokázali* $\mathsf{V}(x)$ *pro všecka x, stačí dokázat* $\mathsf{V}(x)$ *jenom za předpokladu, že platí* $\mathsf{V}(y)$ *pro všechna* $y < x$.

Podle věty 2,3 a 2,1 je $<$ dobré uspořádání množiny M, a její první prvek. A tento předpoklad už k důkazu posledního výroku stačí; o čítání množiny M není třeba mluvit, ba M nemusí ani být spočetná.

Neboť kdyby to nebylo pravda, pak by množina $\mathsf{M} - \mathfrak{M}$ nebyla prázdná a měla by tedy první prvek x. Z definice prvku x plyne, že pro $y < x$ jest $y \in \mathfrak{M}$ a tedy podle našeho předpokladu také $x \in \mathfrak{M}$, což není možné, neboť $x \in \mathsf{M} - \mathfrak{M}$.

Hořejší výroky jsou slabší a silnější formulace t. zv. *principu důkazu indukcí*.

Zcela obdobného principu lze užít k definicím. *Princip definice indukcí* budu formulovat v silnějším znění (F bude množina, z které definované věci vybíráme):

Abychom (přesně a jednoznačně) definovali věc $f(x) \in \mathsf{F}$ pro každý prvek $x \in \mathsf{M}$, stačí definovat jenom věc $f(x) \in \mathsf{F}$ za předpokladu, že věci $f(y) \in \mathsf{F}$ pro všechna $y < x$ jsou už známy.

Věc $f(x)$ definujeme na základě toho, jak byly definovány věci $f(y)$ pro $y < x$. Byly-li věci $f(y)$ pro $y < x$ definovány, na př. $f(y) = z(y)$, pak $f(x)$ se z nich dostane jakýmsi předem daným pravidlem g, tu věc pravidlem g získanou označíme $g(z)$. Závisí na z, t. j. na tom, co byly věci $z(y)$ pro $y < x$. A $f(x)$ se rovná právě $g(z)$.

Za M zvolme na př. množinu N přirozených čísel, $a = 1$; za F množinu záporných čísel a snažme se určit posloupnost (nekonečnou řadu) tak, aby první člen $f(1)$ byl roven $p = -1$ a aby x-tý člen byl součet všech předchozích členů $-x$. Pak $f(a)$ bylo definováno přímo ($= -1$) a x-tý člen za předpokladu, že předešlé členy známe (jinak bychom nemohli určit jejich součet). Tím je posloupnost úplně určena:

$$-1, -3, -7, -15, -31, \text{atd.}$$

$f(x) = g(z)$ je součet všech $z(y)$, kde $y < x$, zmenšený o x. z udává, jak byly věci $f(y) = z(y)$ definovány pro $y < x$. Větších y se pravidlo z netýká.

Zase úplně stačí předpokládat, že $<$ je dobré uspořádání množiny M, a její první prvek.

Formalisujme to poněkud lépe. Je-li f zobrazení množiny M uspořádané pravidlem $<$ do F, označíme f_x pro $x \in \mathsf{M}$ pravidlo, které každému $y < x$ přiřazuje $f(y)$, t. j. $f_x(y) = f(y)$; ostatních $y \geqq x$ se f_x netýká. Pak náš princip zní:

($\mathfrak{C}$) *Nechť v případě, že každému prvku $y < x$ už byl přiřazen určitý prvek $z(y) \in \mathsf{F}$ jistým pravidlem z, umíme definovat určitou (na z závislou) věc $g(z) \in \mathsf{F}$, podle pravidla g. Pak existuje přesně jedno zobrazení f množiny M do F takové, že $f(x) = g(f_x)$ pro $x \in \mathsf{M}$.*

V důkaze značí M_x (pro $x \in \mathsf{M}$) množinu všech $y < x$.

(α) Nechť pro jisté $\sigma \in \mathsf{M}$ existují zobrazení s množiny M_σ do F taková, že pro každé $x \in \mathsf{M}_\sigma$, jest $s(x) = g(s_x)$. Tvrdím:

(β) Nejvýš jedno s splňuje tvrzení (α).

Nechť totiž s^1 a s^2 jsou dvě taková s. Buď x první prvek množiny těch $x \in \mathsf{M}_\sigma$, že $s^1(x) \neq s^2(x)$. Pro $y < x$ jest $s^1(y) = s^2(y)$, tedy $s_x{}^1 = s_x{}^2$, tedy $s^1(x) = g(s_x{}^1) = g(s_x{}^2) = s^2(x)$, což odporuje volbě prvku x. Tedy takového x není a $s^1 = s^2$, t. j. platí (β).

Z buď množina všech $\sigma \in \mathsf{M}$ takových, že platí (α) (i co do existence zobrazení s).

(γ) Je-li $\mathsf{M}_\sigma \subset \mathsf{Z}$, pak $\sigma \in \mathsf{Z}$. Máme tedy dokázat, že existuje zobrazení s množiny M_σ do F takové, že pro každé $x \in \mathsf{M}_\sigma$ jest $s(x) = g(s_x)$. Budiž tedy $x \in \mathsf{M}_\sigma$. Pak $x \in \mathsf{Z}$, tedy existuje (a podle (β) právě jedno) zobrazení t množiny M_x do F takové, že pro každé $y < x$ je $t(y) = g(t_y)$. Položme $s(x) = g(t) \in \mathsf{F}$. Abychom dokázali vztah $s(x) = g(s_x)$, stačí tedy dokázat $s_x = t$, t. j. $s_x(y) = t(y)$, to znamená $s(y) = t(y)$ pro $y < x$. Je však t zobrazení množiny M_x do F mající vlastnost α) (t místo s, x místo σ), tedy t_y zobrazení množiny M_y do F mající vlastnost α) (t_y místo s, y místo σ), tedy podle definice zobrazení s je $s(y) = g(t_y) = t(y)$ c. b. d.

Čteme-li v důkazech tvrzení (β) a (γ) M a f místo M_σ a s, obdržíme místo (β) a (γ):

(β') Existuje nejvýš jedno zobrazení f splňující podmínky věty.

(γ') Je-li $M \subset Z$, pak existuje aspoň jedno f splňující podmínky věty.

Máme tedy celkem ukázat, že ze $\sigma \in M$ plyne $\sigma \in Z$. Kdyby ne, pak by množina těch σ, která by v Z nebyla, měla první prvek σ. Především jest $M_\sigma \subset Z$ podle volby prvku σ. Tedy podle (γ) jest $\sigma \in Z$ a věta je dokázána.

Uděláme si ihned jednu důležitou aplikaci. Říkáme, že množina A s uspořádáním $<_1$ je podobná (ähnlich, semblable, similar) množině B s uspořádáním $<_2$, když se dají prvky množiny B očíslovat pomocí prvků množiny A tak, že pořádek patřících si prvků je stejný, t. j. když existuje zobrazení f množiny A na B takové, že z $x \in A$, $y \in A$, $x <_1 y$ plyne $f(x) <_2 f(y)$.

Píšeme pak typ A = typ B. Zobrazení f je t. zv. *podobnost* množin A a B.

Cvičení 3,1. Zobrazení f je prosté. Tedy: jsou-li množiny A a B podobné, jsou ekvivalentní.

3,2. Užívajíce postupně zobrazení identického, inversního a složeného, dokažte:

(reflexivita) typ A = typ A;

(symetrie) je-li typ A = typ B, jest typ B = typ A;

(transitivita) je-li typ A = typ B a zároveň typ B = typ C, pak také typ A = typ C. [To identické, inversní a složené zobrazení je zase podobnost.]

Je-li B uspořádána pravidlem $\prec$, $x \in B$, pak B_x je množina všech $y \prec x$. Nerovnost typ $A <$ typ B bude vždy značit, že A je podobná jakési množině B_x.

Cvičení 3,3. Je-li $y \prec x$, pak $B_y \subset B_x$.

3,4. Je-li typ $A <$ typ B a typ $B <$ typ C, pak také typ $A <$ typ C. Platí to i když v jedné z prvních dvou nerovností připustíme rovnost.

Pro symboly typ A platí tedy zákon transitivity pro pravidlo $<$. Zákon trichotomie platí jen, omezíme-li se na dobrá uspořádání. Pak totiž platí

Cvičení 3,5. Je-li F dobře uspořádána, $\mathsf{A} = \mathsf{F}_\varphi$, pak $\varphi \in \mathsf{F}$ je množinou A přesně určeno.

3,6. Jestliže je F dobře uspořádána, $\mathsf{W} \subset \mathsf{F}$, $\mathsf{W} \neq \mathsf{F}$, když z $y \in \mathsf{W}$ plyne $\mathsf{F}_y \subset \mathsf{W}$, pak existuje $\varphi \in \mathsf{F}$ takové, že $\mathsf{W} = \mathsf{F}_\varphi$. [Za φ volte první prvek množiny $\mathsf{F} - \mathsf{W}$.]

Trichotomie pro typy. Jsou-li W_1 a W_2 dobře uspořádané množiny, pak buďto typ $\mathsf{W}_1 <$ typ W_2 anebo typ $\mathsf{W}_2 <$ $<$ typ W_1 anebo typ $\mathsf{W}_1 =$ typ W_2 a žádné dva z těchto případů nemohou nastat současně.

Důkaz. Označme $\mathsf{M} = \mathsf{W}_1$, $\mathsf{F} = \mathsf{W}_2$; buď a, resp. p první prvek množiny M, resp. F. Je-li z zobrazení množiny $\mathsf{M}_\xi (\xi \in \mathsf{M})$ do F, pak buďto $z(\mathsf{M}_\xi) = \mathsf{F}_\varphi$ pro jisté $\varphi \in \mathsf{F}$. Podle cvičení 3,5 je pak to φ přesně určeno.

V tomto případě položíme $g(z) = \varphi$. Anebo takového φ není; pak budiž $g(z) = p$. Podle principu definice indukcí pak existuje zobrazení f množiny M do F takové, že $f(a) = p$ a je-li $f(\mathsf{M}_\xi) = \mathsf{F}_\varphi$, jest $\varphi = f(\xi)$. Je-li $f(\mathsf{M}_\xi) \neq \mathsf{F}_\varphi$ pro všechna $\varphi \in \mathsf{F}$, pak $f(\xi) = p$.

Buď $\mathsf{V} \subset \mathsf{M}$ a z $\xi \in \mathsf{V}$ nechť plyne jednak $\mathsf{M}_\xi \subset \mathsf{V}$, jednak $f(\mathsf{M}_\xi) = \mathsf{F}_{f(\xi)}$.

(α) Buďto $f(\mathsf{V}) = \mathsf{F}$ anebo $f(\mathsf{V}) = \mathsf{F}_\varphi$, $\varphi \in \mathsf{F}$.

Buď totiž $x \in \mathsf{F}$, $x \prec y$, $y \in f(\mathsf{V})$. [Uspořádání množiny M i množiny F označuji stejně: $\prec$; k omylu nedojde.] Pak lze psát $y \in f(\eta)$, $\eta \in \mathsf{V}$. Jest dále $\mathsf{M}_\eta \subset \mathsf{V}$, tedy $f(\mathsf{M}_\eta) \subset f(\mathsf{V})$ a $f(\mathsf{M}_\eta) = \mathsf{F}_{f(\eta)} = \mathsf{F}_y$. Avšak $x \in \mathsf{F}_y$, tedy $x \in f(\mathsf{V})$. Z $y \in f(\mathsf{V})$ tedy plyne $\mathsf{F}_y \in f(\mathsf{V})$. Není-li $f(\mathsf{V})$ rovno F, jest $f(\mathsf{V}) = \mathsf{F}_\varphi$ podle cvičení 3,6 pro $\mathsf{W} = f(\mathsf{V})$. Tím ($\alpha$) dokázáno.

Buď $f' = f/\mathsf{V}$ zobrazení množiny V do F takové, že pro $x \in \mathsf{V}$ je vždy $f'(x) = f(x)$.

(β) f/V je podobnost množin V a $f(\mathsf{V})$. Z $\xi \prec \eta \in \mathsf{V}$ plyne totiž $\xi \in \mathsf{M}_\eta$, $f(\xi) \in f(\mathsf{M}_\eta) = \mathsf{F}_{f(\eta)}$ a tedy skutečně $f(\xi) \prec f(\eta)$.

A teď k vlastnímu důkazu! Za prvé nechť existují taková $\varrho \in \mathsf{M}$, že $f(\mathsf{M}_\varrho) \neq \mathsf{F}_\varphi$ pro všechna $\varphi \in \mathsf{F}$. Buď ϱ první z nich.

Lze pak klásti $V = M_\varrho$ a tedy z (α) plyne $f(M_\varrho) = F$; podle (β) je pak f/M_ϱ podobnost množin M_ϱ a F, tedy typ $F <$ $<$ typ M.

Anebo $f(M_\xi) = F_{f(\xi)}$ pro každé $\xi \in M$. Lze klásti $V = M$ a podle (α) a (β) je $f = f/V$ podobnost množin M a $f(V) = F$, resp. $f(V) = F_\varphi$ a tedy typ $W \leqq$ typ F.

Jeden z případů jmenovaných v dokazovaném tvrzení tedy skutečně nastane. Jde o to ukázat, že se ty případy vylučují. Kdyby typ $W_1 <$ typ W_2 a zároveň typ $W_2 \leqq$ $\leqq$ typ W_1, pak by typ $W_1 <$ typ W_1. Totéž by plynulo z relací typ $W_2 <$ typ W_1 a typ $W_2 =$ typ W_1. Pak by ale existovalo $x \in M$ ($= W_1$) takové, že typ $M =$ typ M_x. Buď f podobnost množin M a M_x. Pak $f(x) \in M_x$, t. j. $f(x) \prec x$. Je tedy neprázdná množina takových $y \in M$, pro která $f(y) \prec y$. Buď y první prvek té množiny. Pak pro $z = f(y)$ jest $z \prec y$, tedy $f(z) \prec f(y)$, t. j. $f(z) \prec z$. To ale není možné, neboť prvek y byl zvolen tak, že z nerovnosti $z \prec y$ plyne $z \preceq f(z)$. Tím trichotomie dokázána.

Cvičení 3,5. Konec posledního důkazu vlastně dokazuje větu:

Nechť f je zobrazení množiny M s dobrým uspořádáním $\prec$ do M; nechť z $x \prec y$ plyne $f(x) \prec f(y)$. Pak je vždy $x \preceq f(x)$.

[Jinak by byla neprázdná množina takových $y \in M$, pro která $f(y) \prec y$ atd. jako svrchu.]

3,6. *Je-li M' část dobře uspořádané množiny, pak* typ $M' \leqq$ $\leqq$ typ M.

[Jinak by typ $M =$ typ M'_x, pro podobnost f množin M a M'_x by bylo $f(x) \prec x$.]

Ještě si udělejme tři cvičení o podobnostech, která budou v dalším užitečná.

Cvičení 3,7. Buď σ podobnost množin X a Y, $A \subset B \subset X$. Pak $\sigma(A) \subset \sigma(B)$. Je-li $A \neq B$, jest $\sigma(A) \neq \sigma(B)$.

3,8. Pro $\mathsf{A} \subset \mathsf{X}(<)$ označme $\sup \mathsf{A}$ první prvek $\alpha \in \mathsf{X}$ takový, že pro všechna $a \in \mathsf{A}$ jest $a \leqq \alpha$. (Jest nejvýš jedno takové α.) Buď σ podobnost množin X a Y. Je-li $\alpha = \sup \mathsf{A}$, jest $\sigma(\alpha) = \sup \sigma(\mathsf{A})$.

3,9. Je-li $\mathsf{A} \subset \mathsf{X}$, σ podobnost množin X a Y a x první prvek množiny $\mathsf{X} - \mathsf{A}$, pak $\sigma(x)$ je první prvek množiny $\mathsf{Y} - \sigma(\mathsf{A})$.

2,4. Konečné množiny. Teď budeme definovat konečnost a dokážeme si základní poučky o ní.

Věta 4,1. *Je-li $n \in \mathsf{M}$, pak množina $\mathsf{M}(n)$ není ekvivalentní s žádnou svou pravou částí.*

Důkaz. Buď $\mathfrak{M}$ množina těch $n \in \mathsf{M}$, pro která je naše tvrzení správné. Ze (4) zřejmě plyne $a \in \mathfrak{M}$. Buď $m \in \mathfrak{M}$, $m \in \nu_{\mathsf{M}}$. Vzhledem k (E) stačí dokázat $n = \nu(m) \in \mathfrak{M}$. Označme $\mathsf{A} = \mathsf{M}(n)$ a B nechť je pravá část množiny A. Jde o to odvodit spor z existence pravidla f udaného v definici ekvivalence. Především si budeme pravidlo f poněkud modifikovat. Modifikované pravidlo f' bude každému prvku x množiny $\mathsf{A}' = \mathsf{M}(m)$ přiřazovat jakousi věc $f'(x)$. Bude skoro vždycky $f'(x) = f(x)$; jediná výjimka bude toto: Je-li $f(x) = n$, $x \in \mathsf{A}'$, pak z $x \neq n$ plyne $f(x) \neq f(n)$ a tedy $f(n) \neq n$, tedy $f(n) \in \mathsf{A}'$ podle (5); a v tom případě bude $f'(x) = f(n)$. Tedy podle (5) je vždycky $f'(x) \in \mathsf{A}'$. A čtenář si za cvičení ukáže, že z $x_1 \neq x_2$ plyne $f'(x_1) \neq f'(x_2)$. Označme B' množinu všech $f'(x)$. Pak B' je část množiny A' a A' je ekvivalentní s B'. Abychom dostali rozpor proti vztahu $m \in \mathfrak{M}$, máme jen ukázat, že $\mathsf{B}' \neq \mathsf{A}'$.

Nechť tedy $\mathsf{B}' = \mathsf{A}'$. Je-li $f(n) = n$, pak (ježto podle (5) není $n \in \mathsf{A}'$) jest $f'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in \mathsf{A}'$ a tedy $\mathsf{B} = \mathsf{B}' + \{n\} = \mathsf{A}$ podle (5). Anebo je $f(n) \neq n$ a tedy podle (5) jest $f(n) \in \mathsf{B}'$ a tedy $f'(x) = f(n)$ pro jisté $x \in \mathsf{A}'$. Pak ovšem musí $f(x)$ být mimo množinu B'. [Neboť prvky $f'(y)$, $y' \in \mathsf{A}'$, tvoří právě množinu B' a jsou to právě prvky $f(y)$ pro $y \neq x$

a prvek $f(n)$. Kdyby $f(x) \in \mathsf{B}'$, pak by v rozporu s definicí pravidla f bylo $f(x) = f(y)$ pro $y \neq x$ anebo $f(x) = f(n)$ a podle (5) $x \neq n$.] Podle (5) tedy $f(x) = n$ a $\mathsf{B} = \mathsf{B}' + \{n\} = \mathsf{A}$ proti předpokladu.

Věta 4,2. *Množina* M *je ekvivalentní s nějakou svou pravou částí, když a jen když* $\nu_{\mathsf{M}} = \mathsf{M}$.

Důkaz. Je-li $\nu_{\mathsf{M}} = \mathsf{M}$, položme $\mathsf{M} = \mathsf{A}$, $\mathsf{M} - \{a\} = \mathsf{B}$ a $\nu = f$ v definici ekvivalence. Pak množina M je ekvivalentní se svou pravou částí $\mathsf{M} - \{a\}$ podle (D) a věty 2,6.

Je-li nyní $\nu_{\mathsf{M}} \neq \mathsf{M}$, pak podle věty 2,4 $\mathsf{M} - \nu_{\mathsf{M}}$ obsahuje přesně jen poslední prvek n množiny M a jest tedy $\mathsf{M} = \mathsf{M}(n)$. Podle věty 4,1 tedy M není ekvivalentní s žádnou svou pravou částí.

O množině přirozených čísel říkáme, že je nekonečná, čímž vyznačujeme tu skutečnost, že každý její prvek má následovníka, žádný není poslední. Dojdeme-li při čítání k poslednímu prvku, který už nemá následovníka, t. j. když $\nu_{\mathsf{M}} \neq \mathsf{M}$, říkáme, že množina je konečná. A priori by se ale mohlo stát, že by při čítání $\mathsf{M}(a, \nu)$ množiny M bylo $\nu_{\mathsf{M}} \neq \mathsf{M}$, avšak při nějakém jiném čítání $\mathsf{M}(a', \nu')$ téže množiny by bylo $\nu'_{\mathsf{M}} = \mathsf{M}$. To však vylučuje věta 4,2. Je-li $\nu_{\mathsf{M}} = \mathsf{M}$ nebo $\nu_{\mathsf{M}} \neq \mathsf{M}$, totiž podle ní vůbec nezávisí na tom kterém čítání $\mathsf{M}(a, \nu)$. Je to při všech čítáních stejné a závisí to jenom na tom, je-li či není M ekvivalentní s nějakou svou pravou částí. Vzhledem k tomu lze definovat: Množina M nazývá se *konečná* (endlich, fini, finite), je-li spočetná a jestliže při nějakém čítání $\mathsf{M}(a, \nu)$ množiny M jest $\nu_{\mathsf{M}} \neq \mathsf{M}$. Při tom nezáleží na tom, jak bylo zvoleno čítání $\mathsf{M}(a, \nu)$. Vzhledem k větě 4,2 možno též říci: Množina nazývá se konečná, je-li spočetná a není-li ekvivalentní s žádnou svou pravou částí. Při tom prázdnou množinu počítáme mezi konečné množiny. Není-li spočetná množina konečná, říkáme, že je *nekonečná* (unendlich, infini, infinite).

Cvičení 4,1. Množina ekvivalentní se spočetnou je spočetná.

4,2. Množina ekvivalentní s konečnou je konečná.

Věta 4,3. *Každá množina* $\mathsf{M}(n)$ *je konečná.*

Důkaz plyne z věty 2,7, koroláru na konci kapitoly 2 a věty 4,1.

Cvičení 4,3. Každá množina M_x pro $x \in \mathsf{M}$ je úsek množiny M. Je to pravá část množiny M a podle věty 2,7 existuje $y \in \mathsf{M}$ takové, že $\mathsf{M}_x = \mathsf{M}(y)$.

Věta 4,4. *Každá část konečné množiny je konečná množina.*

Důkaz. Buď M konečná, $\mathsf{C} \subset \mathsf{M}$. Kdyby typ $\mathsf{M} <$ typ C, pak by M byla ekvivalentní (srv. cvičení 3,1) s jistou svou pravou částí C_x. Tedy podle trichotomie pro typy typ $\mathsf{C} \leqq$ typ M a tedy je buď $\mathsf{C} = \mathsf{M}$, nebo C je ekvivalentní s jistou množinou M_x. M_x je úsek množiny M a tedy podle věty 2,7 jest $\mathsf{M}_x = \mathsf{M}(y)$ pro jisté $y \in \mathsf{M}$. Tedy C je ekvivalentní s množinou $\mathsf{M}(y)$, která je podle věty 4,3 konečná. Je tedy C konečná.

Věta 4,5. *Každé uspořádání konečné množiny je dobré.*

Důkaz. Je-li totiž M konečná, jest $\nu_{\mathsf{M}} \neq \mathsf{M}$ při uspořádání $<$ z věty 2,1, má tedy podle věty 2,4 množina M poslední prvek n, t. j. $\mathsf{M} = \mathsf{M}(n)$. A naše tvrzení plyne z věty 2,2.

Věta 4,6. *Každá dvě uspořádání téže konečné množiny jsou si podobná.*

Důkaz. M^1 a M^2 budiž naše množina; M^1 a M^2 se liší leda uspořádáním. Kdyby typ $\mathsf{M}^1 \neq$ typ M^2, pak by podle 4,5 a trichotomie pro typy bylo na př. typ $\mathsf{M}^1 <$ typ M^2. Množina M^1 by byla ekvivalentní s jakousi pravou částí M_x^2 množiny M^2, tedy se svou pravou částí a nebyla by konečná.

Dvě uspořádání téže konečné množiny se tedy od sebe liší jen „permutací“ prvků.

Věta 4,7. *Dvě konečné množiny jsou si podobné, když a jen když jsou ekvivalentní.*

Důkaz. Z podobnosti plyne ekvivalence podle cvičení 3,1. Jsou-li M_1 a M_2 konečné ekvivalentní množiny, zvolme prosté zobrazení f množiny M_2 na M_1. Je-li M_1 uspořádáno pravidlem $\preccurlyeq_1$ a M_2 pravidlem $\preccurlyeq_2$, označme M_3 množinu M_2 uspořádanou pravidlem $\preccurlyeq_3$ takto: pro $x \in M_3$ a $y \in M_3$ značí $x \preccurlyeq_3 y$, že $f(x) \preccurlyeq_1 f(y)$. Čtenář uváží, že to je uspořádání a že f je podobnost množin M_3 a M_1. Tedy typ M_3 = typ M_1 a podle věty 4,6 typ M_3 = typ M_2, tedy vskutku typ M_1 = typ M_2.

Cvičení 4,4. Je-li $\preccurlyeq$ uspořádání množiny M a značí-li $x \preccurlyeq^* y$ totéž co $y \preccurlyeq x$, pak $\preccurlyeq^*$ je uspořádání množiny M, t. zv. *inversní k* $\preccurlyeq$.

4,5. Inversní uspořádání k $\preccurlyeq^*$ je $\preccurlyeq$.

4,6. První (poslední) prvek množiny $C \subset M$ při uspořádání $\preccurlyeq$ je její poslední (první) prvek při uspořádání $\preccurlyeq^*$.

Věta 4,5 bis. *Je-li* M *uspořádaná konečná množina,* $\emptyset \neq C \subset M$, *pak* C *má poslední prvek.*

Důkaz. Inversní uspořádání množiny M je podle věty 4,5 dobré a C má tedy při něm první prvek, což je její poslední prvek při daném uspořádání.

Věta 4,8. *Jsou-li* A *a* B *konečné množiny, pak množiny* $A + B$, $A \times B$ *a* B^A *jsou konečné.*

Je-li M *konečná třída konečných množin, pak* $\Sigma(M)$ *je konečná množina.*

Důkaz. Položme $A = M$;*) pak podle věty 2,4 je možno psáti $M = M(n)$. Je-li $\mathfrak{M}$ množina všech $m \in M$ s konečnou $M(m) + B$, ukažme, že $a \in \mathfrak{M}$ a že z $m \in \nu_M \mathfrak{M}$ plyne $\nu(m) \in \mathfrak{M}$. Pak bude zvláště $n \in \mathfrak{M}$ a tedy i $M(n) + B = A + B$ konečná. Podle (4) a (5) věty 2,1 stačí ukázat, že přidáním jednoho

*) Toto M nemá nic společného s M v druhé části věty.

prvku ke konečné množině se dostane konečná množina. Je-li ten prvek už v původní množině, není co dokazovat. Buď tedy M konečná množina, s čítáním $\mathsf{M}(a, \nu)$, $\mathsf{M} = \mathsf{M}(n)$ podle věty 2,4. Je-li p nový prvek, $\mathsf{M}' = \mathsf{M} + \{p\}$, $\nu'(x) = \nu(x)$ pro $x \in \nu_{\mathsf{M}}$, $\nu'(n) = p$, pak si čtenář snadno zverifikuje, že platí (A) až (E), kde místo M a ν se píše M' a ν'. Tedy ν' je čítání množiny M' a při tom $\mathsf{M}' \neq \nu'_{\mathsf{M}'}$, neboť p nemá následovníka při čítání ν'. Tedy je M' skutečně konečná.

Buď $\mathfrak{M}$ množina těch m, pro která $\mathsf{M}(m) \times \mathsf{B}$ je konečná. Podle 2,1 (4) jest $\mathsf{M}(a) \times \mathsf{B} = \{a\} \times \mathsf{B}$, tedy ekvivalentní s B (cvičení 1,20), tedy konečná, t. j. $a \in \mathfrak{M}$. Podle věty 2,1 (5) a cvičení 1,5 jest

$$\mathsf{M}[\nu(m)] \times \mathsf{B} = (\mathsf{M}(m) \times \mathsf{B}) + (\{\nu(m)\} \times \mathsf{B}).$$

Poslední množina je zase (podle cvičení 1,20) ekvivalentní s B a tedy konečná. Tedy z dokázaného již tvrzení o součtu plyne: Je-li $\mathsf{M}(m) \times \mathsf{B}$ konečná, je i $\mathsf{M}[\nu(m)] \times \mathsf{B}$ konečná, t. j. z $m \in \mathfrak{M}\nu_{\mathsf{M}}$ plyne $\nu(m) \in \mathfrak{M}$, tedy podle (E) jest $\mathsf{M} \subset \mathfrak{M}$, tedy $n \in \mathfrak{M}$, tedy $\mathsf{M}(n) \times \mathsf{B} = \mathsf{A} \times \mathsf{B}$ konečná.

Stejně je tomu s B^{A}. Především je $\mathsf{B}^{\mathsf{M}(a)}$ podle 1,24 konečná. Dále podle věty 2,1 (5) a 1,22 jest

$$\mathsf{B}^{\mathsf{M}[\nu(m)]} \sim \mathsf{B}^{\mathsf{M}(m)} \times \mathsf{B}^{\{\nu(m)\}}.$$

Druhý součinitel napravo je podle 1,24 ekvivalentní s B a tedy konečný. Je-li tedy $\mathsf{B}^{\mathsf{M}(m)}$ konečná, je podle dokázaného již tvrzení o součinu také

$$\mathsf{B}^{\mathsf{M}(m)} \times \mathsf{B}^{\{\nu(m)\}}$$

a tedy i $\mathsf{B}^{\mathsf{M}[\nu(m)]}$ konečná. Tedy, je-li $\mathfrak{M}$ množina všech m s konečnou $\mathsf{B}^{\mathsf{M}(m)}$, jest $a \in \mathfrak{M}$ a z $m \in \mathfrak{M}\nu_{\mathsf{M}}$ plyne $\nu(m) \in \mathfrak{M}$ a tedy podle (E) jest $\mathsf{M} \subset \mathfrak{M}$, tedy $n \in \mathfrak{M}$, tedy $\mathsf{B}^{\mathsf{M}(n)} = \mathsf{B}^{\mathsf{A}}$ konečná.

Konečně pišme $\mathsf{M} = \mathsf{M}(n)$ ve shodě s větou 2,4. Prvky $x \in \mathsf{M}$ jsou konečné množiny. Buď $\mathfrak{M}$ množina těch $m \in \mathsf{M}$, pro která $\Sigma(\mathsf{M}(m))$ je konečná. Podle 2,1 (4) a cvičení 1,3 jest $\Sigma(\mathsf{M}(a)) = \Sigma(\{a\}) = a \in \mathsf{M}$, tedy je to konečná množina a $a \in \mathfrak{M}$. Je-li $m \in \mathfrak{M}\nu_{\mathsf{M}}$, pak podle 2,1 (5) a 1,3:

$$\Sigma(\mathsf{M}[\nu(m)]) = \Sigma(\mathsf{M}(m)) + \Sigma(\{\nu(m)\}) = \Sigma(\mathsf{M}(m)) + \nu(m).$$

Oba sčítanci jsou však konečné množiny, první proto, že $m \in \mathfrak{M}$, druhý proto, že patří do M. Tedy je i součet $\Sigma(\mathsf{M}[\nu(m)])$ konečný, t. j. $\nu(m) \in \mathfrak{M}$. Podle (E) tedy též $\Sigma(\mathsf{M}(n)) = \Sigma(\mathsf{M})$ je konečná.

Cvičení 4,7. Buď f zobrazení spočetné množiny A na B. A si můžeme myslet dobře uspořádanou. Označíme-li $g(b)$ ($b \in \mathsf{B}$) první takový prvek a množiny A, pro který $f(a) = b$, pak g je prosté zobrazení množiny B do A.

Cvičení 4,8. Dá-li se množina prostě zobrazit do konečné množiny, je konečná. (Je totiž ekvivalentní s částí konečné množiny.)

Věta 4,9. *Existuje-li zobrazení konečné množiny* A *na* B, *pak je* B *konečná.*

Důkaz. Plyne z cvičení 4,7 a 4,8.

Cvičení 4,9. Je-li Z konečná množina párů $\{\xi, \eta\}$, pak množina P prvních členů ξ (Q druhých členů η) je konečná. (Neboť Z možno zobrazit na P: $f(\{\xi, \eta\}) = \xi$ a podobně na Q.) Také $\mathsf{P} + \mathsf{Q}$ je konečná. Platí to zvláště, když existuje zobrazení z nějaké množiny M_z na Z.

4,10. Je-li A nekonečná, K konečná, pak $\mathsf{A} - \mathsf{K}$ je nekonečná.

2,5. Přirozená čísla. Podle vět 2,1 a 2,5 si čítání $\mathsf{M}(a, \nu)$ a příslušné uspořádání $<$ spočetné množiny M přesně a jednojednoznačně odpovídají. Je tedy jedno vycházet od čítání nebo od příslušného uspořádání. Definujeme na př.:

Čítání dvou množin jsou si *podobná*, jsou-li si podobná příslušná uspořádání.

Věta 5,1. *Jsou-li množiny* M_1 *a* M_2 *nekonečné spočetné množiny, pak každé čítání množiny* M_1 *je podobné každému čítání množiny* M_2.

Při tom množiny M_1 a M_2 *mohou být různé nebo si rovny.*

Důkaz. Kdyby totiž si podobné nebyly, t. j. typ $M_1 \neq$ $\neq$ typ M_2, pak z 2,3 a trichotomie pro typy by plynulo na př. typ $M_1 <$ typ M_2, t. j. typ $M_1 =$ typ M_{2x} pro jisté $x \in M_2$. Avšak podle cvičení 4,3 by bylo možno psát $M_{2x} = M_2(y)$ a množina M_1 by byla ekvivalentní s konečnou množinou $M_2(y)$ (srv. větu 4,3) a tedy konečná.

Korolár 5,1. *Každá dvě čítání dané množiny jsou si podobná.*

Důkaz. Je-li ta množina konečná, plyne to z věty 4,6. Je-li nekonečná, plyne to z věty 5,1 pro $M_1 = M_2$ rovnou naší množině.

Korolár 5,2. *Každá nekonečná spočetná množina je ekvivalentní s* M.

Důkaz. Neboť při uspořádání podle věty 2,1 je vzhledem k 5,1 podobná množině M.

Označme nyní N jakousi zcela libovolnou, ale jednou pro vždy pevně zvolenou nekonečnou spočetnou množinu, $N(1, \nu)$ pevné čítání množiny N. N nazveme množinou přirozených čísel, její prvky budou t. zv. *přirozená čísla.* Místo $\nu(x)$ budeme psát $x + 1$. Podle věty 2,1 existuje přesně jedno uspořádání $<$ množiny N takové, že $x < x + 1$ pro každé $x \in N$; je to t. zv. *přirozené uspořádání* množiny N.

Ve volbě množiny N a jejího čítání byla, zdá se, značná libovůle. Vzhledem k větě 5,1 to však není tak zlé. Kdybychom provedli jinou volbu, pak by vše zůstalo podobné, t. j. vše by se krylo, až na „označení". Se stanoviska abstraktní matematické theorie nelze takové dvě volby jednu od druhé rozeznat. Na př. Čech říká prvkům množiny N: jeden, dva, tři atd., Němec volí za množinu výrazů: eins, zwei, drei atd., což s hlediska matematiky je jedno. Podle věty 5,1 každá jiná volba množiny N se liší od jmenovaných zase jen „filologicky“. Možno tedy považovat přirozená čísla i jejich přirozené uspořádání za přesně a jednoznačně definované pojmy.

Existence množiny N se nedá dokázat. Je to základní předpoklad matematiky, přirozená čísla jsou od Boha. (Srovnej citát z Kroneckera.) Z toho plyne existence konečných množin a to „nekonečně mnoho“. Podle věty 4,3 jsou totiž množiny $\mathsf{N}(n)$ konečné a pro různá n jsou i množiny $\mathsf{N}(n)$ různé. Je jich tolik co prvků n množiny N, která je nekonečná.

Přirozených čísel užíváme k počítání prvků množin a jejich číslování. Podkladem toho jsou následující dvě věty.

Věta 5,2. *Nechť* $\mathsf{M} \neq \emptyset$ *je konečná množina; pak existuje přesně jedno* $n \in \mathsf{N}$ *takové, že* $\mathsf{M} \sim \mathsf{N}(n)$.

(Říkáme, že M má n prvků, n je *počet prvků* množiny M. Zvláště $\mathsf{N}(n)$ má n prvků).

Důkaz. Množinu M si vzhledem k větám 2,1, 2,3 můžeme myslet dobře uspořádanou. Kdyby typ N $\leq$ typ M, pak by N byla (podobná a tedy) ekvivalentní s částí konečné množiny M, tedy podle věty 4,4 konečná. Tedy trichotomie pro typy dá typ M $<$ typ N, t. j. typ M $=$ typ N_x pro jisté x, čili typ M $=$ typ $\mathsf{N}(n)$ podle cvičení 4,3. Tedy M je ekvivalentní s $\mathsf{N}(n)$. Kdyby M byla ekvivalentní s $\mathsf{N}(n_1)$ i s $\mathsf{N}(n_2)$ a na př. $n_1 < n_2$, pak by $\mathsf{N}(n_2)$ byla ekvivalentní se svou pravou částí $\mathsf{N}(n_1)$, což odporuje větě 4,3. Tedy n je vztahem $\mathsf{M} \sim \mathsf{N}(n)$ přesně určeno.

Je-li M konečná, $\mathsf{M} \sim \mathsf{N}(n)$, označíme $\overline{\mathsf{M}}$ množinu $\mathsf{N}(n)$. Je-li M spočetná nekonečná, označíme $\overline{\mathsf{M}}$ množinu N.

Věta 5,3. $\mathsf{M}(a, \nu)$ *buď čítání množiny* M. *Pak existuje jedno jediné zobrazení* f *množiny* $\overline{\mathsf{M}}$ *do* M *takové, že* $f(1) = a$ *a* $f(m + 1) = \nu[f(m)]$ *pro* $m + 1 \in \mathsf{M}$. f *je jediná podobnost množin* $\overline{\mathsf{M}}$ *a* M.

[Při tom, dáno-li čítání množiny, míníme její uspořádání podle věty 2,1. Čítání množin $\mathsf{N}(n)$ je podle cvičení 2,5 indukováno čítáním množiny N a příslušné uspořádání je stejné jako v N.]

Důkaz. Množiny $\overline{\mathsf{M}}$ a M jsou si podobné. Pro konečnou M to plyne z věty 4,7, pro nekonečnou M z věty 5,1. Za f volme podobnost množin $\overline{\mathsf{M}}$ a M. Pro všecka $m \in \overline{\mathsf{M}}$ jest $1 \leqq m$, tedy $f(1) \leqq f(m)$. Ježto $f(m)$ vyčerpá všecky prvky množiny M, je $f(1)$ první prvek M, tedy $f(1) = a$ podle věty 2,1 (1). Za druhé jest $m < m + 1$ a z $m < x$ plyne $m + 1 \leqq x$. Tedy $(x \in \overline{\mathsf{M}})$ jest $f(m) < f(m + 1)$ a z $f(m) < f(x)$ plyne $f(m + 1) \leqq$ $\leqq f(x)$. Ježto $f(x)$ jsou všecky prvky v M, je tedy $f(m + 1)$ první prvek $y \in \mathsf{M}$, pro který $f(m) < y$, a tedy $f(m + 1) =$ $= \nu[f(m)]$ podle věty 2,1(2).

Mějme nyní dvě zobrazení f: f_1 a f_2, která splňují větu. (Zvláště to mohou být podobnosti, neboť ty podle právě řečeného větu splňují.) Buď $\mathfrak{M}$ množina těch $x \in \overline{\mathsf{M}}$, pro která $f_1(x) = f_2(x)$. Zřejmě $1 \in \mathfrak{M}$. A je-li $m \in \mathfrak{M}$, t. j. $f_1(m) = f_2(m)$, a $m + 1 \in \overline{\mathsf{M}}$, pak $f_1(m + 1) = \nu[f_1(m)] = \nu[f_2(m)] = f_2(m + 1)$, tedy $m + 1 \in \mathfrak{M}$. Podle (E) tedy $\overline{\mathsf{M}} \subset \mathfrak{M}$, tedy $f_1(x) = f_2(x)$ pro všecka x a tedy $f_1 = f_2$. Zobrazení f je jediné; a je to ta svrchu zvolená podobnost.

Cvičení 5,1. Množina A je konečná, když a jen když existuje $n \in \mathsf{N}$ takové, že A má n prvků. [Malá písmena značí přirozená čísla.]

5,2. Je-li $\mathsf{A} \sim \mathsf{A}'$ a má-li A n prvků, pak A' má n prvků.

5,3. Má-li A n prvků a má-li také A' n prvků, pak $\mathsf{A} \sim \mathsf{A}'$.

Nechť A má a prvků, nechť B má b prvků. Jsou-li množiny A a B disjunktní a má-li $\mathsf{A} + \mathsf{B}$ c prvků, píšeme $c =$ $= a + b$.

Cvičení 5,4. „Součet“ $a + b$ je čísly a, b přesně určen. [To značí: Dána čísla a a b. Dva lidé, já a můj přítel, počítají nezávisle na sobě $a + b$. Já si za tím účelem zvolím disjunktní množiny A a B mající a a b prvků. $a + b$ pro mne bude počet prvků množiny $\mathsf{A} + \mathsf{B}$. Můj přítel nevěda o mně si zvolí jiné disjunktní množiny A' a B' mající a a b prvků. $a + b$ pro něho bude počet prvků množiny $\mathsf{A}' + \mathsf{B}'$. Čtenář má ukázat, že ten počet bude stejný jako počet prvků množiny $\mathsf{A} + \mathsf{B}$, že nám oběma vyjde totéž. Plyne to z toho, že podle cvičení 1,15 jest $\mathsf{A} + \mathsf{B} \sim \mathsf{A}' + \mathsf{B}'$ a podle cvičení 5,2 mají ekvivalentní množiny stejný počet prvků.]

Co je to $x + 1$, bylo už dříve definováno: $x + 1 = \nu(x)$. To úplně souhlasí s naší nynější definicí. Neboť $\{\nu(x)\} \sim \sim \{1\}$; tedy podle 2 (4): $\{\nu(x)\} \sim \mathsf{N}(1)$. Množiny $\mathsf{N}(x)$ a $\{\nu(x)\}$ jsou podle 2 (5) disjunktní a $\mathsf{N}[\nu(x)] = \mathsf{N}(x) + \{\nu(x)\}$. Počet prvků je postupně $\nu(x)$, x a 1 a tedy vskutku

$$\nu(x) = x + 1$$

i ve smyslu nynější definice symbolu $x + 1$.

Je-li $\mathsf{C} = \mathsf{A} \times \mathsf{B}$ a má-li A a prvků, B b prvků a C c prvků, pak píšeme $c = a \times b$ či $c = a \,.\, b$ či $c = ab$.

Cvičení 5,5. „Součin“ ab je čísly a a b přesně určen.

Je-li $\mathsf{C} = \mathsf{B}^{\mathsf{A}}$, píšeme podobně $c = b^a$.

Cvičení 5,6. „Mocnina“ b^a je čísly a a b přesně určena.

Ke každým dvěma číslům a a b skutečně lze $a + b$, ab a b^a nalézt, což jsou přirozená čísla.

Cvičení 5,7. Za tím účelem stačí volit $\mathsf{A} = \mathsf{N}(a) \times \{1\}$, $\mathsf{B} = \mathsf{N}(b) \times \{2\}$, při čemž $2 = 1 + 1$. Ty dvě množiny mají totiž skutečně a a b prvků a jsou disjunktní (což potřebujeme k vůli součtu). A množiny $\mathsf{A} + \mathsf{B}$, $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$ a B^{A} jsou konečné a tedy ke každé z nich existuje přirozené číslo, její počet prvků. A ta přirozená čísla jsou právě $a + b$, ab a b^a.

Cvičení 5,8. Nahradíme-li množiny příslušným počtem prvků, nahradí se ekvivalence $\sim$ rovností $=$ (Ekvivalentní množiny mají stejný počet prvků). Volíce $\mathsf{A} = \mathsf{N}(a) \times \{1\}$

$\mathsf{B} = \mathsf{N}(b)\times\{2\}$, $\mathsf{C} = \mathsf{N}(c)\times\{3\}$ $(3 = 2 + 1)$, odvoďte ze cvičení 1,16 až 1,24 tato pravidla:

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$
$$a + b = b + a,$$
$$(ab)\,c = a(bc),$$
$$ab = ba,$$
$$1\,.\,a = a,$$
$$a\,(b + c) = ab + ac,$$
$$c^{a+b} = c^a\,.\,c^b,$$
$$c^{ba} = (c^b)^a,$$
$$c^1 = c.$$

Věta 5,4. *Jest $m < n$, když a jen když existuje x takové, že $n = m + x$.*

Důkaz. Je-li $m < n$, pak $n \in \mathsf{N}(n) - \mathsf{N}(m)$ a tedy množina $\mathsf{X} = \mathsf{N}(n) - \mathsf{N}(m)$ je neprázdná. Je to část množiny $\mathsf{N}(n)$ a tedy podle věty 4,4 konečná; X má řekněme x prvků. Množiny $\mathsf{N}(m)$ a X jsou disjunktní a $\mathsf{N}(n) = \mathsf{N}(m) + \mathsf{X}$. Pro počet prvků to znamená $n = m + x$.

Naopak je vždy $m < m + x$. Pro $x = 1$ to platí. Platí-li to pro x, platí to i pro $x + 1$; neboť $m < m + x < (m + x) + 1 = m + (x + 1)$. Tedy podle (E) to platí pro každé x.

Věta 5,5. *Je-li $m + x = m + y$ anebo $mx = my$, jest $x = y$.*
Je-li $m + x < m + y$ anebo $mx < my$, jest $x < y$.
Je-li $x < y$, jest $m + x < m + y$ a $mx < my$.

Důkaz. Je-li $x < y$, možno psát $y = x + u$ podle věty 5,4. Pak $m + x < (m + x) + u = m + (x + u) = m + y$ a podobně $mx < mx + mu = m\,(x + u) = my$. Z toho plyne poslední tvrzení věty.

Kdyby první tvrzení bylo nesprávné, pak by $x \neq y$ a tedy na př. $x < y$, což by vedlo k nerovnostem $m + x < m + y$

a $mx < my$ proti předpokladu. Tedy i první tvrzení je správné.

Kdyby druhé tvrzení bylo nesprávné, pak by buď $x = y$ a tedy $m + x = m + y$ a $mx = my$ proti předpokladu; anebo by $y < x$ a pak by zase proti předpokladu bylo $m + y < m + x$ a $my < mx$. Tedy všechna tvrzení jsou správná.

Cvičení 5,9. Je-li $m < n$, pak existuje jedno jediné x takové, že $n = m + x$. Označujeme $x = n - m$. Je-li $m' < m$, pak $n - m < n - m'$. Vždy $n - m < n$.

Věta 5,6. *Nechť* A *má* a *prvků; nechť* B *má* b *prvků. Jest* $a < b$, *když a jen když* A *je ekvivalentní s pravou částí množiny* B.

Důkaz. Nechť A je ekvivalentní s pravou částí A' množiny B. Pak A' a $\mathsf{B} - \mathsf{A}'$ jsou neprázdné disjunktní a podle 4,4 konečné množiny mající a a řekněme x prvků. Jest $\mathsf{B} = \mathsf{A}' + (\mathsf{B} - \mathsf{A}')$ a tedy $b = a + x$, tedy $a < b$ podle věty 5,4.

Je-li naopak $a < b$, pak $\mathsf{N}(b) = \mathsf{N}(a) + \mathsf{X}$, $\mathsf{X} = \mathsf{N}(b) - \mathsf{N}(a)$. Množiny $\mathsf{N}(a)$ a X jsou zase neprázdné, disjunktní a konečné. Podle cvičení 1,25 lze psáti $\mathsf{B} = \mathsf{B}_1 + \mathsf{B}_2$ s disjunktními sčítanci, $\mathsf{B}_1 \sim \mathsf{N}(a)$, $\mathsf{B}_2 \sim \mathsf{X}$. Ti sčítanci jsou tedy neprázdní a tedy B_1 je pravá část množiny B a je ekvivalentní s A.

Buď 0 nový symbol, „počet prvků množiny $\emptyset$", $\mathsf{N}_0 = \{0\} + \mathsf{N}$.

Cvičení 5,10. Buď $\nu_0(0) = 1$, $\nu_0(x) = x + 1$ pro $x \in \mathsf{N}$; pak $\mathsf{N}_0(0, \nu_0)$ je čítání množiny N_0. Tím čítáním je určeno uspořádání $\prec$: $x \prec \nu_0(x)$. Jest vždy $0 \preceq x$ a pro $x \in \mathsf{N}$, $y \in \mathsf{N}$ jest $x \prec y$, když a jen když $x < y$. Proto pišme prostě $<$ místo $\prec$.

5,11. Definuji-li $0 + x = x + 0 = x$, $0 \,.\, x = x \,.\, 0 = 0$, $x^0 = 1$, $0^0 = 1$, $0^x = 0$ pro $x \neq 0$, pak platí pravidla ve cvičení 5,8, i když a, b, c jsou prvky množiny N_0.

2,6. Spočetné množiny. Nejprve kriterium spočetnosti:

Věta 6,1. *Je-li* M *dobře uspořádaná množina a jsou-li všecky množiny* M_x *pro* $x \in \mathsf{M}$ *konečné, pak* M *je spočetná.*

Dokonce dané uspořádání množiny M *patří k nějakému čítání* (ve smyslu věty 2,1).

Důkaz. Označme a první prvek množiny M. Není-li x poslední prvek množiny M, označme $\nu(x)$ první prvek y, pro který $x < y$. ($<$ je uspořádání množiny M.) Tvrdím, že $\mathsf{M}(a, \nu)$ je čítání množiny M. Že platí (A), (B) a (C), je zřejmé. Je-li $x \neq y$, tedy na př. $x < y$, jest $\nu(x) \leqq y < \nu(y)$, z čehož plyne (D). Nechť $\mathfrak{M}$ splňuje předpoklady podmínky (E). Kdyby neplatilo $\mathsf{M} \subset \mathfrak{M}$, byla by $\mathsf{M} - \mathfrak{M}$ neprázdná množina a měla by tedy první prvek x. Ježto M_x je konečná (a neprázdná, neboť $a \in \mathsf{M}_x$), má podle věty 4,5 bis poslední prvek y. Jest $y < x$ a pro $y < z$ jest z non $\in \mathsf{M}_x$, t. j. $x \leqq z$. Je tedy $x = \nu(y)$. Avšak z $y < x$ a definice prvku x plyne $y \in \mathfrak{M}$ a tedy $\nu(y) \in \mathfrak{M}$, t. j. $x \in \mathfrak{M}$, což je spor, neboť $x \in \mathsf{M} - \mathfrak{M}$. Tedy vskutku $\mathsf{M} \subset \mathfrak{M}$ a tvrzení podmínky (E) je též splněno. A uspořádání $<$ patří k čítání $\mathsf{M}(a, \nu)$, neboť $x < \nu(x)$.

Věta 6,2. *Každá část spočetné množiny je spočetná.*

Důkaz. Buď M spočetná množina uspořádaná podle věty 2,1 a 2,3, $\mathsf{M}' \subset \mathsf{M}$. Pak je M' dobře uspořádaná množina a $\mathsf{M}'_x \subset \mathsf{M}_x$. Podle cvičení 4,3 a věty 4,3 je M_x a tedy podle věty 4,4 také M'_x konečná. Podle předešlé věty je tedy M' spočetná.

Cvičení 6,1. Nechť M je spočetná třída, jejíž prvky jsou konečné (spočetné) množiny. Pak možno sestrojit spočetnou třídu M', jejíž prvky jsou konečné (spočetné) množiny *po dvou disjunktní*, a $\Sigma(\mathsf{M}') = \Sigma(\mathsf{M})$. (Podle věty 5,3 možno prvky množiny M očíslovat přirozenými čísly $n \in \overline{\mathsf{M}}$, psát je ve tvaru $f(n)$. $f(n)$ jsou konečné (spočetné) množiny. A teď označme $f'(n)$ množinu těch x, která patří do $f(n)$ a nepatří do žádné dřívější množiny $f(m)$, $m < n$. Ty množiny $f'(n)$, které jsou prázdné, vynechejme. Zbylé $f'(n)$ tvoří třídu M' a f' je prosté zobrazení *části* množiny $\overline{\mathsf{M}}$ na M' (neboť prázdná $f'(n)$ byla vynechána). Jest $f'(n) \subset f(n)$. Že M' vyhovuje, dokáže čtenář sám: $x \in f'(n)$, je-li n první číslo, pro něž $x \in f(n)$, a jen tehdy. Je-li M konečná, je také M' konečná.)

6,2. Je-li M třída uspořádaná pravidlem $<$, jejíž prvky jsou po dvou disjunktní množiny uspořádané pravidly $<$ (k omylu nedojde), pak pro prvky x a y množiny $\Sigma(\mathsf{M})$ definujeme $x < y$ takto: Je-li $x \in \mathsf{X} \in \mathsf{M}$, $y \in \mathsf{Y} \in \mathsf{M}$ a při uspořádání třídy M jest $\mathsf{X} < \mathsf{Y}$, pak $x < y$. Je-li $\mathsf{X} = \mathsf{Y}$, pak $x < y$ je totéž jako při uspořádání množiny $\mathsf{X} = \mathsf{Y}$. (T. j. nejprve uspořádáme celé množiny $\mathsf{X} \in \mathsf{M}$ a pak v každé z nich uspořádáme prvky, tak jak už byly.) Jsou-li na př. prvky množiny M jen dva ($\mathsf{X} < \mathsf{Y}$):

$$\mathsf{X} : \ldots,$$
$$\mathsf{Y} : \ldots,$$

pak množina $\mathsf{S} = \Sigma(\mathsf{M}) = \mathsf{X} + \mathsf{Y}$ je uspořádána takto:

$$\underset{\mathsf{X}}{\ldots} \quad \underset{\mathsf{Y}}{\ldots}$$

Dokažte, že $<$ je uspořádání množiny $\Sigma(\mathsf{M})$.

6,3. Je-li M dobře uspořádaná a všecky množiny $\mathsf{X} \in \mathsf{M}$ také, pak $\Sigma(\mathsf{M})$ je dobře uspořádaná.

[První prvek v $\mathsf{C} \subset \Sigma(\mathsf{M})$, $\mathsf{C} \neq \emptyset$ se sestrojí takto: Najdeme první množinu X, pro kterou $\mathsf{XC} \neq \emptyset$ a v XC (což je část množiny X) první prvek.]

6,4. Je-li $\mathsf{S} = \Sigma(\mathsf{M})$, $x \in \mathsf{X} \in \mathsf{M}$, pak

$$\mathsf{S}_x \subset \Sigma(\mathsf{M}_\mathsf{X}) + \mathsf{X}.$$

(T. j.: Prvky $y < x$ jest hledat v množinách $\mathsf{Y} \leqq \mathsf{X}$.)

A teď přijde velmi pohodlné kriterium spočetnosti.

Věta 6,3. *Nechť* M *je spočetná třída, jejíž prvky jsou konečné množiny. Pak* $\Sigma(\mathsf{M})$ *je spočetná.*

Důkaz. Podle cvičení 6,1 možno předpokládat, že množiny patřící do M jsou po dvou disjunktní. Množinu M možno si myslet dobře uspořádanou podle vět 2,1 a 2,3. Rovněž množiny $X \in M$ možno dobře uspořádat. Pak podle cvičení 6,3 je $S = \Sigma(M)$ dobře uspořádaná a podle cvičení 6,4

$$S_x \subset \Sigma(M_X) + X.$$

Avšak podle věty a cvičení 4,3 je M_X konečná třída konečných množin. Podle věty 4,8 je tedy součet napravo konečná množina a tedy podle věty 4,4 je S_x konečná. Tedy podle věty 6,1 je S spočetná.

Cvičení 6,5. Buď M' třída všech množin $N(n) \times N(n)$, $n \in N$. Pak M' je spočetná a $\Sigma(M') = N \times N$.

(Je-li $f(n) = N(n) \times N(n)$, je f prosté zobrazení množiny N na M'. Je-li $m \leqq r$ a $n \leqq r$, na př. $r = m + n$, jest $\{m, n\} \in \in N(r) \times N(r)$.)

6,6. Je-li X spočetná, pak existuje prosté zobrazení f_X množiny X do N. Pro každou X si zvolme pevně takové f_X. (f_X existuje na základě ekvivalence $X \sim \overline{X}$.)

6,7. Jsou-li A a B spočetné, položme $f(\{x, y\}) = \{f_A(x), f_B(y)\}$. Pak f je prosté zobrazení množiny $A \times B$ do $N \times N$.

6,8. Buď M spočetná třída disjunktních spočetných množin, $x \in X \in M$. Položme $f(x) = \{f_M(X), f_X(x)\}$.

Pak f je prosté zobrazení množiny $\Sigma(M)$ do $N \times N$. (Když se změní x, pak se buď změní X a pak se změní $f_M(X)$. Anebo se X nezmění a pak se musí změnit $f_X(x)$.

6,9. Množina, kterou možno prostě zobrazit do spočetné množiny je spočetná. (Je ekvivalentní s částí spočetné množiny.)

6,10. Množina, která má jen dva prvky, je spočetná. (Jsou-li ty prvky a a b, pišme $f(a) = 1$ a $f(b) = 1 + 1$. Pak f je prosté zobrazení do N.)

Věta 6,4. *Jsou-li* A *a* B *spočetné množiny, pak množiny* $A + B$ *a* $A \times B$ *jsou spočetné.*

Je-li M *spočetná třída, jejíž prvky jsou spočetné množiny, pak je* $\Sigma(M)$ *spočetná.*

Důkaz. Především je $\mathsf{N} \times \mathsf{N}$ spočetná. Neboť je rovna $\Sigma(\mathsf{M}')$, kde M' je podle cvičení 6,5 spočetná a její prvky $\mathsf{N}(n) \times \mathsf{N}(n)$ podle vět 4,3 a 4,8 konečné, tedy $\Sigma(\mathsf{M}')$ podle věty 6,3 spočetná.

Podle cvičení 6,1 je dovoleno předpokládat, že množiny z třídy M jsou po dvou disjunktní.

Spočetnost množin $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$ a $\Sigma(\mathsf{M})$ plyne ze spočetnosti množiny $\mathsf{N} \times \mathsf{N}$ a cvičení 6,7, 6,8, 6,9. $\mathsf{A} + \mathsf{B}$ je jen zvláštní případ součtu $\Sigma(\mathsf{M})$, kde M má jen dva prvky A a B; podle cvičení 6,10 je M skutečně spočetná.

Věta 6,5. *Je-li* B *spočetná a* A *konečná, je* B^A *spočetná.*

Důkaz. Podle věty 2,4 pišme $\mathsf{A} = \mathsf{M} = \mathsf{M}(n)$. Podle věty 2,1 (4), (5) a cvičení 1,22 jest

$$\mathsf{B}^{\mathsf{M}(a)} = \mathsf{B}^{\{a\}}, \quad \mathsf{B}^{\mathsf{M}[\nu(m)]} = \mathsf{B}^{\mathsf{M}(m)} \times \mathsf{B}^{\{\nu(m)\}}.$$

Množiny $\mathsf{B}^{\{a\}}$ a $\mathsf{B}^{\{\nu(m)\}}$ jsou podle 1,24 ekvivalentní s B a tedy spočetné. Je-li tedy $\mathsf{B}^{\mathsf{M}(m)}$ spočetná, je podle věty 6,4 také $\mathsf{B}^{\mathsf{M}[\nu(m)]}$ spočetná. Označíme-li tedy $\mathfrak{M}$ množinu všech m se spočetnou $\mathsf{B}^{\mathsf{M}(m)}$, jest $a \in \mathfrak{M}$ a z $m \in \mathfrak{M}\nu_\mathsf{M}$ plyne $\nu(m) \in \mathfrak{M}$. Podle (E) tedy $n \in \mathfrak{M}$, t. j. $\mathsf{B}^{\mathsf{M}(n)} = \mathsf{B}^\mathsf{A}$ je spočetná.

Kdyby A byla nekonečná spočetná, pak by B^A byla nespočetná i kdyby B byla konečná (s víc než jedním prvkem).

Věta 6,6. *Existuje-li zobrazení spočetné množiny* A *na* B, pak *je* B *spočetná.*

Důkaz. Plyne ze cvičení 4,7 a 6,9.

2,7. Hustá uspořádání spočetných množin. Začneme příkladem. Budu definovat kladné zlomky a čtenář bude sledovat, jak formalisuji to, co o tom ví ze školy. Malá písmena jsou přirozená čísla.

Označíme $\dfrac{a}{b}$ množinu všech párů $\{c; d\}$ takových, že $ad = bc$. Říkáme, že $\dfrac{a}{b}$ je kladný zlomek. Označíme $\mathfrak{Z}$ množinu všech kladných zlomků.

Cvičení 7,1. $\{a; b\} \in \frac{a}{b}$.

7,2. Je-li $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, pak $ad = bc$. (Neboť $\{c; d\} \in \frac{a}{b}$.)

7,3. Je-li $ad = bc$, jest $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. (Jest $ady = bcy$, tedy z $\{x; y\} \in \frac{a}{b}$, t. j. $ay = bx$ plyne $bdx = bcy$, $dx = cy$. $\{x; y\} \in \frac{c}{d}$ a naopak.)

Tedy $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ znamená totéž jako $ad = bc$. V tom už čtenář poznává zlomky. Teď ty zlomky uspořádáme pravidlem $<$. Nerovnost $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ bude znamenat totéž jako $ad < bc$.

Je v tom jeden háček; týž zlomek lze psát více způsoby (na př. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, neboť $1 \,.\, 4 = 2 \,.\, 2$). Musíme se přesvědčit, že nerovnosti mezi zlomky nezávisí na tom speciálním způsobu psaní. Je-li tedy $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$ a $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, dlužno ukázat, že také $\frac{a'}{b'} < \frac{c'}{d'}$. Předpoklady možno psát jinak, totiž $ab' = a'b$, $cd' = c'd$, $ad < bc$. Z toho postupně plyne: $cd' \,.\, a'b = c'd \,.\, a'b = c'd \,.\, ab' = ad \,.\, c'b' < bc \,.\, c'b'$. Tedy $bc \,.\, a'd' < bc \,.\, c'b'$, tedy $a'd' < c'b'$, tedy skutečně $\frac{a'}{b'} < \frac{c'}{d'}$.

Cvičení 7,4. $<$ je uspořádání množiny $\mathfrak{F}$. (Je-li na př. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{e}{f}$, jest $ad < bc$, $cf < de$ tedy $adf < bcf < bde$, tedy $af < be$, z toho transitivita.)

Cvičení. 7,5. Je-li $\frac{a}{b} = \frac{a}{c}$, jest $b = c$.

Je-li $\frac{a}{b} = \frac{c}{b}$, jest $a = c$.

Zvolme za m první přirozené číslo, pro které $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ s vhodným n. Podle cvičení 7,4 je tím i n přesně určeno. Čísla m a n jsou charakterisována tím, že pro $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ nutně $m \leqq a$, $n \leqq b$. (m bylo tak už voleno. Kdyby $b < n$, pak by bylo $bm < mn \leqq an$, tedy $bm < an$, t. j. $\frac{m}{n} < \frac{a}{b}$.) $\frac{m}{n}$ je t. zv. „zkrácený tvar" zlomku $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$.

Věta 7,1. $\mathfrak{F}$ *je spočetná množina.*

Důkaz. Zlomky pišme vesměs ve zkráceném tvaru. Buď $f\left(\frac{m}{n}\right) = \{m; n\}$. Je-li $\frac{m_1}{n_1} \neq \frac{m_2}{n_2}$, pak ovšem $\{m_1; n_1\} \neq \{m_2; n_2\}$. Tedy f je prosté zobrazení množiny $\mathfrak{F}$ do $\mathsf{N} \times \mathsf{N}$, tedy podle věty 6,4 a cvičení 6,9 je $\mathfrak{F}$ spočetná.

Uspořádání $<$ množiny A nazývá se *husté* (dicht, dense, dense) a A *hustě uspořádaná*, když pro každé dva prvky $x \in \mathsf{A}$, $y \in \mathsf{A}$, $x < y$ existují prvky r, s, t množiny A takové, že $r < x < s < y < t$. Při tom předpokládáme, že A má aspoň dva různé prvky.

Věta 7,2. $\mathfrak{F}$ *je hustě uspořádaná množina.*

Důkaz. Nechť $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$; pak si čtenář sám zjistí, že

$$\frac{a}{b+1} < \frac{a}{b} < \frac{ad+bc}{2bd} < \frac{c}{d} < \frac{c+1}{d}.$$

$\mathfrak{F}$ má dva různé prvky, na př. $\frac{1}{1}$ a $\frac{1+1}{1}$: $1 \,.\, 1 = 1$, $(1+1) \,.\, 1 = 1 + 1$, $1 \neq 1 + 1$, tedy $\frac{1}{1} \neq \frac{1+1}{1}$.

Cvičení 7,6. $\mathfrak{F}$ je nekonečná. (Stačí najít nekonečnou část množiny $\mathfrak{F}$. A to bude množina všech zlomků $\frac{n}{1}$, $n \in \mathsf{N}$.)

7,7. $\frac{m}{1} < \frac{n}{1}$, když a jen když $m < n$.

$\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$, když a jen když $n < m$.

7,8. Hustě uspořádaná množina nemá ani první ani poslední prvek.

7,9. Husté uspořádání není dobré.

7,10. Hustě uspořádaná množina je nekonečná. (Z toho znova plyne, že $\mathfrak{J}$ je nekonečná.)

7,11. Každá množina $\mathsf{A} + \mathfrak{J}$ je nekonečná. (Užij věty 4,4 a inkluse $\mathfrak{J} \subset \mathsf{A} + \mathfrak{J}$.)

7,12. Je-li X uspořádána pravidlem $<$, pak $\mathsf{X} \times \{a\}$ je uspořádána předpisem: $\{x; a\} < \{y; a\}$ pro $x < y$. Jest typ $(\mathsf{X} \times \{a\}) =$ typ X.

Máme-li dokazovat typ $\mathsf{X} =$ typ Y možno tedy předpokládat $\mathsf{XY} = \emptyset$; neboť místo X a Y možno vzít $\mathsf{X} \times \{1\}$ a $\mathsf{Y} \times \{2\}$.

Ve cvičeních 7,13 a 7,14 bude $\mathsf{P}' = \mathsf{P} + \{k\}$, $\mathsf{Q}' = \mathsf{Q} + \{u\}$. P' a Q' budou konečné uspořádané množiny (uspořádání $<$), π podobnost množin P a Q.

7,13. Buď k non ϵ P, a poslední prvek ϵ P, pro který $a < k$, b první, pro který $k < b$, $\pi(a) < u < \pi(b)$. Pak u non ϵ Q. Pro $x \in \mathsf{P}$ buď $\pi'(x) = \pi(x)$, $\pi'(k) = u$. Pak π' je podobnost množin P' a Q'. (Není-li prvku a nebo b, mysleme si vynecháno vše, co se ho týká.)

(Je-li $x \in \mathsf{P}$, $x < k$, pak množina všech prvků z P, které jsou $< k$, je neprázdná. A z konečnosti množiny P plyne existence prvku $a \in \mathsf{P}$ posledního takového, že je $< k$. Z $x < k$ plyne $x \leqq k$.)

7,14. Buď u non ϵ Q, a poslední prvek ϵ Q, pro který $a < u$, b první, pro který $u < b$, $\pi^{-1}(a) < k < \pi^{-1}(b)$. Pak k non ϵ P. Pro $x \in \mathsf{P}$ buď $\pi'(x) = \pi(x)$, $\pi'(k) = u$. Pak π' je podobnost množin P' a Q'.

(Není-li prvku a nebo b, mysleme si vynecháno vše, co se ho týká.)

7,15. Je-li A spočetná, pak existuje prosté zobrazení s množiny $A + \mathfrak{J}$ na N.

Spočetná množina $\mathfrak{J}$ je při svrchu popsaném t. zv. *přirozeném uspořádání* uspořádána hustě. A to její uspořádání má tu pozoruhodnou a důležitou vlastnost, že je to v podstatě jediné husté uspořádání spočetné množiny:

Věta 7,3. *Nechť* A *je hustě uspořádaná spočetná množina, pak* typ A = typ $\mathfrak{J}$.

Důkaz. Podle cvičení 7,12 možno předpokládat $A\mathfrak{J} = \emptyset$ a podle cvičení 7,15 existuje prosté zobrazení s množiny $A + \mathfrak{J}$ na N.

Buď ξ resp. η prvek množiny A, resp. $\mathfrak{J}$ s co nejmenším $s(\xi)$, resp. $s(\eta)$. Označme $P_1 = \{\xi\}$, $Q_1 = \{\eta\}$, $\wp(\xi) = \eta$. Pak $\wp$ je podobnost množin P_1 a Q_1, $P_1 \subset A$, $Q_1 \subset \mathfrak{J}$.

Vtip našeho důkazu bude ten, že budeme sestrojovat podobnosti jakýchsi množin $P_x \subset A$ s jakýmisi $Q_x \subset \mathfrak{J}$. Ta P_x a Q_x budeme postupně zvětšovat, až se nám podaří sestrojit podobnost celých množin A a $\mathfrak{J}$.

Buď π podobnost množin $P \subset A$ a $Q \subset \mathfrak{J}$. Množina $P + Q$ buď konečná. Podle cvičení 4,10 existují tedy prvky $w \in (A + \mathfrak{J}) - (P + Q)$. Volme w tak, aby $s(w)$ bylo co nejmenší.

Je-li $w \in A$ (resp. $w \in \mathfrak{J}$), buď a poslední prvek v P (resp. v Q) takový, že $a < w$ a b první takový, že $w < b$. (Není-li prvku a nebo b, myslíme si vynecháno vše, co se ho týká. Jsou-li množiny P a Q prázdné, pak ty podmínky odpadnou vůbec a bude $k = \xi$, $u = \eta$, $\pi' = \wp$.)

A teď rozeznáváme dva případy:

1. Je-li $w \in A$, budiž $k = w$; z hustoty množiny $\mathfrak{J}$ plyne existence prvku $u \in \mathfrak{J}$ takového, že $\pi(a) < u < \pi(b)$. Volme u tak, aby $s(u)$ bylo co nejmenší.

2. Je-li $w \in \mathfrak{J}$, budiž $u = w$; z hustoty množiny A plyne existence prvku $k \in A$ takového, že $\pi^{-1}(a) < k < \pi^{-1}(b)$. Volme k tak, aby $s(k)$ bylo co nejmenší.

Podle cvičení 7,13 a 7,14 v každém případě k non ϵ P a u non ϵ Q. Dále, klademe-li $\pi'(x) = \pi(x)$ pro $x \epsilon \mathsf{P}$ a $\pi(k) = u$, je π' podobnost množin $\mathsf{P}' = \mathsf{P} + \{k\}$ a $\mathsf{Q}' = \mathsf{Q} + \{u\}$.

Tím jsme získali methodu, jak podobnost množin P a Q rozšířit na větší množiny P' a Q'. F bude množina všech podobností konečných částí množiny A s částmi množiny $\mathfrak{f}$.

Pro každé $y < x$ ($x \epsilon \mathsf{N}$) mějme již definovánu takovou podobnost $z(y)$. Pro $x > 1$ možno psát $x = m + 1$. Máme tedy zvláště definovánu jakousi podobnost $\pi = z(m)$ konečných množin $\mathsf{P} \subset \mathsf{A}$ a $\mathsf{Q} \subset \mathfrak{f}$. Abychom mohli definovat indukcí, nutno říci, co to je $g(z)$ v F. Naše $g(z)$ bude podobnost π' množin P' a Q' sestrojená svrchu. Podle (E) (pro $\mathsf{M} = \mathsf{N}$) existuje tedy zobrazení f množiny N do F takové, že $f(1) = \emptyset$ a $f(x) = g(f_x)$ pro $1 < x \epsilon \mathsf{N}$. $f(x) \epsilon \mathsf{F}$ a tedy $f(x)$ je podobnost π_x jakési konečné $\mathsf{P}_x \subset \mathsf{A}$ a jakési konečné $\mathsf{Q}_x \subset \mathfrak{f}$.

(0) Je-li $\pi = \pi_m$, $\mathsf{P} = \mathsf{P}_m$, $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}_m$, pak $\pi_{m+1} = \pi'$, $\mathsf{P}_{m+1} = \mathsf{P}'$, $\mathsf{Q}_{m+1} = \mathsf{Q}'$. Tedy $\mathsf{P}_m \subset \mathsf{P}_{m+1}$, $\mathsf{Q}_m \subset \mathsf{Q}_{m+1}$ a $\pi_{m+1}(x) = \pi(x)$ pro $x \epsilon \mathsf{P}_m$.

[Položme $x = m + 1$, $z = f_x$. Jest $\pi = \pi_m = f(m) = f_x(m) = z(m)$. Tedy $g(z) = \pi'$. Avšak $g(z) = g(f_x) = f(x) = \pi_x$, tedy vskutku $\pi' = \pi_x = \pi_{m+1}$.]

(1) Je-li $m < n$, jest $\mathsf{P}_m \subset \mathsf{P}_n$, $\mathsf{Q}_m \subset \mathsf{Q}_n$ a pro $x \epsilon \mathsf{P}_m$ jest $\pi_n(x) = \pi_m(x)$.

[Dostane-li se n z m přičteními jedničky 1, platí to podle (0).] Položme obecně $n = m + v$.

Buď $\mathfrak{M}$ množina všech v takových, že (1) platí pro $n = m + v$. Pak, jak jsme řekli, $1 \epsilon \mathfrak{M}$. Buď $v \epsilon \mathfrak{M}$. Pak $\mathsf{P}_m \subset \mathsf{P}_{m+v} \subset \mathsf{P}_{(m+v)+1} = \mathsf{P}_{m+(v+1)}$. Stejně $\mathsf{Q}_m \subset \mathsf{Q}_{m+(v+1)}$. Pro $x \epsilon \mathsf{P}_m$ jest $\pi_m(x) = \pi_{m+v}(x) = \pi_{(m+v)+1}(x) = \pi_{m+(v+1)}(x)$. Tedy $x + 1 \epsilon \mathfrak{M}$. Z (E) pak plyne $\mathsf{N} \subset \mathfrak{M}$, t. j., že (1) platí pro všechna v, $n = m + v$.

Buď $\mathfrak{P}$ resp. $\mathfrak{Q}$ množina všech x, která patří aspoň do jednoho P_n resp. Q_n. Je-li $x \epsilon \mathsf{P}_n$, položme $\omega(x) = \pi_n(x)$. Podle (1) je $\omega(x)$ určeno prvkem x a nikterak nezávisí na n. Jest $\omega(x) \in \in \mathsf{Q}_n$ a tedy $\omega(x) \in \mathfrak{Q}$. Je-li naopak $y \in \mathfrak{Q}$, pak $y \in \mathsf{Q}_n$ pro jisté n a tedy $y = \pi_n(x)$ pro jisté $x \in \mathsf{P}_n$, t. j. $y = \omega(x)$ pro jisté $x \in \mathfrak{P}$. Je tedy ω zobrazení množiny $\mathfrak{P}$ na $\mathfrak{Q}$.

(2) ω je podobnost množin $\mathfrak{P}$ a $\mathfrak{Q}$.

[Buď $x \in \mathfrak{P}$, $y \in \mathfrak{P}$, $x < y$ a na př. $x \in \mathsf{P}_m$ a $y \in \mathsf{P}_n$. Buď $r = m + n$; pak $r > m$ a $r > n$ a tedy podle (1) $\mathsf{P}_m \subset \mathsf{P}_r$, $\mathsf{P}_n \subset \mathsf{P}_r$, tedy $x \in \mathsf{P}_r$, $y \in \mathsf{P}_r$. Jest $\omega(x) = \pi_r(x)$ a $\omega(y) = \pi_r(y)$. Ježto π_r je podobnost, jest $\pi_r(x) < \pi_r(y)$, tedy $\omega(x) < \omega(y)$. Tedy ω je podobnost.]

A teď nám už zbývá dokázat, že $\mathfrak{P} = \mathsf{A}$, $\mathfrak{Q} = \mathfrak{F}$ a budeme mít podobnost ω množin A a $\mathfrak{F}$. Ježto $\mathfrak{P} \subset \mathsf{A}$, $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{F}$, stačí podle cvičení 1,26 dokázat jen

$$\text{(3)} \qquad \mathfrak{P} + \mathfrak{Q} = \mathsf{A} + \mathfrak{F}.$$

[Kdyby ne, pak by existoval prvek $h \in (\mathsf{A} + \mathfrak{F}) - (\mathfrak{P} + \mathfrak{Q})$. Volme h tak, aby $r = s(h)$ bylo co nejmenší. Množina N_r všech přirozených $x < r$ je konečná a tedy je konečná množina $s^{-1}(\mathsf{N}_r)$ všech $\xi \in \mathsf{A} + \mathfrak{F}$, $s(\xi) < r$. A podle volby čísla r jest pro taková ξ vždy $\xi \in \mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$, tedy $\xi \in \mathsf{P}_m$ nebo $\in \mathsf{Q}_m$ pro jisté $m = m(\xi)$. m je zobrazení množiny těch ξ na jistou množinu čísel: na množinu všech $m(\xi)$, která je podle věty 4,9 konečná (neboť množina těch ξ je konečná). Má tedy množina těch $m(\xi)$ podle věty 4,7 poslední prvek n. Jest tedy vždy $m(\xi) \leqq n$, tedy podle (1) $\mathsf{P}_{m(\xi)} \subset \mathsf{P}_n$ a $\mathsf{Q}_{m(\xi)} \subset \mathsf{Q}_n$. Tedy všecka naše ξ (pro která $s(\xi) < r$) patří do $\mathsf{P}_n + \mathsf{Q}_n$. Je tedy h takový prvek, že h non $\in \mathsf{P}_n + \mathsf{Q}_n$ a to s co nejmenším $s(h)$. (Je-li $s(h) = 1$, není takových ξ; tu volíme n libovolně.) Buď $x = n + 1$; je-li $\pi = \pi_n$, $\mathsf{P} = \mathsf{P}_n$, $\mathsf{Q} = \mathsf{Q}_n$, pak podle (0) jest $\mathsf{P}_x + \mathsf{Q}_x = \mathsf{P}' + \mathsf{Q}'$. w byl prvek množiny $\mathsf{A} + \mathfrak{F}$, w non $\in \in \mathsf{P} + \mathsf{Q} = \mathsf{P}_n + \mathsf{Q}_n$ s co nejmenším $s(w)$. To je ale charakteristické pro prvek h. Tedy $w = h$. Avšak $w \in \mathsf{P}' + \mathsf{Q}'$, t. j. podle (0) $h \in \mathsf{P}_x + \mathsf{Q}_x$ a tedy přece jenom $h \in \mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$ proti předpokladu.]

Tím jsme důkaz věty 7,3 dokončili.

Cvičení 7,16. Je-li A podobná množině $\mathfrak{f}$ (t. j. typ $\mathsf{A} =$ $=$ typ $\mathfrak{f}$), pak A je spočetná hustě uspořádaná; A nemá prvního ani posledního prvku.

Cvičení 7,17. Je-li A uspořádaná spočetná, pak existuje $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{f}$ taková, že typ $\mathsf{A} =$ typ $\mathfrak{Q}$.

[Důkaz pro konečnou A je lehký. Pro nekonečnou A je stejný jako předešlý. Jenomže s bude prosté zobrazení množiny A na N, $w \in \mathsf{A} - \mathsf{P}$ s co nejmenším $s(w)$. Případ (2) tedy padá. A (3) zní: $\mathfrak{P} = \mathsf{A}$. A v posledním odstavci nepřímý důkaz pro (3) začíná takto: Kdyby ne (t. j. kdyby $\mathfrak{P} \neq \mathsf{A}$), pak by existoval prvek $h \in \mathsf{A} - \mathfrak{P}$. Ostatek je stejný.]

[Typy uspořádaných spočetných množin jsou tedy typy částí množiny $\mathfrak{f}$. A $\mathfrak{f}$ je sama uspořádaná spočetná. Říkáme, že $\mathfrak{f}$ je *universální model* uspořádaných spočetných množin.]

[$\mathfrak{f}$ je v jistém smyslu nejmenší hustě uspořádaná množina:]

Věta 7,4. *Buď* C *hustě uspořádaná, pak existuje* $\mathsf{A} \subset \mathsf{C}$, typ $\mathsf{A} =$ typ $\mathfrak{f}$.

Důkaz. F bude množina všech konečných částí množiny C. Buď $\mathsf{P} \in \mathsf{F}$, a první, b poslední prvek množiny P; je-li $x \in \mathsf{P} -$ $- \{b\}$, buď x^* první prvek množiny P takový, že $x < x^*$. (Viz věty 4,5 a 4,5 bis.) Vzhledem k hustotě množiny C existují prvky d a c_x v P, $d < a$, $x < c_x < x^*$, $b < c_b$. Je-li $\varphi(x) = c_x$, je φ zobrazení množiny P na množinu $\mathfrak{C}$ všech c_x; je tedy podle věty 4,9 $\mathfrak{C}$ konečná a podle 4,8 je konečná i $\mathsf{P}' = \mathsf{P} + (\mathfrak{C} + \{d\})$, která vznikne z P přidáním prvků c_x a d. Je-li $z(y) \in \mathsf{F}$ pro $y < x$, $x \in \mathsf{N}$, definuji $g(z)$ takto: Položíme $x = m + 1$ a $z(m) = \mathsf{P}$; pak $g(z) = \mathsf{P}'$. Označme $\wp$ libovolnou část množiny C, pozůstávající ze dvou (různých) prvků. A f budiž zobrazení množiny N do F takové, že $f(1) =$ $= \wp$ a $f(x) = g(f_x)$. Existuje podle ($\mathfrak{E}$). Označme $f(x) = \mathsf{P}_x$.

(1) Je-li $m < n$, jest $\mathsf{P}_m \subset \mathsf{P}_n$; $\mathsf{P}_{m+1} = \mathsf{P}'_m$. (Neboť pro $n = m + 1$, $z = f_n$ jest $\mathsf{P}_n = f(n) = g(f_n) = g(z) = \mathsf{P}'$, kde $\mathsf{P} = z(m) = f_n(m) = f(m) = \mathsf{P}_m$. Tedy $\mathsf{P}_{m+1} = \mathsf{P}'_m$, tedy $\mathsf{P}_m \subset \mathsf{P}_{m+1}$ a podle cvičení 7,17 obecně $\mathsf{P}_m \subset \mathsf{P}_n$.)

Je-li $\mathfrak{J}$ třída všech $f(n)$, pak f je zobrazení množiny N na $\mathfrak{J}$, tedy podle věty 6,6 $\mathfrak{J}$ spočetná a podle věty 6,3 $\mathsf{A} = \Sigma(\mathfrak{J})$ spočetná. Jest $\mathsf{A} \subset \mathsf{C}$. Podle věty 7,3 jde jen o to, že A je hustě uspořádaná.

A obsahuje aspoň dva prvky, neboť $\wp \subset \mathsf{A}$. Buď $x \in \mathsf{A}$, $y \in \mathsf{A}$, $x < y$. Jest na př. $x \in \mathsf{P}_m$, $y \in \mathsf{P}_n$, tedy pro $r = m + n$ podle (1) $x \in \mathsf{P}_r$, $y \in \mathsf{P}_r$. Označme $\mathsf{P}_r = \mathsf{P}$; jest $x < x^* \leqq y$ a $d < x < c_x < y < c_b$; při tom prvky d, c_x a c_b patří do P', což je podle (1) rovno P_{r+1}. Tedy patří i do A.

2,8. Kontinuum. [Každé číslo α na ose číselné je přesně určeno, víme-li, která racionální čísla (t. j. zlomky s celým čitatelem a jmenovatelem) jsou $< \alpha$. Je-li A množina racionálních čísel $< \alpha$, pak α určí přesně A a A určí přesně α. Je-li $y \in \mathsf{A}$, $x < y$ a x racionální, je také $x \in \mathsf{A}$. Množina A neobsahuje všecka racionální čísla. (Jsou racionální čísla $> \alpha$.) A množina A nemá posledního prvku. (Žádné racionální číslo nepředchází bezprostředně před α.) To nás vede k následujícím definicím.]

Oddíl uspořádané množiny $\mathfrak{A}(<)$ je taková neprázdná pravá část A množiny $\mathfrak{A}$, která nemá posledního prvku a z $x < y$, $y \in \mathsf{A}$ plyne $x \in \mathsf{A}$.

Cvičení 8,1. Je-li A oddíl množiny $\mathfrak{A}$, x první prvek v $\mathfrak{A} - \mathsf{A}$, pak $\mathsf{A} = \mathfrak{A}_x$.

Buď $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}$. Mohou nastat dva případy:

I. Množina $\mathfrak{F} - \mathsf{A}$ má první prvek; je to kladný zlomek, který označíme $\alpha(\mathsf{A})$.

8,2. Množina A je prvkem $\alpha(\mathsf{A})$ přesně určena; jest $\mathsf{A} = \mathfrak{F}_{\alpha(\mathsf{A})}$.

II. Množina $\mathfrak{F} - \mathsf{A}$ nemá prvního prvku. Pak množině A přiřadíme nový symbol $\alpha(\mathsf{A})$ a to různým A různé symboly $\alpha(\mathsf{A})$. Množina A určí přesně $\alpha(\mathsf{A})$ a $\alpha(\mathsf{A})$ zase určí A. Taková $\alpha(\mathsf{A})$ jsou t. zv. *kladná iracionální čísla*.

Symboly $\alpha(\mathsf{A})$ dohromady (ať už odpovídají případu I nebo II) jsou t. zv. *kladná čísla*.

Je-li A oddíl množiny $\mathfrak{f}^*$ a nemá-li $\mathfrak{f}^* - A$ prvního prvku, říkáme, že A je *mezera* v $\mathfrak{f}^*$.

Iracionálními čísly jsme zaplnili mezery v množině $\mathfrak{f}$. Označme $\mathfrak{p}$ množinu všech kladných čísel.

Cvičení 8,3. Jsou-li A a B oddíly množiny $\mathfrak{f}$, $\alpha(A)$ a $\alpha(B)$ racionální, pak $\alpha(A) < \alpha(B)$ když a jen když $A \subset B$, $A \neq B$. (Je-li $\alpha(A) < \alpha(B)$, dokážeme $A \subset B$, $A \neq B$ snadno. A opak nepřímo: Kdyby $\alpha(B) \leqq \alpha(A)$, pak by $B \subset A$; s inklusí $A \subset B$ by to dalo spor $A = B$.)

8,4. Jsou-li A a B oddíly množiny $\mathfrak{f}$, pak buďto $A \subset B$ anebo $B \subset A$. [Je-li $A \neq B$ a na př. $x \in B - A$, pak pro $a \in A$ nutně $a < x$ (sic by $x \in A$) a tedy $a \in B$.]

Teď definujeme uspořádání $<$ množiny $\mathfrak{p}$. $\alpha(A) < \alpha(B)$ bude znamenat, že $A \subset B$, $A \neq B$. Podle cvičení 8,3 pro racionální čísla to souhlasí s uspořádáním množiny $\mathfrak{f}$.

Cvičení 8,5. Dokažte trichotomii (podle cvičení 8,4) a transitivitu.

8,6. Je-li x kladné racionální číslo, pak $x < \alpha(B)$, když a jen když $x \in B$. (Užij cvičení 8,2 a 8,4; $\alpha(A) = x$, $A = \mathfrak{f}_x$.)

8,7. Je-li x kladné racionální, pak $\alpha(B) < x$, když a jen když $x \neq \alpha(B)$, x non $\in B$.

Je-li $P(<)$ uspořádaná množina, $F \subset P$, pak F je **hustá** (dicht, dense, dense) v P, když ke každým dvěma prvkům x, y množiny P, $x < y$, existují prvky r, s, t množiny F takové, že $r < x < s < y < t$.

Cvičení 8,8. Množina, která má aspoň dva prvky, je hustě uspořádána, když a jen když je hustá sama v sobě.

8,9. Když uspořádaná množina obsahuje hustou část, je hustě uspořádaná.

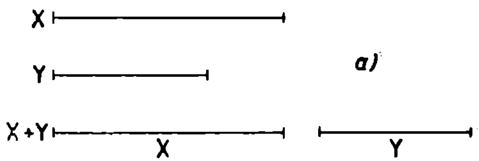
Věta 8,1. *Množina $\mathfrak{f}$ je hustá v $\mathfrak{p}$. Je tedy $\mathfrak{p}$ hustě uspořádaná.*

Důkaz. Pišme $x = \alpha(X)$, $y = \alpha(Y)$, kde X a Y jsou oddíly množiny $\mathfrak{f}$. Jest $X \subset Y$, $X \neq Y$. Volme $r \in X$, $s'_1 \in Y - X$, $s'_2 \in Y$, $s'_1 < s'_2$, $t' \in \mathfrak{f} - Y$. Podle cvičení 8,6 a 8,7 jest $r <$

$< x \leqq s'_1 < s'_2 < y \leqq t'$, tedy $s'_2 < t'$. Z hustého uspořádání množiny $\mathfrak{F}$ plyne tedy existence prvků s a t takových, že $s'_1 < s < s'_2$ a $s'_2 < t' < t$. Pak skutečně $r < x < s < < y < t$.

Cvičení 8,10. Je-li A oddíl množiny F, σ_1 podobnost množin F a F', pak $\sigma_1(\mathsf{A})$ je oddíl v množině F'. Je-li σ_2 podobnost množin F' a F, pak $\sigma_2^{-1}(\mathsf{A})$ je oddíl v F'. Je-li A mezera, jsou i $\sigma_1(\mathsf{A})$ i $\sigma_2^{-1}(\mathsf{A})$ mezery.

8,11. Opatřeme si dvě uspořádané disjunktní množiny $\mathsf{X}(<)$ a $\mathsf{Y}(<)$ podobné množině $\mathfrak{F}$ (srovnej cvičení 7,12). Součet $\mathsf{S} = \mathsf{X} + \mathsf{Y}$ uspořádáme tak, že napřed dáme celou X, pak celou Y a v X a Y prvky uspořádáme tak, jak byly. T. j. je-li $x \in \mathsf{X}$, $y \in \mathsf{Y}$, jest $x < y$; a je-li x i $y \in \mathsf{X}$ (nebo $\in \mathsf{Y}$), pak $x < y$ je už definováno uspořádáním množiny X (či Y). Srovnej cvičení 6,2.

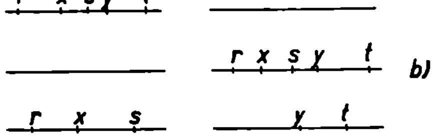


Obr. 29a.

Dokažte: X je mezera v S (X ani Y nemají prvních ani posledních prvků). A S je spočetná hustě uspořádaná. Pokyn:

nebo

nebo



Obr. 29b.

Tedy typ S = typ $\mathfrak{F}$.

Věta 8,2. *V množině $\mathfrak{f}$ jsou mezery. Existují tedy iracionální čísla.*

Důkaz. V množině S ze cvičení 8,11 jsou mezery. Je to množina podobná k $\mathfrak{f}$ a tedy podle cvičení 8,10 jsou mezery i v $\mathfrak{f}$.

Cvičení 8,12. Je-li A oddíl množiny $\mathfrak{p}$, pak průnik A$\mathfrak{f}$ je oddíl množiny $\mathfrak{f}$.

8,13. Je-li A mezera v $\mathfrak{p}$, pak A$\mathfrak{f}$ je mezera v $\mathfrak{f}$. (Je-li $a \in \mathfrak{f}$ — A$\mathfrak{f}$, pak $a \in \mathfrak{p}$ — A, tedy existuje $b < a$, $b \in \mathfrak{p}$ — A. Je-li r racionální, $b < r < a$, jest $r < a$ a $r \in \mathfrak{f}$ — A$\mathfrak{f}$.)

Věta 8,3. *V množině $\mathfrak{p}$ není mezer.*

Důkaz. Buď A mezera v množině $\mathfrak{p}$. Pak A$\mathfrak{f}$ je mezera v $\mathfrak{f}$, α(A$\mathfrak{f}$) iracionální číslo. Kdyby α(A$\mathfrak{f}$) $\in$ A, pak by existovalo $\xi \in$ A, α(A$\mathfrak{f}$) $< \xi$ a $\eta \in$ A, $\xi < \eta$. Tedy by existovalo racionální r, $\xi < r < \eta$, tedy $r \in$ A, t. j. $r \in$ A$\mathfrak{f}$, α(A$\mathfrak{f}$) $< r$, což odporuje cvičení 8,6. Tedy α(A$\mathfrak{f}$) $\in \mathfrak{p}$ — A. Ježto A je mezera, existuje $\xi \in \mathfrak{p}$ — A, $\xi < \alpha$(A$\mathfrak{f}$), tedy racionální r, $\xi < r < \alpha$(A$\mathfrak{f}$), tedy podle cvičení 8,6 $r \in$ A$\mathfrak{f}$, tedy $r \in$ A, tedy $\xi \in$ A, což je spor.

Věta 8,4. *Množina $\mathfrak{p}$ je nespočetná.*

Důkaz. Podle věty 8,1 je $\mathfrak{p}$ hustě uspořádaná. Kdyby byla spočetná, byla by podle věty 7,3 podobná množině $\mathfrak{f}$ a podle věty 8,2 a cvičení 8,10 by v ní byly mezery, což odporuje větě 8,3.

Cvičení 8,14. Hustě uspořádaná množina bez mezer je nutně nespočetná.

8,15. Mají-li množiny C_1 a C_2 každá aspoň dva prvky a jsou-li $A_1 \subset C_1$ a $A_2 \subset C_2$ v nich husté a spočetné, pak existuje podle věty 7,3 podobnost s množin A_1 a A_2.

8,16. Je-li A hustá část množiny C, pak pro $x \in$ A jest $AC_x = A_x$. Pišme tedy $AC_x = A_x$ i když $x \in$ C — A. A_x je oddíl množiny A a jest $x = \sup A_x$ ve smyslu cvičení 3,8. Jest $x < y$, když a jen když $A_x \subset A_y$, $A_x \neq A_y$.

Hustě uspořádaná množina, ve které není mezer, se nazývá *spojitá*.

Cvičení 8,17. Je-li D oddíl spojité C, pak $\mathsf{C} - \mathsf{D}$ má první prvek x a jest $\mathsf{D} = \mathsf{C}_x$, $x = \operatorname{supr} \mathsf{D}$.

8,18. Je-li A hustá ve spojité C, D oddíl množiny A, pak existuje přesně jedno $x \in \mathsf{C}$, $\mathsf{D} = \mathsf{A}\mathsf{C}_x = \mathsf{A}_x$, $x = \operatorname{supr} \mathsf{D}$.

Uspořádaná množina nazývá se *kontinuum*, když je spojitá a obsahuje hustou spočetnou část.

Cvičení 8,19. $\mathfrak{P}$ je kontinuum. Obecně: Je-li typ $\mathsf{C} =$ $=$ typ $\mathfrak{P}$, pak C je kontinuum.

A teď uvidíme, že $\mathfrak{P}$ je v podstatě jediné kontinuum:

Věta 8,5. *Je-li* C *kontinuum, pak* typ $\mathsf{C} =$ typ $\mathfrak{P}$.

Dokonce platí víc:

Buďte C_1 *a* C_2 *dvě kontinua,* $\mathsf{A}_1 \subset \mathsf{C}_1$, $\mathsf{A}_2 \subset \mathsf{C}_2$. *Množiny* A_1 *a* A_2 *buďte spočetné,* A_1 *hustá v* C_1, A_2 *hustá v* C_2. *Buď* s *podobnost množin* A_1 *a* A_2. *Pak existuje jedna jediná podobnost* $\mathfrak{s}$ *množin* C_1 *a* C_2 *taková, že pro* $x \in \mathsf{A}_1$ *je vždy* $\mathfrak{s}(x) = s(x)$.

Důkaz. Užíváme označení a výsledků předchozích cvičení a cvičení 3,7 až 3,9. Je-li $x \in \mathsf{C}_1$, je $\mathsf{A}_1\mathsf{C}_{1x} = \mathsf{A}_{1x}$ oddíl v A_1, $s(\mathsf{A}_{1x})$ oddíl v A_2, tedy $s(\mathsf{A}_{1x}) = \mathsf{A}_{2\xi}$ pro jedno určité $\xi \in \mathsf{C}_2$. Položíme $\mathfrak{s}(x) = \xi$.

Je-li $\xi \in \mathsf{C}_2$, je $\mathsf{A}_{2\xi}$ oddíl množiny A_2, $s^{-1}(\mathsf{A}_{2\xi})$ je oddíl množiny A_1 a tedy $s^{-1}(\mathsf{A}_{2\xi}) = \mathsf{A}_{1x}$. A jest $s(\mathsf{A}_{1x}) = \mathsf{A}_{2\xi}$, tedy $\xi =$ $= \mathfrak{s}(x)$. Je tedy $\mathfrak{s}$ zobrazení množiny C_1 na C_2.

Je-li $x < y$, jest $\mathsf{A}_{1x} \subset \mathsf{A}_{1y}$, $\mathsf{A}_{1x} \neq \mathsf{A}_{1y}$, tedy $s(\mathsf{A}_{1x}) \subset s(\mathsf{A}_{1y})$, $s(\mathsf{A}_{1x}) \neq s(\mathsf{A}_{1y})$; pro $\mathfrak{s}(x) = \xi$ a $\mathfrak{s}(y) = \eta$ tedy $\mathsf{A}_{2\xi} \subset \mathsf{A}_{2\eta}$, $\mathsf{A}_{2\xi} \neq \mathsf{A}_{2\eta}$, tedy $\xi < \eta$. Tedy $\mathfrak{s}$ je podobnost.

Je-li zvláště $x \in \mathsf{A}_1$, je x první prvek množiny $\mathsf{A}_1 - \mathsf{A}_{1x}$, tedy $s(x)$ první prvek množiny $\mathsf{A}_2 - s(\mathsf{A}_{1x})$. A $s(\mathsf{A}_{1x})$ je oddíl množiny A_2, tedy $s(\mathsf{A}_{1x}) = \mathsf{A}_{2s(x)}$, tedy vskutku $\mathfrak{s}(x) = s(x)$.

Buď σ podobnost množin C_1 a C_2, $\sigma(x) = s(x)$ pro $x \in \mathsf{A}_1$. Pro $x \in \mathsf{C}_1$ je A_{1x} oddíl množiny A_1, $\sigma(\mathsf{A}_{1x}) = s(\mathsf{A}_{1x})$ oddíl množiny A_2 a je roven $\mathsf{A}_{2\xi}$, kde $\xi = \mathfrak{s}(x)$. Jest $x = \operatorname{supr} \mathsf{A}_{1x}$, $\xi = \operatorname{supr} \mathsf{A}_{2\xi}$. Tedy podle cvičení 3,8 jest $\xi = \sigma(x)$, t. j. $\sigma(x) = \mathfrak{s}(x)$. Podobnost $\mathfrak{s}$ je tedy jen jedna.

Cvičení 8,20. Je-li B spojitá, pak existuje $\mathsf{C} \subset \mathsf{B}$ taková, že typ C = typ $\mathfrak{P}$.

[Vol podle věty 7,4 $\mathsf{A}_2 \subset \mathsf{B}$, typ A_2 = typ $\mathfrak{F}$; buď $\mathsf{A}_1 = \mathfrak{F}$, $\mathsf{C}_1 = \mathfrak{P}$, $\mathsf{C}_2 = \mathsf{B}$. Pak stačí zopakovat první a třetí odstavec předešlého důkazu: $\mathsf{C} = \mathfrak{s}(\mathsf{C}_1)$.]

[Je tedy kontinuum v jistém smyslu nejmenší spojitá množina.]

8,21. Ještě si uvědoměme toto:

Ke každému $x \in \mathfrak{P}$ existuje přirozené m takové, že $x < \frac{m}{1}$.
(Pro jistý kladný zlomek $\frac{m}{n}$ jest $x < \frac{m}{n} \leqq m$.)

2,9. Arabské číslice. [Nejdříve dvě maličkosti o přirozených číslech. Definici množiny N_0 viz na konci odst. 2,5.

Věta 9,1. *Buď $m \in \mathsf{N}$, $n \in \mathsf{N}$, pak existuje $x \in \mathsf{N}_0$ a $y \in \mathsf{N}_0$, $y < n$ tak, že $m = nx + y$. Čísla x a y jsou čísly m a n jednoznačně určena.*

Důkaz. Je-li $m < n$, stačí zvoliti $x = 0$ a $y = m$. A jiná volba není možná. Kdyby $1 \leqq x$, pak by totiž $n \leqq nx \leqq nx + y = m$. A z $x = 0$ plyne $m = n \cdot 0 + y = 0 + y = y$. Buď tedy $n \leqq m$. Pak množina všech $n\xi$, $\xi \in \mathsf{N}$, $n\xi < m$ je neprázdná (neboť obsahuje $n \cdot 1 = n$). A je konečná, neboť je to část konečné $\mathsf{N}(m)$. Existuje tedy poslední mezi všemi takovými ξ; to označíme x. Označme $y = m - nx$. (Pro $m = nx$ jest $y = 0$.) Pak ovšem $m = nx + y$. A jest $y < n$. (Kdyby totiž $n \leqq y$, pak by $y = n + z$ ($z = y - n$) a tedy $m = n \cdot (x + 1) + z$ a tedy $n(x + 1) \leqq m$ proti definici čísla x.)

Buď nyní $m = nx' + y'$, $y' < n$. Pak $nx + y = nx' + y'$; je-li na př. $x < x'$, jest $x' = x + u$, $u \in \mathsf{N}$. Tedy $nx + y =$

$= nx + nu + y'$, tedy $n \leqq nu \leqq nu + y' = y$, což je spor. Tedy $x' = x$ a z rovnice $nx + y = nx + y'$ plyne též $y' = y$.

Buď $m \in \mathsf{N}$. Každému $i \leqq m$ buď přiřazeno určité číslo $a_i \in \mathsf{N}_0$. Opatřme si po dvou disjunktní množiny A_i tak, aby A_i měla a_i prvků. Je-li $a_i = 0$, bude $\mathsf{A}_i = \emptyset$. Jinak položme $\mathsf{A}_i = \mathsf{N}(a_i) \times \{i\}$. Buď $\mathfrak{J}$ třída všech množin A_i, $i \leqq m$.

Cvičení 9,1. Třída $\mathfrak{J}$ je konečná; je tedy $\sum(\mathfrak{J})$ konečná množina.

Počet prvků množiny $\sum(\mathfrak{J})$ je přirozené číslo nebo nula; označíme jej $\sum_i^m a_i$. Buď $\sum_i^0 a_i = 0$.

Cvičení 9,2. $\sum_i^1 a_i = a_i$; $\sum_i^m a_i = \sum_i^{m-1} a_i + a_m$. Obecně pro $n < m$ jest $\sum_i^m a_i = \sum_i^n a_i + \sum_i^{m-n} a_{i+n}$.

9,3. $\sum_i^m c a_i = c \sum_i^m a_i$. (Dokažte indukcí.)

Ve všech příštích úvahách bude d pevné přirozené číslo $\neq 1$. D bude množina $\{0\} + \mathsf{N}(d - 1)$. Prvkům množiny D budeme říkat *cifry*; ξ (s přídavnými indexy) značí vždy cifry.

Cvičení 9,4. $d^m = \sum_i^m (d - 1)\, d^{m-i} + 1$. (Dokažte indukcí.)

A nyní přejděme k vlastnímu předmětu odstavce 2,9!]

m-člennou řadou cifer rozumím zobrazení f množiny $\mathsf{N}(m)$ do D. T. j.: Každému z čísel $1, 2, \ldots, m$ přiřazuje f jakousi cifru $f(i)$, t. zv. i-tá cifra řady f. $f(1)$ je t. zv. *první* cifra. Označme ${}^m_d\mathsf{N}$ množinu všech m-členných řad cifer, jichž první cifra není nula 0. Buď ${}_d\mathsf{N}$ součet třídy všech ${}^m_d\mathsf{N}$ pro $m \in \mathsf{N}$; $x \in {}_d\mathsf{N}$ tedy značí, že pro jisté $m \in \mathsf{N}$ je x m-členná řada cifer s první cifrou různou od nuly.

[Na př. pro d rovno desíti jsou cifry $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$; $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $4 = 3 + 1$ atd. A na př. čtyrčlennou řadu f cifer, pro kterou $f(1) = 1$, $f(2) = 9$, $f(3) = 4$, $f(4) = 1$ si můžeme znázornit takto:

$$1 \quad 9 \quad 4 \quad 1.$$

A ${}_d\mathsf{N}$ je množina všech takových řad, které nezačínají nulou, ať mají kolik chtějí cifer.]

Je-li $f \in {}_d\mathsf{N}$, pak jest $f \in {}^m_d\mathsf{N}$ přesně pro jedno m; píšeme $m = \pi(f)$; $\pi(f)$ je t. zv. *počet cifer* řady f.

Cvičení 9,5. Množiny ${}^m_d\mathsf{N}$ jsou konečné. Buď (m) množina všech $f \in {}_d\mathsf{N}$ s počtem cifer $\pi(f) \leqq m$. Pak (m) je konečná.

(${}^m_d\mathsf{N} \subset \mathsf{D}^{\mathsf{N}(m)}$. A konečnost množiny (m) plyne indukcí:

$$(m + 1) = (m) + {}^{m+1}_{\ d}\mathsf{N}.)$$

Pro $f \in {}_d\mathsf{N}$ a $g \in {}_d\mathsf{N}$ bude nerovnost $f < g$ znamenat, že nastane jeden z obou následujících případů:

I. $\pi(f) < \pi(g)$,

II. $\pi(f) = \pi(g) = m$; zobrazení f a g množiny $\mathsf{N}(m)$ do D jsou různá. Existují tedy taková $x \in \mathsf{N}(m)$, že $f(x) \neq g(x)$. A první z těch x má tu vlastnost, že $f(x) < g(x)$.

[Tedy $f < g$ znamená buďto, že řada f je kratší než g, že má méně cifer. Anebo že sice obě ty řady mají stejně mnoho cifer, ale na prvním místě, na kterém se od sebe liší, má f menší cifru než g. Tak uspořádáváme čísla psaná v desítkové soustavě arabským způsobem. $54 < 111$, protože 54 má méně cifer. $1939 < 1941$, protože cifer je stejně mnoho a první cifry, kde se naše čísla liší, jsou $3 < 4$.]

Cvičení 9,6. $<$ je uspořádání množiny ${}_d\mathsf{N}$. Je to uspořádání dobré. (Vyberme z neprázdné $\mathsf{C} \subset {}_d\mathsf{N}$ ty řady, které mají co nejméně cifer, řekněme m cifer. Pak $\mathsf{C} \,.\, {}^m_d\mathsf{N}$ je neprázdná konečná a její první prvek je první v C.)

Cvičení 9,7. Všecky množiny ${}_d\mathsf{N}_x$ jsou konečné.

9,8. Množina ${}_d\mathsf{N}$ je nekonečná. (Každému $n \in \mathsf{N}$ přiřaďme nějakou n-člennou řadu cifer $\in {}_d\mathsf{N}$.)

Podle vět 5,1 a 2,5 existuje tedy jedno jediné čítání ${}_d\mathsf{N}(a, \nu)$ množiny ${}_d\mathsf{N}$, $x < \nu(x)$ pro všechna $x \in {}_d\mathsf{N}$. Podle věty 5,3 pak existuje jedno jediné zobrazení φ množiny N na ${}_d\mathsf{N}$ takové, že $\varphi(1) = a$, $\varphi(x + 1) = \nu[\varphi(x)]$; φ je jediná podobnost množin N a ${}_d\mathsf{N}$. Tedy množiny N a ${}_d\mathsf{N}$ si přesně a to jediným způsobem odpovídají a to tak, že si odpovídají i jejich čítání a uspořádání. Na tom spočívá arabský způsob psaní čísel, rozšířený po celém civilisovaném světě. Arabské číslice jsou vlastně prvky z ${}_d\mathsf{N}$, konečné řady cifer nezačínající nulou. Přesně si odpovídají s přirozenými čísly.

Prvkům množiny ${}_d\mathsf{N}$ říkejme *číslice*; $\varphi(x)$ je číslice příslušná k číslu $x \in \mathsf{N}$.

Cvičení 9,9. Buď $f \in {}_d\mathsf{N}$. Pak $g = \nu(f)$, t. j. první prvek g množiny ${}_d\mathsf{N}$, pro který $f < g$, se dostane takto:

Buď $m = \pi(f)$. I. Všecky cifry $f(x)$ řady f jsou rovny $d - 1$. Pak g má $m + 1$ cifer, první $= 1$ a ostatní $= 0$.

II. Poslední cifra $f(m)$ řady f je různá od $d - 1$. Pak g má m cifer, poslední rovnu $f(m) + 1$ a ostatní stejné jako f.

III. f nemá všecky cifry $= d - 1$, při tom však $f(m) = d - 1$. Pak buď x poslední takové číslo $\in \mathsf{N}(m)$, pro které $f(x) \neq d - 1$, tedy pro $x < y \in \mathsf{N}(m)$ už $f(y) = d - 1$. V tomto případě g má zase m cifer a to pro $y < x$ jest $g(y) = f(y)$, $g(x) = f(x + 1)$ a pro $x < y$ jest $g(y) = 0$.

Cvičení 9,10. Buď $f = \varphi(1)$ číslice příslušná k číslu 1. Pak f má jednu cifru: $\pi(f) = 1$ a jest $f(1) = 1$. (Neboť f je první prvek množiny ${}_d\mathsf{N}$.)

Má-li f m cifer, označme $f' = \sum_i^m f(i)\, d^{m-i}$.

Cvičení 9,11. Případy I, II a III jako cvičení v 9,9, $g = \nu(f)$.

I. $f' = \sum_i^m (d - 1)\, d^{m-i}$, $g' = d^m$;

II. $f' = \sum_i^m f(i)\, d^{m-i}$, $g' = \sum_i^m f(i)\, d^{m-i} + 1$;

III. $f' = \sum_{i}^{x-1} f(i)\, d^{m-i} + f(x)\, d^{m-x} + \sum_{i}^{m-x} (d-1)\, d^{m-(i+x)}$,

$$g' = \sum_{i}^{x-1} f(i)\, d^{m-i} + (f(x) + 1)\, d^{m-x}.$$

Podle cvičení 9,4 je v každém případě $g' = f' + 1$.

A teď přijde věta, která nás poučí o „místním" významu cifer v arabské číslici.

Věta 9,2. *Buď x přirozené číslo, $g = \varphi(x)$ příslušná číslice; nechť g má $m = \pi(g)$ cifer. Pak*

$$x = \sum_{i}^{m} g(i)\, d^{m-i}.$$

(Stručně: $x = g'$, kde $g = \varphi(x)$.)

Důkaz. Podle principu indukce stačí to dokázat přímo pro $x = 1$ a pro obecné x jen za předpokladu, že platí obdoba pro $y = x - 1$ $(x = y + 1)$. Je-li $x = 1$, pak podle cvičení 9,10 $m = 1$ a $\sum_{i}^{1} f(i)\, d^{1-i} = f(1)\, d^{1-1} = 1 \,.\, 1 = 1 = x$.

Obecně označme $y = x - 1$, $f = \varphi(y)$ a předpokládejme už $y = f'$. Označme $g = \nu(f)$. Pak $\varphi(x) = \varphi(y + 1) = \nu[\varphi(y)] = \nu(f) = g$ a podle cvičení 9,11 jest $g' = f' + 1 = y + 1 = x$. Tedy $x = g'$, kde $g = \varphi(x)$, c. b. d. $g(i)$ je t. zv. *i-tá cifra* čísla x.

Věta 9,3. *Každé přirozené číslo se dá psát jedním jediným způsobem ve tvaru*

$$\sum \xi_i d^{m-i}, \qquad \xi_1 \neq 0.$$

Důkaz. Je-li $x \in \mathsf{N}$, pak pro $g = \varphi(x)$, $\xi_i = g(i)$ je podle věty 9,2

$$x = \sum_{i}^{m} \xi_i d^{m-i}, \qquad \xi_1 \neq 0.$$

Je-li mimo to $x = \sum_{i}^{m^*} \xi_i^* d^{m^*-i}$, $\xi_1^* \neq 0$, g^* číslice o $m^* = \pi(g^*)$ cifrách, $g^*(i) = \xi_i^*$, pak, ježto φ je zobrazení na ${}_d\mathsf{N}$, existuje $y \in \mathsf{N}$, $g^* = \varphi(y)$. A podle věty 9,2 jest $y = \sum_i^{m^*} \xi_i^* d^{m^*-i} = x$. Tedy $g^* = \varphi(x) = g$, čili $m^* = m$ a $\xi_i^* = g^*(i) = g(i) = \xi_i$ a oba součty se úplně shodují.

[Je-li d deset, f číslice o čtyřech cifrách, $f(1) = 1$, $f(2) = 9$, $f(3) = 4$, $f(4) = 1$, pak f píšeme: 1941. A podle věty 9,2 příslušné přirozené číslo je rovno $1 \,.\, d^3 + 9 \,.\, d^2 + 4 \,.\, d + 1$.]

Cvičení 9,12. Jest $\sum_i^m \xi_i^{m-i} < d^r$, když a jen když $m \leqq r$.

2.10. Rozvoje kladných čísel. [Označení a názvosloví jako v 2,9.]

Posloupnost cifer je zobrazení množiny N do D, t. j. prvek množiny D^N. $\mathfrak{f}(1)$ resp. $\mathfrak{f}(i)$ je t. zv. první resp. i-tá cifra posloupnosti $\mathfrak{f}$.

Jsou-li $\mathfrak{f}$ a $\mathfrak{g}$ dvě různé posloupnosti cifer, pak existují $x \in \mathsf{N}$ taková, že $\mathfrak{f}(x) \neq \mathfrak{g}(x)$. Je-li x první takové přirozené číslo, pak $\mathfrak{f} < \mathfrak{g}$ znamená, že $\mathfrak{f}(x) < \mathfrak{g}(x)$. Tedy posloupnosti cifer uspořádáme jako shora ve slovníku podle prvního místa, na kterém se liší.

Cvičení 10,1. $<$ je uspořádání množiny D^N.

Rozvojem rozumějme pár $\{a; \mathfrak{f}\}$, jehož první člen a je přirozené číslo nebo nula, t. j. $a \in \mathsf{N}_0$ a jehož druhý člen $\mathfrak{f}$ je posloupnost cifer, t. j. $\mathfrak{f} \in \mathsf{D}^\mathsf{N}$. Při tom vždy vylučujeme pár $\Theta = \{0; \mathfrak{v}\}$, kde $\mathfrak{v}$ je posloupnost cifer, jejíž všecky cifry jsou rovny nule. Označme ${}_d\mathfrak{R}$ množinu všech rozvojů. $\mathfrak{f}(x)$ je x-tá cifra rozvoje $\{\ldots; \mathfrak{f}\}$.

Cvičení 10,2. ${}_d\mathfrak{R} = \mathsf{N}_0 \times \mathsf{D}^\mathsf{N} - \{\Theta\}$.

Jsou-li $\{a; \mathfrak{f}\}$ a $\{b; \mathfrak{g}\}$ dva rozvoje, pak $\{a; \mathfrak{f}\} < \{b; \mathfrak{g}\}$ znamená, že buďto $a < b$ anebo, že $a = b$ a při tom $\mathfrak{f} < \mathfrak{g}$. Zase srovnáváme jako ve slovníku napřed podle prvních členů a potom podle druhých členů.

Cvičení 10,3. $<$ je uspořádání množiny ${}_d\mathfrak{R}$.

[Kladná čísla píšeme ve formě desetinných rozvojů (d = deset). Před desetinnou čárkou je a (přirozené číslo anebo nula) za ní $\mathfrak{f}$ (posloupnost cifer). To odpovídá našim rozvojům $\{a; \mathfrak{f}\}$.] Každému rozvoji $\{a; \mathfrak{f}\}$ patří jakási t. zv. *kladná číslice* (v soustavě d). Tu číslici píšeme ve tvaru $a, \mathfrak{f}$.

[Na př. rozvoji $\{5; 876000\ldots\}$ patří číslice $5{,}876000\ldots$ Teď ale některým rozvojům patří stejné číslice. Na př. rozvojům $\{366{,}000\ldots\}$ a $\{365{,}999\ldots\}$ patří číslice $366{,}000\ldots$ a $365{,}999\ldots$ a ty jsou si rovny. A stejně rozvojům $\{8{,}94506000\ldots\}$ a $\{8{,}94505999\ldots\}$ patří stejné číslice $8{,}94506000\ldots =$ $= 8{,}94505999\ldots$].

Označme $\mathfrak{G}$ množinu rozvojů $\{a; \mathfrak{f}\}$ takových, že pro jisté $l \in \mathsf{N}$ jest vždy $\mathfrak{f}(x) = 0$ pro $l \leqq x$. (T. j. od l-té cifry počínaje jsou v posloupnosti $\mathfrak{f}$ samé nuly.)

Podobně označme $\mathfrak{G}^*$ množinu rozvojů $\{b; \mathfrak{g}\}$ takových, že pro jisté $l \in \mathsf{N}$ jest vždy $\mathfrak{g}(x) = d - 1$ pro $l \leqq x$. (T. j. od l-té cifry počínaje jsou v posloupnosti $\mathfrak{g}$ samé „devítky“ $d - 1$.)

A teď každému rozvoji $\mathfrak{a} = \{a; \mathfrak{f}\} \in \mathfrak{G}$ bude patřit jakýsi rozvoj $\mathfrak{b} = \{b; \mathfrak{g}\} \in \mathfrak{G}^*$; označíme $\mathfrak{b} = \tau(\mathfrak{a})$.

I. Jsou-li *všecky* cifry $\mathfrak{f}(x)$ nuly, pak ($a \neq 0$ a) $b = a - 1$ a všecky cifry $\mathfrak{g}(x)$ jsou $d - 1$.

Cvičení 10,4. Nejsou-li všecky cifry $\mathfrak{f}(x)$ nuly, pak existuje jedno jediné $k \in \mathsf{N}$ takové, že $\mathfrak{f}(k) \neq 0$ a pro $k < x$ je už vždy $\mathfrak{f}(x) = 0$. ($k = l - 1$, kde l je první takové, že pro $l \leqq x$ vždy $f(x) = 0$.) k-tá cifra je „poslední od nuly různá“.

II. Buď k-tá cifra $\mathfrak{f}(k)$ poslední od nuly různá. Pak $b = a$, pro $x < k$ bude $\mathfrak{g}(x) = \mathfrak{f}(x)$, $\mathfrak{g}(k) = \mathfrak{f}(k) - 1$ a pro $k < x$ všecky cifry $\mathfrak{g}(x)$ jsou $d - 1$.

Cvičení 10,5. τ je *prosté zobrazení* množiny $\mathfrak{G}$ na $\mathfrak{G}^*$. A teď každému rozvoji $\{a; \mathfrak{f}\}$, pokud nepatří ani do $\mathfrak{G}$, ani do $\mathfrak{G}^*$ (t. j. nemá-li za desetinnou čárkou skoro samé nuly, nebo skoro samé „devítky“), patří číslice $a, \mathfrak{f}$. Patří-li $\mathfrak{a} = \{a; \mathfrak{f}\}$

do $\mathfrak{G}$, pak mu v $\mathfrak{G}^*$ patří jistý rozvoj $\tau(\mathfrak{a}) = \{b; \mathfrak{g}\}$; a těm dvěma rozvojům patří číslice a, $\mathfrak{f}$ a b, $\mathfrak{g}$, které považujeme za sobě rovné: $a, \mathfrak{f} = b, \mathfrak{g}$. A dán-li rozvoj $\{b; \mathfrak{g}\}$ v $\mathfrak{G}^*$, pak mu podle cvičení 10,5 patří v $\mathfrak{G}$ právě rozvoj $\{a; \mathfrak{f}\}$ a číslice b, $\mathfrak{g}$ možno psát též ve tvaru $a, \mathfrak{f}$. Ty kladné číslice, které mají dva rozvoje (jeden v $\mathfrak{G}$ a druhý v $\mathfrak{G}^*$), dáme do množiny ${}_d\mathfrak{F}$ a ostatní do ${}_d\mathfrak{J}$. Označíme-li ${}_d\mathfrak{P}$ množinu všech kladných číslic (v soustavě d), pak ${}_d\mathfrak{P} = {}_d\mathfrak{F} + {}_d\mathfrak{J}$. Každá číslice z ${}_d\mathfrak{F}$ má dva rozvoje: jeden patří do $\mathfrak{G}$; je to t. zv. rozvoj *prvního druhu* a druhý patří do $\mathfrak{G}^*$, t. zv. rozvoj *druhého druhu.* Číslice z ${}_d\mathfrak{J}$ mají každá jen jeden rozvoj.

[5,876000... a 5,875999... je záhodno považovat za tutéž číslici. Číslicemi totiž budeme označovat kladná čísla. A víme, že mezi dvěma kladnými čísly je vždy nějaké kladné číslo. Avšak mezi rozvoji {5,876000...} a {5,875999...} není už žádného jiného rozvoje, $\tau(\mathfrak{a})$ je totiž podle cvičení 10,6 poslední rozvoj, který je před $\mathfrak{a}$. Takový „skok" musíme odstranit; odstraníme ho tím, že $\mathfrak{a}$ a $\tau(\mathfrak{a})$ stáhneme dohromady, číslice určené rozvoji $\mathfrak{a}$ a $\tau(\mathfrak{a})$ považujeme za sobě rovné.]

[A teď chceme ${}_d\mathfrak{P}$ uspořádat. K tomu cíli předešleme:]

Cvičení 10,6. Buď $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}$. Pak při uspořádání rozvojů je $\tau(\mathfrak{a})$ poslední prvek v ${}_d\mathfrak{R}$, který je $< \mathfrak{a}$. Podobně: $\mathfrak{a}$ je první prvek v ${}_d\mathfrak{R}$, který je $> \tau(\mathfrak{a})$. Toho užijte ve cvičení

10,7. Buďte $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ dva různé rozvoje. Je-li $\mathfrak{b} \in \mathfrak{G}$, pak: $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, když a jen když $\mathfrak{a} \leqq \tau(\mathfrak{b})$; je-li $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}$, pak: $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$, když a jen když $\tau(\mathfrak{a}) < \mathfrak{b}$; je-li $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}$ i $\mathfrak{b} \in \mathfrak{G}$ pak: $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, když a jen když $\tau(\mathfrak{a}) < \tau(\mathfrak{b})$.

Množinu ${}_d\mathfrak{P}$ uspořádáme pravidlem $<$ takto: Jsou-li $a, \mathfrak{f}$ a $a', \mathfrak{f}'$ dvě různé kladné číslice, pak $a, \mathfrak{f} < a', \mathfrak{f}'$ značí, že pro příslušné rozvoje $\{a; \mathfrak{f}\} < \{a'; \mathfrak{f}'\}$.

[Je v tom háček: některým číslicím patří dva rozvoje a musíme se tedy přesvědčiti, že je jedno, kterého z obou rozvojů užijeme. K tomu slouží cvičení 10,8, ve kterém užijeme výsledků cvičení 10,7.]

Cvičení 10,8. Jsou-li $a, \mathfrak{f} = \mathfrak{b}, \mathfrak{g}$ a $a', \mathfrak{f}' = b', \mathfrak{g}'$ dvě různé kladné číslice, pak $\{a; \mathfrak{f}\} < \{b; \mathfrak{g}\}$, když a jen když $\{a'; \mathfrak{f}'\} < < \{b'; \mathfrak{g}'\}$. Ať užijeme těch či oněch rozvojů, je uspořádání $<$ stejné.

10,9. $<$ je uspořádání množiny ${}_d\mathfrak{P}$.

10,10. Buďte α a β kladné číslice, $\alpha < \beta$, $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ příslušné rozvoje; pro číslice z ${}_d\mathfrak{F}$ berme pro určitost rozvoje prvního druhu. Jest $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$. A možno nalézt rozvoje prvního druhu $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ a $\mathfrak{t}$ tak, že $\mathfrak{r} < \mathfrak{a} < \mathfrak{s} < \mathfrak{b} < \mathfrak{t}$. Značíme-li příslušné číslice řecky, bude $\varrho < \alpha < \sigma < \beta < \tau$; ϱ, σ i τ patří do ${}_d\mathfrak{F}$.

Věta 10,1. *Množina* ${}_d\mathfrak{F}$ *je hustá v* ${}_d\mathfrak{P}$.

Důkaz. Je-li $\alpha < \beta$, pak sestrojme ϱ, σ a τ podle cvičení 10.

Je-li C uspořádaná, $\emptyset \neq A \subset C$, pak podle cvičení 3,8 jest nejvýš jeden *první* prvek α v C takový, že pro všechna $\beta \in A$ jest $\beta \leqq \alpha$. Značíme $\alpha = \operatorname{supr} A$ (*supremum* či *horní hranice* množiny A). Neprázdná $A \subset C$ je v C *shora ohraničená*, když existuje *vůbec nějaké* takové α, že pro všechna $\beta \in A$ jest $\beta \leqq \alpha$.

Cvičení 10,11. Buď $\emptyset \neq A \subset {}_d\mathfrak{P}$; buď $\mathfrak{A}$ množina všech rozvojů číslic $\in A$. Je-li A shora ohraničená, je též $\mathfrak{A}$ shora ohraničená. Je-li $\mathfrak{a} = \operatorname{supr} \mathfrak{A}$ a jestli α je číslice určená rozvojem $\mathfrak{a}$, pak $\alpha = \operatorname{supr} A$.

10,12. Je-li $\emptyset \neq \mathfrak{Q} \subset {}_d\mathfrak{R}$, $x \in N$, pak existuje cifra r_x taková, že $r_x = \mathfrak{f}(x)$ pro jistý rozvoj $\{\ldots; \mathfrak{f}\}$ a při tom vždy $\mathfrak{g}(x) \leqq r_x$, když $\{\ldots; \mathfrak{g}\} \in \mathfrak{Q}$. ($r_x$ je největší, t. j. poslední z x-tých cifer rozvojů patřících do $\mathfrak{Q}$.)

Věta 10,2. *Každá shora ohraničená neprázdná množina v* ${}_d\mathfrak{P}$ *má horní hranici.*

Důkaz. Buď $\mathfrak{A}$ množina všech rozvojů čísel $\in A$, kde A je v ${}_d\mathfrak{P}$ shora ohraničená. Pak podle cvičení 10,11 je $\mathfrak{A}$ v ${}_d\mathfrak{R}$ shora ohraničená a jde jen o existenci rozvoje $\operatorname{supr} \mathfrak{A}$. Buď $\mathfrak{x} \leqq \mathfrak{a} = \{a, \ldots\}$ pro všechna $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}$. Pak je $\mathfrak{a} \leqq \{a + 1, \mathfrak{v}\}$ a tedy $\mathfrak{x} \leqq \{a + 1, \mathfrak{v}\}$ pro všechna $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}$. Je-li tedy $\mathfrak{x} =$

$= \{x, \ldots\}$, pak $x \leqq a + 1$. Je-li X množina všech x, pro která existuje $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{x} = \{x, \ldots\}$, pak je tedy $\emptyset \neq \mathsf{X} \subset \subset \mathsf{N}(a + 1)$ a tedy X konečná množina $\subset \mathsf{N}_0$. Má tedy X poslední prvek r.

V principu definice indukcí položme $\mathsf{M} = \mathsf{N}$, $\mathsf{F} = \mathsf{D}$. Buď $\mathfrak{Q}_1$ množina všech $\mathfrak{x} = \{r, \ldots\} \in \mathfrak{A}$; ježto $r \in \mathsf{X}$, tak taková $\mathfrak{x}$ existují a $\mathfrak{Q}_1 \neq \emptyset$. Podle cvičení 10,12 buď $\wp$ největší z prvních cifer rozvojů $\in \mathfrak{Q}_1$.

Je-li $x \in \mathsf{N}$ a $z(y) \in \mathsf{D}$ pro $y < x$, označme $\mathfrak{Q}_x$ množinu všech $\mathfrak{x} = \{r, \mathfrak{g}\} \in \mathfrak{A}$ takových, že pro $y < x$ vždy $\mathfrak{g}(y) = z(y)$. Je-li $\mathfrak{Q}_x \neq \emptyset$, buď $g(z)$ největší z x-tých cifer rozvojů $\in \mathfrak{Q}_x$. Jinak $g(z) = 0$. Podle principu definice indukcí sestrojíme zobrazení $\mathfrak{f}$ množiny N do D (tedy posloupnost cifer) tak, že $f(1) = \wp$ a $\mathfrak{f}(x) = g(\mathfrak{f}_x)$ pro $x > 1$. Buď $\mathfrak{a} = \{r, \mathfrak{f}\}$. Tvrdím: $\mathfrak{a} = \operatorname{supr} \mathfrak{A}$.

Stačí tedy dokázat:

(1) Je-li $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}$, pak $\mathfrak{x} \leqq \mathfrak{a}$.

(2) Je-li $\mathfrak{y} < \mathfrak{a}$, pak existuje $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{y} < \mathfrak{x}$.

(3) $\mathfrak{a} \in {}_d\mathfrak{R}$, t. j.: je-li $r = 0$, pak $\mathfrak{f} \neq \mathfrak{v}$.

Označme teď $\mathfrak{Q}_x$ množinu všech $\mathfrak{x} \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{x} = \{r, \mathfrak{g}\}$, $\mathfrak{g}(y) = \mathfrak{f}(y)$ pro $y < x$. T. j. volili jsme $z = \mathfrak{f}_x$. Především:

(4) Jest vždy $\mathfrak{Q}_x \neq \emptyset$.

(Pro $x = 1$ to je pravda. Nechť $\mathfrak{Q}_x \neq \emptyset$. Podle (E) jde jen o to, že $\mathfrak{Q}_{x+1} \neq \emptyset$. Jest $\mathfrak{f}(x) = g(\mathfrak{f}_x)$ největší z x-tých cifer rozvojů $\in \mathfrak{Q}_x$ a tedy existují rozvoje $\mathfrak{x} = \{r, \mathfrak{g}\} \in \mathfrak{Q}_x$ takové, že $\mathfrak{g}(x) = \mathfrak{f}(x)$. Jest $\mathfrak{x} \in \mathfrak{Q}_{x+1}$.)

[Důkaz tvrzení (1): Buď $\mathfrak{x} = \{r', \mathfrak{g}\}$. Jest $r' \in \mathsf{X}$ a tedy $r' \leqq r$. Kdyby $\mathfrak{a} < \mathfrak{x}$, pak by též $r \leqq r'$, tedy $r' = r$. Tedy $\mathfrak{x} \in \mathfrak{Q}_1$ a tedy $\mathfrak{g}(1) \leqq \mathfrak{f}(1)$ a z $\mathfrak{a} < \mathfrak{x}$ a $r' = r$ plyne $\mathfrak{f}(1) \leqq \mathfrak{g}(1)$, tedy $\mathfrak{f}(1) = \mathfrak{g}(1)$. Buď x první přirozené číslo, pro které $\mathfrak{f}(x) \neq \mathfrak{g}(x)$. Pak tedy $\mathfrak{f}(x) < \mathfrak{g}(x)$ a $\mathfrak{f}(y) = \mathfrak{g}(y)$ pro $y < x$. Označíme-li $z = \mathfrak{f}_x$, pak tedy $\mathfrak{x} \in \mathfrak{Q}_x$ a tedy $\mathfrak{g}(x) \leqq g(z) = g(\mathfrak{f}_x) = \mathfrak{f}(x)$, což je spor, který ukazuje, že nutně $\mathfrak{x} \leqq \mathfrak{a}$.

Důkaz tvrzení (2): Je-li $\gamma = \{r', \mathfrak{g}\} < \mathfrak{a}$, pak buďto $r' < r$ a pak $\gamma < \mathfrak{x}$ pro $\mathfrak{x} \in \mathsf{X}$. Anebo $r' = r$. Pak buďto $\mathfrak{g}(1) < \mathfrak{f}(1) = \wp$ a pak $\gamma < \mathfrak{x}$ pro $\mathfrak{x} \in \mathfrak{Q}_1$. Anebo $\mathfrak{g}(1) = \mathfrak{f}(1)$.

V tom případě ($r' = r$ a $\mathfrak{g}(1) = \mathfrak{f}(1)$) buď x první přirozené číslo, pro které $\mathfrak{g}(x) \neq \mathfrak{f}(x)$. Pak tedy $\mathfrak{g}(x) < \mathfrak{f}(x)$ a pro $y < x$ vždy $\mathfrak{g}(y) = \mathfrak{f}(y)$. Podle (4) možno volit $\mathfrak{x} = \{r, \mathfrak{h}\} \in \mathfrak{Q}_{x+1}$. Jest $\mathfrak{h}(y) = \mathfrak{f}(y)$ pro $y \leq x$. Tedy pro $y < x$ jest $\mathfrak{g}(y) = \mathfrak{h}(y)$ a $\mathfrak{g}(x) < \mathfrak{h}(x)$. Tedy vskutku $\gamma < \mathfrak{x}$.

Důkaz tvrzení (3): Je-li $r \neq 0$ nebo $\mathfrak{f}(1) \neq 0$, jsme hotovi. Buď $\mathfrak{a} = \{0, \mathfrak{v}\}$. Podle (4) existuje $\mathfrak{x} \in \mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{x} = \{0; \mathfrak{g}\}$, $\mathfrak{g}(1) = 0$. Existují přirozená x taková, že $\mathfrak{g}(x) \neq 0$. Buď x první takové. Pro $y < x$ jest $\mathfrak{g}(y) = 0 = \mathfrak{v}(y)$, čili $\mathfrak{x} \in \mathfrak{Q}_x$. A teď je $0 = \mathfrak{v}(x) = \mathfrak{f}(x) = \mathfrak{g}(\mathfrak{f}_x)$ největší z x-tých cifer rozvojů $\in \mathfrak{Q}_x$, tedy $\mathfrak{g}(x) \leq 0$, což je spor. Tím je vše dokázáno.]

Cvičení 10,14. Je-li A oddíl v ${}_d\mathfrak{P}$, pak existuje $x = \operatorname{supr} \mathsf{A}$. x je první prvek množiny ${}_d\mathfrak{P} - \mathsf{A}$. Tedy v ${}_d\mathfrak{P}$ není mezer.

10,15. ${}_d\mathfrak{P}$ *je spojitá.*

[Chceme dokázat, že ${}_d\mathfrak{P}$ je kontinuum. Za tím účelem najdeme v ${}_d\mathfrak{P}$ hustou spočetnou část. To bude ${}_d\mathfrak{F}$. A sestrojíme dokonce podobnost množiny ${}_d\mathfrak{F}$ a jisté množiny kladných zlomků, která má základní důležitost pro vztahy množiny kladných čísel $\mathfrak{P}$ a množiny kladných číslic ${}_d\mathfrak{P}$.

Je-li d deset, pak číslu $\dfrac{8754060}{d^9}$ patří číslice

0,00875406000... a podobně. To formalisujeme.]

Buď $\mathfrak{Z}_1$ množina všech zlomků $\dfrac{a}{d^r}$, $a < d^r$. Jest $a = \sum\limits_{i}^{m} \xi_i d^{m-i}$ ($\xi_1 \neq 0$) a podle věty 8,3 jsou cifry ξ_i jednoznačně určeny; $m \leq r$ podle cvičení 8,11. Buď $\delta = r - m$.

[Z čísla $\dfrac{a}{d^r}$ uděláme číslici tak, že před desetinnou čárkou je nula $\left(\text{neboť } \dfrac{a}{d^r} < \dfrac{1}{1}\right)$ a za ní cifry ξ_i, ale posunuté tak, aby poslední cifra ξ_m byla na r-tém místě, t. j. posuneme o δ napravo; ξ_1 bude $(\delta + 1)$-tá cifra, ξ_2 bude $(\delta + 2)$-tá cifra atd. V hořejším případě $a = 8754060$, $r = 9$, $m = 7$, $\delta = 2$ a $\xi_1 = 8$ je za desetinnou čárkou na třetím, $\xi_2 = 7$ na čtvrtém místě atd.]

Zlomku $z = \dfrac{a}{d^r}$, $a = \sum\limits_{i}^{m} \xi_i d^{m-i}$ přiřadíme číslici $s(z) = 0, \mathfrak{f}$, kde pro $x \leqq \delta$ jest $\mathfrak{f}(x) = 0$, potom pro $\delta < x \leqq r$ jest $\mathfrak{f}(x) = \xi_{x-\delta}$ (tedy cifra ξ_y stojí na místě $(y + \delta)$-tém: $\xi_y = \mathfrak{f}(y + \delta)$ a pro $r < x$ vždy $\mathfrak{f}(x) = 0$.

[Je v tom malý háček. Zlomek z se dá psát všelijak; na př. $\dfrac{3650}{d^6} = \dfrac{365}{d^5}$ a pod. Je otázka, zda $s(z)$ vyjde vždy stejně, bez ohledu na způsob psaní zlomku z. Že ano, ukáže se v následujících cvičeních.]

Cvičení 10,17. Je-li $\dfrac{a}{d^r} = \dfrac{a'}{d^{r'}}$, pak $a < d^r$, když a jen když $a' < d^{r'}$. Je-li $r = r'$, pak též $a = a'$; je-li $a = a'$, pak též $r = r'$. Je-li $r < r'$, pak $a' = ad^{r'-r}$.

Označme $\varrho = r' - r$; $r' = r + \varrho$; $\varrho \in \mathsf{N}_0$.

10,18. V témže označení jest $a' = \sum\limits_{i}^{m} \xi_i d^{(m+\varrho)-i}$.

10,19. Buď $\xi_i = 0$ pro $m < i$, $m' = m + \varrho$. Jest $a' = \sum\limits_{i}^{m'} \xi_i d^{m'-i}$ a $m' \leqq r'$.

10,20. Je-li $\delta' = r' - m'$, jest $\delta' = \delta$.

10,21. $s\left(\dfrac{a'}{d^{r'}}\right) = 0$, $\mathfrak{f}'$ se dostane takto: Pro $x \leqq \delta'$ jest $\mathfrak{f}'(x) = 0$, pro $\delta' < x \leqq r'$ jest $\mathfrak{f}'(x) = x_{x-\delta}$ a jinak $\mathfrak{f}'(x) = 0$.

10,22. $s\left(\dfrac{a'}{d^{r'}}\right) = s\left(\dfrac{a}{d^r}\right)$, c. b. d.

A teď studujme zobrazení s.

Buď ${}_d\mathfrak{F}_1$ množina takových $a, \mathfrak{f} \in {}_d\mathfrak{F}$, pro které $a = 0$ v rozvoji prvního druhu $\{a; \mathfrak{f}\}$.

Cvičení 10,23. s je zobrazení množiny $\mathfrak{Z}_1$ na ${}_d\mathfrak{F}_1$.

(Je-li $\mathfrak{f}(\delta + 1)$ první od nuly různá cifra v $0, \mathfrak{f}$ a pro $r < x$ vždy $\mathfrak{f}(x) = 0$, pak $0, \mathfrak{f} = s\left(\frac{a}{d^r}\right)$, kde $a = \sum_i^m \xi_i d^{m-i}$, $m = r - \delta$, $\xi_i = \mathfrak{f}(i + \delta)$.)

10,24. s je podobnost množin $\mathfrak{Z}_1$ a ${}_d\mathfrak{F}_1$. (Buď $\frac{a}{d^r} < \frac{b}{d^r}$. (Jmenovatele možno vždy brát stejné.) Pak $a < b$, $a = \sum_i^m \xi_i d^{m-i}$, $b = \sum_i^m \eta_i d^{m-i}$. Je-li $m = n$, pak pro první i, kde se ξ_i a η_i liší, jest $\xi_i < \eta_i$. A je-li $m < n$, $s\left(\frac{a}{d^r}\right) = 0, \mathfrak{f}$, $s\left(\frac{b}{d^r}\right) = 0, \mathfrak{g}$ (s rozvoji prvního druhu), pak $\mathfrak{f}(r - n + 1)$ je nula, kdežto $\mathfrak{g}(r - n + 1) = \eta_1$.)

Dosud jsme se omezovali na „pravé" zlomky, t. j. $< \frac{1}{1}$. Teď rozšíříme s na množinu $\mathfrak{Z}$ všech zlomků $\frac{a}{d^r}$ (ať už $a < d^r$ či $d^r \leqq a$). Zlomek $\frac{a}{b}$ se dá psát jako „součet celého čísla x a pravého zlomku $\frac{y}{b}$" a to jediným způsobem takto: Podle věty 8,1 určeme $x \in \mathsf{N}_0$, $y \in \mathsf{N}_0$ tak, aby $a = bx + y$, $y < b$. Pak $\frac{a}{b} = \frac{bx + y}{b}$ a čísla x a $\frac{y}{b}$ jsou zlomkem $\frac{a}{b}$ přesně určena podle

Cvičení 10,25. Je-li $\frac{bx + y}{b} = \frac{b'x' + y'}{b'}$, $y < b$, $y' < b'$, pak $x = x'$ a $\frac{y}{b} = \frac{y'}{b'}$.

$(bb'x + b'y = bb'x' + by'$, $b'y < bb'$, $by' < bb'$, tedy podle věty 8,1.)

10,26. $\frac{bx + y}{b} < \frac{b'x' + y'}{b'}$ znamená, že buďto $x < x'$, anebo $x = x'$ a $\frac{y}{b} < \frac{y'}{b'}$.

(Z těch podmínek odvoďte napřed nerovnost daných zlomků. A je-li naopak splněna daná nerovnost, pak musí být ty podmínky splněny, neboť z opačných podmínek by plynula opačná nerovnost daných zlomků.)

Zlomku $\frac{a}{d^r}$ tedy jednoznačně patří číslo $x \in \mathsf{N}_0$ a zlomek $\frac{y}{d^r} \in \mathfrak{Z}_1$ tak, že $a = d^r x + y$.

Nahraďme teď ty pravé zlomky $\frac{y}{d^r}$ číslicemi $s\left(\frac{y}{d^r}\right) = 0, \mathfrak{f}$.

(Je-li $y = 0$, pak položme $s\left(\frac{y}{d^r}\right) = 0, \mathfrak{f}$, kde $\mathfrak{f} = \mathfrak{v}$, t. j. $\mathfrak{f}(k) = 0$ pro všecka $k \in \mathsf{N}$. Zlomku $\frac{a}{d^r}$ přiřaďme číslici $x, \mathfrak{f}$ (rozvoje jsou prvního druhu). Označme $\mathfrak{s}\left(\frac{a}{d^r}\right) = x, \mathfrak{f}$.

[Na př. $\frac{2947}{d^2} = \frac{29 \,.\, d^2 + 47}{d^2}$, $x = 29$, $y = 47$; pravému zlomku $\frac{y}{d^2} = \frac{47}{d^2}$ patří číslice $s\left(\frac{47}{d^2}\right) = 0{,}47000\ldots$ a tedy číslu $\frac{2947}{d^2}$ patří $x, 47000\ldots = 29{,}47000\ldots$; x je počet „celků" a $\frac{y}{d^r}$ udává to, co přebývá na celky; je to pravý zlomek a ten určí místa za desetinnou čárkou.]

Cvičení 10,27. $\mathfrak{s}$ je zobrazení množiny $\mathfrak{Z}$ na ${}_d\mathfrak{F}$. [K číslici $x,\mathfrak{f}$ (rozvoj prvního druhu) určeme především pravý zlomek $\frac{y}{d^r}$, $s\left(\frac{y}{d^r}\right) = 0,\mathfrak{f}$ a pak $x,\mathfrak{f} = \mathfrak{s}\left(\frac{a}{d^r}\right)$, kde $a = d^r x + y$.]

10,28. $\mathfrak{s}(x) = s(x)$ pro $x \in \mathfrak{Z}_1$.

10,29. $\mathfrak{s}$ je podobnost množin $\mathfrak{Z}$ a ${}_d\mathfrak{F}$ (podle cvičení 10,26 a 10,24: $x,\mathfrak{f}$ se uspořádá napřed podle x a pak podle $\mathfrak{f}$ čili podle $\frac{y}{d^r}$. A to odpovídá uspořádání v $\mathfrak{Z}$.)

$\mathfrak{s}$ nám umožnilo každému zlomku $z \in \mathfrak{Z}$ přiřadit číslici $\mathfrak{s}(z) \in {}_d\mathfrak{F}$. Jde nám teď o to, rozšířit toto přiřazení tak, aby každému kladnému číslu x patřila kladná číslice $\sigma(x)$; aby $\sigma(x)$ všecky číslice vyčerpalo, aby se zachovalo uspořádání (t. j. σ byla podobnost) a pro $x \in \mathfrak{Z}$, aby $\sigma(x) = \mathfrak{s}(x)$. Ve větě 10,3 se ukáže, že jest přesně jedno takové σ; tak budeme umět psát kladná x ve tvaru kladných číslic $\sigma(x)$. Předešleme:

Cvičení 10,30. Pro $n \in \mathsf{N}$ jest $n < d^n$. (Pro $n = 1$ to platí. Nechť $n < d^n$. Pak $n + 1 < d^n + 1 \leqq d^n + (d - 1)\, d^n = d^{n+1}$. Indukcí tedy plyne $n < d^n$ pro všechna $n \in \mathsf{N}$.)

10,31. Množina $\mathfrak{Z}$ je hustá v $\mathfrak{P}$. ($\mathfrak{Z}$ je hustá v $\mathfrak{F}$: Pro $ab' < a'b$ volme $n = bb'$ a x největší přirozené, pro které $xb' < a'd^n$. Pak $a'd^n \leqq (x + 1)\, b'$. Kdyby $bx \leqq ad^n$, pak by (ježto $bb' < d^n$) bylo $(x + 1)\, bb' < (ab' + 1)\, d^n \leqq a'bd^n$, tedy $(x + 1)\, b' < a'd^n$. Tedy $\frac{a}{b} < \frac{x}{d^n} < \frac{a'}{b'}$.

10,32. ${}_d\mathfrak{F}$ je spočetná (podle cvičení 10,29).

10,33. ${}_d\mathfrak{P}$ je kontinuum; ${}_d\mathfrak{F}$ je hustá v ${}_d\mathfrak{P}$.

Věta 10,3. *Existuje jedna jediná podobnost σ množin $\mathfrak{P}$ a ${}_d\mathfrak{P}$ taková, že pro $x = \frac{a}{d^r}$ (a a r přirozená), jest $\sigma(x) = \mathfrak{s}\left(\frac{a}{d^r}\right)$.*

Každému kladnému číslu x patří kladná číslice $\sigma(x)$.

Důkaz. Plyne z předchozích cvičení a věty 8,5: $\mathsf{C}_1 = \mathfrak{P}$, $\mathsf{A}_1 = \mathfrak{Z}$, $\mathsf{C}_2 = {}_d\mathfrak{P}$, $\mathsf{A}_2 = {}_d\mathfrak{F}$; místo s a s je tu $\mathfrak{s}$ a σ. A teď pro jednoduchost nebudeme mezi číslem x a číslicí $\sigma(x)$ vůbec rozeznávat. Bude nám na př. jedno $\frac{365}{d^8}$ (d je deset) anebo 0,00000365000... Množina $\mathfrak{P}$ a ${}_d\mathfrak{P}$ bude jedno a totéž. To smíme udělat vzhledem k větě 10,3. Uspořádání a tedy i vše, co je definováno na základě uspořádání (první prvek, horní hranice a pod.) je stejné v $\mathfrak{P}$ a ${}_d\mathfrak{P}$. Zatím jsme mluvili jen o uspořádání a proto jsme klidně mohli zrušit rozdíl mezi kladnými čísly a kladnými číslicemi (v soustavě d). Zvláště také $\mathfrak{Z}$ a ${}_d\mathfrak{F}$ je jedno a totéž.

Je-li $\mathsf{A} \subset \mathsf{C}(<)$ a existuje-li $\alpha \in \mathsf{C}$ takové, že pro všecka $a \in \mathsf{A}$ jest $\alpha \leqq a$, pak je A *zdola ohraničená*. Je-li mezi těmi α nějaké největší, je to t. zv. *infimum* či *dolní hranice* množiny A; píšeme $\alpha = \inf \mathsf{A}$.

Cvičení 10,34. Každá zdola ohraničená množina $\emptyset \neq$ $\neq \mathsf{A} \subset \mathfrak{P}$ má (jednu jedinou) dolní hranici.

(Zkus to udělat na $\mathfrak{P}_d$, což je jedno, přizpůsobením důkazu věty 10,1.)

Z toho plyne: Každá neprázdná zdola ohraničená část kontinua má (jednu jedinou) dolní hranici.

2,11. Reálná čísla. [Nejdřív si řekneme, co je to součet, rozdíl, součin a podíl kladných zlomků; $a, a', b, b', x, x', y, y'$ budou přirozená čísla:

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + a'b}{bb'};$$

$$\text{je-li } \frac{a'}{b'} < \frac{a}{b}, \text{ pak } \frac{a}{b} - \frac{a'}{b'} = \frac{ab' - a'b}{bb'};$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'}; \qquad \frac{a}{b} : \frac{a'}{b'} = \frac{ab'}{a'b}.$$

Je-li α kladný zlomek nebo 0, pak $\alpha + 0 = \alpha - 0 = 0 +$ $+ \alpha = \alpha$, $0 . \alpha = \alpha . 0 = 0$, $\alpha - \alpha = 0$; dělení nulou: $\alpha : 0$ vůbec nezavádíme.

Cvičení 11,1. Součet, rozdíl, součin a podíl jsou jednoznačně určeny danými zlomky. (Na př. pro součet: Je-li $\dfrac{x}{y} = \dfrac{a}{b}$, $\dfrac{x'}{y'} = \dfrac{a'}{b'}$, t. j. $bx = ay$, $b'x' = a'y'$, pak

$\frac{xy' + x'y}{yy'} = \frac{(xy' + x'y)\,bb'}{yy'bb'} = \frac{(ab' + a'b)\,yy'}{bb'yy'} = \frac{ab' + a'b}{bb'}$.)

Jest $\frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \frac{a+b}{1}$, $\frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \frac{ab}{1}$; je-li $b < a$, pak $\frac{b}{1} < \frac{a}{1}$ a $\frac{a}{1} - \frac{b}{1} = \frac{a-b}{1}$. To nám dává právo ve jmenovateli jedničku vynechávat a psát prostě a místo $\frac{a}{1}$.]

Teď si rozšíříme obor čísel. Každému kladnému číslu α bude odpovídat určité t. zv. *záporné* číslo $-\alpha$; pro zřetelnost se místo α psává $+\alpha$. *Reálná* čísla jsou jednak kladná čísla, jednak záporná čísla, jednak číslo $0 = +0 = -0$. Číslo 0 má rozvoj 0,$\mathfrak{v}$ ($\mathfrak{v}(x) = 0$ pro všecka x). Označme $\mathfrak{R}$ množinu reálných čísel a $\mathfrak{N}$ množinu záporných čísel; $\mathfrak{P}$ je množina kladných čísel.

Početní operace si zavedeme nejdříve pro *racionální* čísla; jsou to čísla $+\alpha$ a $-\alpha$, kde α je kladný zlomek, $\alpha \in \mathfrak{Z}$, a mimo to číslo 0. Množinu všech racionálních čísel označíme *Rac*.

[Jsou-li α a β kladné zlomky nebo nula, pak definujeme:

1. $(+\alpha) + (+\beta) = +(\alpha + \beta)$; $(-\alpha) + (-\beta) = -(\alpha + \beta)$; je-li $\beta < \alpha$, pak $(+\alpha) + (-\beta) = (-\beta) + (+\alpha) = +(\alpha - \beta)$, a $(-\alpha) + (+\beta) = (+\beta) + (-\alpha) = -(\alpha - \beta)$;

2. $(\pm\alpha) - (+\beta) = (\pm\alpha) + (-\beta)$; $(\pm\alpha) - (-\beta) = (\pm\alpha) + (+\beta)$;

3. $(+\alpha) \cdot (+\beta) = (-\alpha) \cdot (-\beta) = +\alpha\beta$; $(+\alpha) \cdot (-\beta) = (-\alpha) \cdot (+\beta) = -\alpha\beta$;

4. $(+\alpha) : (+\beta) = (-\alpha) : (-\beta) = +(\alpha : \beta)$; $(+\alpha) : (-\beta) = (-\alpha) : (+\beta) = -(\alpha : \beta)$; při tom $\beta \neq 0$; nulou nedělíme.]

Cvičení 11,2. Jsou-li $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ a $\mathfrak{c}$ racionální čísla, pak

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c});\ \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a};$$
$$\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = \mathfrak{a} + (-\mathfrak{b});\ \mathfrak{a} + 0 = \mathfrak{a};\ \mathfrak{a} - \mathfrak{a} = 0;$$

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c} = \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c});\ \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a};\ \mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{b}^{-1},\ (\mathfrak{b} \neq 0);$$
$$\mathfrak{a} \,.\, 1 = \mathfrak{a};\ \mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{a}^{-1} = 1;$$
$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}.$$

(Při tom označujeme $-\mathfrak{b} = 0 - \mathfrak{b}$ a $\mathfrak{b}^{-1} = 1 : \mathfrak{b}$ pro $\mathfrak{b} \neq 0$.) Množinu $\mathfrak{R}$ si uspořádáme. Jsou-li α a β kladná čísla, pak $-\alpha < 0$; $0 < +\beta$; $-\alpha < +\beta$; je-li $\alpha < \beta$, pak ovšem $+\alpha < +\beta$, avšak $-\beta < -\alpha$.

Cvičení 11,3. $<$ je uspořádání množiny $\mathfrak{R}$.

Označme ${}_d Rac$ množinu všech $+\alpha$ a $-\alpha$, kde $\alpha \in {}_d\mathfrak{F} + \{0\}$. Tedy ${}_d Rac$ je množina těch reálných čísel, jichž číslice v soustavě d má za („desetinnou") čárkou od jistého místa samé nuly: $\pm x,\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}(y) = 0$ pro $y > r$.

Cvičení 11,4. ${}_d Rac \subset Rac$. Množiny ${}_d Rac$ a Rac jsou spočetné a husté v $\mathfrak{R}$.

11,5. $\mathfrak{R}$ je kontinuum. (Každá shora ohraničená část má horní hranici.)

Každé reálné $\mathfrak{a} \neq 0$ se dostane z určitého kladného α, tak, že opatříme znaménkem $+$ či $-$. To α označujeme $|\mathfrak{a}|$ a říkáme mu *absolutní hodnota* čísla $\mathfrak{a}$. Pro $\mathfrak{a} = 0$ klademe: $|0| = 0$.

Cvičení 11,6. Pro racionální $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ jest $\mathfrak{b} - \mathfrak{a}$ kladné a $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ záporné číslo.

Jest $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, když a jen když existuje kladné racionální $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + \mathfrak{u}$.

Cvičení 11,7. Pro racionální $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ jest:

$$|\mathfrak{a} + \mathfrak{b}| \leqq |\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}|; \quad |\mathfrak{a} - \mathfrak{b}| \leqq |\mathfrak{a}| + |\mathfrak{b}|;$$
$$||\mathfrak{a}| - |\mathfrak{b}|| \leqq |\mathfrak{a} - \mathfrak{b}|; \quad |\mathfrak{a}\mathfrak{b}| = |\mathfrak{a}| \,.\, |\mathfrak{b}|;$$
$$|\mathfrak{a} : \mathfrak{b}| = |\mathfrak{a}| : |\mathfrak{b}|; \quad |\mathfrak{a} - \mathfrak{b}| = |\mathfrak{b} - \mathfrak{a}|.$$

(Na př. první vzorec: Buď $|\mathfrak{a}| = \alpha$, $|\mathfrak{b}| = \beta$. Podle 1 jest $|\mathfrak{a} + \mathfrak{b}|$ rovno buď $\alpha + \beta$ nebo $\alpha - \beta$ nebo $\beta - \alpha$ a to je vždy $\leqq \alpha + \beta$.)

[Z pravidel ve cvičeních 11,2, 11,6, (a 11,7) plynou všecka ostatní pravidla o počítání s racionálními čísly. S racionálními čísly budu počítat jako se známou věcí: čtenář si sám v každém jednotlivém případě ověří správnost na základě udaných pravidel. „Racionální“ zkracuji „rac“.]

Cvičení 11,8. Buď d přirozené > 1 a užívejme označení minulého odstavce. Buď $d^{-x} = 1 : d^x$. Ke každému $\varepsilon \in \mathfrak{P}$ možno nalézt $r \in \mathsf{N}$ takové, že $d^{-r} < \varepsilon$. Pro $r < x$ jest $d^{-x} < d^{-r}$, tedy $d^{-x} < \varepsilon$.

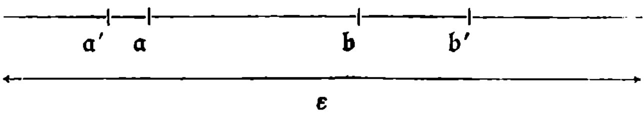
(Buď η kladný zlomek $< \varepsilon$, $1 : \eta = x,\mathfrak{f}$; pak $1 : \eta < x + 2 = u$. Kdyby $d^r < u$ pro všecka r, pak by jedno d^r bylo největší (poslední), což není možné, neboť $d^r < d^{r'}$, když $r < r'$. Tedy pro jisté r jest $u \leqq d^r$, tedy $1 : \eta < d^r$, tedy $d^{-r} < \eta < \varepsilon$.

11,9. Ke každému $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}$ a $\eta \in \mathfrak{P}$ možno nalézt racionální $\underline{\mathfrak{a}}$ a $\overline{\mathfrak{a}}$ taková, že $\underline{\mathfrak{a}} < \mathfrak{a} < \overline{\mathfrak{a}}$, $\overline{\mathfrak{a}} - \underline{\mathfrak{a}} < \eta$.

(Pišme $\mathfrak{a} = \pm\, x,\mathfrak{f}$; označme $\alpha_s = x,\mathfrak{f}'$, kde $\mathfrak{f}'(y) = \mathfrak{f}(y)$ pro $y \leqq s$, $\mathfrak{f}'(y) = 0$ pro $y > s$. Možno psát $\alpha_s = a_s d^{-s}$, $a_s \in \mathsf{N}_0$. Jest $a_s d^{-s} \leqq \alpha \leqq (a_s + 1)\, d^{-s}$; $\alpha = |\mathfrak{a}| = x,\mathfrak{f}$. Buď $d^{-r} < \eta$, $r > 1$, $s = r - 1$, $\mathfrak{a}' = (a_s d - 1)\, d^{-r}$, $\mathfrak{a}'' = [(a_s + 1)\, d + 1]\, d^{-r}$. Pak $\mathfrak{a}'$ a $\mathfrak{a}''$ jsou racionální, $\mathfrak{a}' < \alpha < \mathfrak{a}''$, $\mathfrak{a}'' - \mathfrak{a}' < d^{2-r} < \eta$. Je-li $\mathfrak{a}$ kladné nebo nula, volme $\underline{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}'$, $\overline{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}''$; je-li $\mathfrak{a}$ záporné, volme $\underline{\mathfrak{a}} = -\mathfrak{a}''$, $\overline{\mathfrak{a}} = -\mathfrak{a}'$.)

[Malá řecká písmena budou vždy kladná čísla a malá německá budou reálná čísla.]

$\mathfrak{x}$ je mezi $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$, když buďto $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{x} \leqq \mathfrak{b}$ anebo $\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{x} \leqq \mathfrak{a}$. Říkáme, že $\mathfrak{a}$ *je rovno* $\mathfrak{b}$ *s chybou menší než* ε a píšeme $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}(< \varepsilon)$, když čísla $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ jsou obě mezi dvěma racionálními čísly $\mathfrak{a}'$ a $\mathfrak{b}'$ takovými, že $|\mathfrak{a}' - \mathfrak{b}'| < \varepsilon$:



Cvičení 11,10. Jsou-li $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ racionální, pak $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}(< \varepsilon)$, když a jen když $|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}| < \varepsilon$.

(Je-li $|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}| < \varepsilon$, volme $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}$ a vyjde $\mathfrak{a} \equiv \equiv \mathfrak{b}(< \varepsilon)$. A je-li naopak $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}(< \varepsilon)$ a na př. $\mathfrak{a}' \leqq \mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b} \leqq \leqq \mathfrak{b}'$, $|\mathfrak{a}' - \mathfrak{b}'| < \varepsilon$, pak $|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}| = \mathfrak{b} - \mathfrak{a} = (\mathfrak{b}' - \mathfrak{a}') - - (\mathfrak{b}' - \mathfrak{b}) - (\mathfrak{a}' - \mathfrak{a}) \leqq \mathfrak{b}' - \mathfrak{a}' < \varepsilon$.)

11,11. Je-li $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}(< \varepsilon)$, $\mathfrak{a}^*$ a $\mathfrak{b}^*$ racionální mezi $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$, pak $|\mathfrak{a}^* - \mathfrak{b}^*| < \varepsilon$. Obecněji totiž platí:

Je-li $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}(< \varepsilon)$, $\mathfrak{a}^*$ a $\mathfrak{b}^*$ reálná mezi $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$, pak $\mathfrak{a}^* \equiv \mathfrak{b}^*(< \varepsilon)$.

Cvičení 11,12. $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a}(< \eta)$ pro každé η. ($\mathfrak{a}$ je mezi $\underline{\mathfrak{a}}$ a $\overline{\mathfrak{a}}$ podle cvičení 11,9.)

Je-li $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}(< \eta)$, pak také $\mathfrak{b} \equiv \mathfrak{a}(< \eta)$; je-li $\eta_1 < \eta_2$, $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}(< \eta_1)$, pak $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}(< \eta_2)$.

Buďte η_1 a η_2 kladné zlomky; je-li $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}(<\eta_1)$, $\mathfrak{b} \equiv \equiv \mathfrak{c}(<\eta_2)$, pak $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{c}(< \eta_1 + \eta_2)$.

(Buď na př. $\mathfrak{a} < \mathfrak{c}$. Čárkovaná písmena budou rac. čísla. $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ buď mezi $\mathfrak{a}'$ a $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{a}' \leqq \mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}' - \mathfrak{a}' < \eta_1$; podobně $\mathfrak{b}$ a $\mathfrak{c}$ buď mezi $\mathfrak{b}''$ a $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{b}'' \leqq \mathfrak{c}''$, $\mathfrak{c}'' - \mathfrak{b}'' < \eta_2$. Pak $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ jsou mezi $\mathfrak{a}'$ a $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{a}' < \mathfrak{c}''$. — A $\mathfrak{c}'' - \mathfrak{a}' = (\mathfrak{c}'' - \mathfrak{b}'') - - (\mathfrak{b}' - \mathfrak{b}'') + (\mathfrak{b}' - \mathfrak{a}') < \eta_1 + \eta_2$.)

Malá latinská písmena budou vždy přirozená čísla. Platí-li nějaký výrok pro všecka x, která jsou větší než jisté r (t. j. $r < x$), pak říkáme, že ten výrok platí pro *dost velká* x.

Cvičení 11,13. Mám-li dva výroky (a obecněji konečnou množinu výroků), které platí každý pro dost velká x, pak pro dost velká x platí všecky ty výroky zároveň.

(Ze všech r (jichž je konečně mnoho) vezmeme poslední. Pro x větší než to největší r, platí všecky naše výroky.)

Posloupnost je zobrazení f množiny N do $\mathfrak{R}$; $f(x)$ je x-tý člen posloupnosti f. Jsou-li členy $f(x)$ racionální, nazývá se f *racionální*. Posloupnost f nazývá se *konvergentní* (nebo *Cauchyova*), když pro dost velká x a y jsou si členy $f(x)$ a $f(y)$

libovolně blízko, t. j. když pro libovolné ε platí $f(x) \equiv f(y)$ $(< \varepsilon)$ pro dost velká x a y.

Číslo a je *limita* posloupnosti f ($a = \lim f$ nebo $f \to a$), když pro dost velká x jsou členy $f(x)$ libovolně blízko k a, t. j. když pro libovolně zvolené ε platí $f(x) \equiv a(< \varepsilon)$ pro dost velká x.

Cvičení 11,14. Když je f konvergentní, pak množina $f(\mathsf{N})$ je (shora i zdola) ohraničená.

(Kdyby nebyla shora ohraničená, pak by ke každému n bylo možné najíti x_n tak, aby $n < f(x_n)$. Pro dost velká x a y, řekneme větší než r, jest $f(x) \equiv f(y)$ (< 1). Buď $f(r + 1) < < m$. Volme $n > r + m$. Jest

$$f(r + 1) < m < n < f(x_n);$$

je-li $x_n > r$, pak $f(r + 1) \equiv f(x_n)$ (< 1), tedy $m \equiv n(< 1)$, což není možné. Tedy pro $n > r + m$ jest $x_n \leqq r$. Tedy všech x_n je jen konečně mnoho: jsou to jednak x_n pro $n \leqq r + m$, jednak jakási $x_n \leqq r$. Tedy i členů $f(x_n)$ je jen konečně mnoho. Je-li $f(x_m)$ největší z nich, pak volme $k > f(x_m)$; pak $f(x_m) < k < f(x_k)$ a to je spor. Obdobně se vidí, že $f(\mathsf{N})$ je zdola ohraničená. Existuje kladný zlomek μ takový, že $|f(x)| < \mu$ pro všecka x.)

Cvičení 11,15. Je-li $a' < a$, $f \to a$, pak pro dost velká x jest $a' < f(x)$.

(Volme rac. a'' a a''', $a' < a'' < a''' < a$, $a''' - a'' = \eta$. Pro dost velká x jest $f(x) \equiv a(< \eta)$. Podle cvičení 11,9 volme $\underline{a}$ a $\overline{a}$. Kdyby $f(x) \leqq a'$, pak by $f(x) < a'' < a''' < a$ a tedy podle cvičení 11,11 by bylo $a''' - a'' < \eta$.)

Podobně: Je-li $a < a''$, $f \to a$, pak pro dost velká x jest $f(x) < a''$.

[Lze tedy říci, že $f \to a$ znamená toto:

Ať zvolíme a' a a'' jakkoliv, $a' < a < a''$, pak pro dost velká x jest $a' < f(x) < a''$.

(Je-li $f(x) \to a$, pak to plyne z právě dokázaného. Nechť naopak jest $a' < f(x) < a''$ pro skoro všecka x, ať zvolím

a' a a'' jakkoliv, $a' < a < a''$. Dáno-li ε, volme $a' = \underline{a}$, $a'' = \bar{a}$ podle cvičení 11,9 pro $\eta = \varepsilon$. Pak a a $f(x)$ je obojí mezi $\underline{a}$ a $\bar{a}$ a tedy $f(x) \equiv a (< \varepsilon)$ pro dost velká x, tedy $f \to a$.)

Cvičení 11,16. Posloupnost má nejvýš jednu limitu. (Buď $a_1 < a_2$, $f \to a_1$, $f \to a_2$; volme a', $a_1 < a' < a_2$. Pak pro dost velká x je jednak $f(x) < a'$, jednak $a' < f(x)$, což není možné.)

Věta 11,1. *Posloupnost má limitu, když a jen když je konvergentní. A ta limita je jediná.*

Důkaz. Je-li $f \to a$, ε libovolné, volme kladný zlomek $\varepsilon' < \varepsilon$, $\eta = \varepsilon' : 2$. Pro dost velká x a y je pak $f(x) \equiv a (< \eta)$ a $f(y) \equiv a (< \eta)$. Podle cvičení 11,12 tedy $f(x) \equiv f(y)$ $(< \eta + + \eta)$, t. j. $f(x) \equiv f(y)$ $(< \varepsilon')$ tedy $f(x) \equiv f(y)$ $(< \varepsilon)$. Tedy je f konvergentní.

Za druhé buď f konvergentní. Máme najít limitu posloupnosti f. Podle cvičení 11,14 existují čísla $\mathfrak{m}$ a $\mathfrak{n}$ taková, že pro všecka x jest $\mathfrak{m} < f(x) < \mathfrak{n}$. Buď A množina všech reálných $\mathfrak{x}$ takových, že pro dost velká x jest $f(x) < \mathfrak{x}$. Taková $\mathfrak{x}$ existují, na př. $\mathfrak{n} \in \mathsf{A}$. Buď $\mathfrak{x} \leqq \mathfrak{m}$. Pak pro všecka x platí $\mathfrak{x} \leqq \mathfrak{m} < < f(x)$ a tedy $\mathfrak{x}$ non ε A. Pro všecka $\mathfrak{x} \in \mathsf{A}$ tedy $\mathfrak{m} < \mathfrak{x}$ a A je zdola ohraničená část kontinua $\mathfrak{R}$ a má tedy podle cvičení 10,34 dolní hranici a. Tvrdím: $f \to a$.

[Dáno-li η, volme $\underline{a}$ a $\bar{a}$ podle cvičení 11,9. Pak existuje $\mathfrak{x} \in \mathsf{A}$, $\underline{a} < \mathfrak{x} \leqq \bar{a}$. (Kdyby nebylo takového $\mathfrak{x}$, pak by pro všecka $\mathfrak{x} \in \mathsf{A}$ bylo $\bar{a} < \mathfrak{x}$; ale a je *poslední* takový prvek, pro který $a < \mathfrak{x}$ pro všecka $\mathfrak{x} \in \mathsf{A}$.) Pro dost velká x jest $f(x) < \mathfrak{x}$ (neboť $\mathfrak{x} \in \mathsf{A}$) a tedy $f(x) < \bar{a}$. Volme kladný zlomek $\varepsilon' < \varepsilon$, $\eta = \varepsilon' : 3$. Pro dost velká x a y jest $f(x) \equiv f(y)$ $(< \eta)$ a mimo to $f(x) < \bar{a}$. Jelikož $\underline{a} < a$, jest $\underline{a}$ non $\in$ A a tedy mezi našimi y se dá najít takové, pro které $\underline{a} \leqq f(y)$. Jest dále $\underline{a} - \eta < < f(x)$. (Kdyby $f(x) \leqq \underline{a} - \eta < \underline{a} \leqq f(y)$, pak by podle cvičení 11,11 z $f(x) \equiv f(y)$ $(< \eta)$ plynulo $\eta = \underline{a} - (\underline{a} - \eta) < \eta$.) Tedy pro naše dost velká x jest $\underline{a} - \eta < f(x) < \bar{a}$. Čísla $\underline{a}$

a $f(x)$ jsou mezi $\mathfrak{a} - \eta$ a $\bar{\mathfrak{a}}$ a jest $\bar{\mathfrak{a}} - (\mathfrak{a} - \eta) = (\bar{\mathfrak{a}} - \mathfrak{a}) + \eta \leqq \eta + \eta = 2\eta < 3\eta = \varepsilon' < \varepsilon$. Tedy $f(x) \equiv \mathfrak{a}(< \varepsilon)$ a $f \to \mathfrak{a}$.]

[Některé výroky platí pro všecky čtyři úkony početní. Abychom je neopakovali čtyřikrát, zavedeme si znak $\circ$, který bude zastupovat $+$ nebo $-$ nebo . nebo :; $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$ znamená $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ nebo $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ nebo $\mathfrak{a} . \mathfrak{b}$ nebo $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$. (Při dělení se předpokládá $\mathfrak{b} \neq 0$.)]

Cvičení 11,16 bis. Je-li $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}', \mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \varepsilon, \eta$ racionální a $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a}'$ $(< \varepsilon)$, $\mathfrak{b} \equiv \mathfrak{b}'$ $(< \eta)$, je $\mathfrak{a} \pm \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{a}' \pm \mathfrak{b}'$ $(< \varepsilon + \eta)$. Je-li kromě toho ještě α racionální, $|\mathfrak{a}| < \alpha$, $|\mathfrak{a}'| < \alpha$, $|\mathfrak{b}| < \alpha$, $|\mathfrak{b}'| < \alpha$, je $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \equiv \mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ $(< (\varepsilon + \eta)\,\alpha)$. Je-li kromě toho β racionální, $|\mathfrak{b}| > \beta$, $|\mathfrak{b}'| > \beta$, je $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} \equiv \mathfrak{a}' : \mathfrak{b}'$ $(< \alpha(\varepsilon + \eta) : \beta^2)$. [Plyne ihned z cvičení 11,10 a 11,7: $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a}'$ $(< \varepsilon)$ značí $|\mathfrak{a} - \mathfrak{a}'| < \varepsilon$, $\mathfrak{b} \equiv \mathfrak{b}'$ $(< \eta)$ značí $|\mathfrak{b} - \mathfrak{b}'| < \eta$, tedy $|(\mathfrak{a} \pm \mathfrak{b}) - (\mathfrak{a}' \pm \mathfrak{b}')| \leqq |\mathfrak{a} - \mathfrak{a}'| + |\mathfrak{b} - \mathfrak{b}'| < \varepsilon + \eta$. $|\mathfrak{a}\mathfrak{b} - \mathfrak{a}'\mathfrak{b}'| = |\mathfrak{a}(\mathfrak{b} - \mathfrak{b}') + \mathfrak{b}'(\mathfrak{a} - \mathfrak{a}')| < \alpha(\varepsilon + \eta)$. $|(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) - (\mathfrak{a}' : \mathfrak{b}')| = |(\mathfrak{a}(\mathfrak{b}' - \mathfrak{b}) + \mathfrak{b}(\mathfrak{a} - \mathfrak{a}')) : (\mathfrak{b}\mathfrak{b}')| < \alpha(\varepsilon + \eta) : \beta^2$.]

Buďtež f a g dvě posloupnosti racionální. Pak $f \circ g$ je posloupnost, jejíž x-tý člen je $f(x) \circ g(x)$. [Značí-li $\circ$ dělení, budeme vždy předpokládat $g(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \mathsf{N}$ a $\lim g \neq 0$.]

Věta 11,2. *Nechť racionální posloupnosti f a g jsou konvergentní. Pak též posloupnost $f \circ g$ je konvergentní.*

Důkaz. I. Nechť $\circ$ značí $+$ nebo $-$. Budiž ε libovolné a $\varepsilon' < \varepsilon$, ε' racionální. Pak pro dosti velká x a y platí $f(x) \equiv f(y)$ $(< \frac{1}{2}\varepsilon')$, $g(x) \equiv g(y)$ $(< \frac{1}{2}\varepsilon')$ a tedy dle cvičení 11,16 bis je $f(x) \circ g(x) \equiv f(y) \circ g(y)$ $(< \varepsilon')$, tedy $f(x) \circ g(x) \equiv f(y) \circ g(y)$ $(< \varepsilon)$ tedy $f \circ g$ je konvergentní.

II. Nechť $\circ$ značí násobení. Dle cvičení 11,14 je množina $f(\mathsf{N})$ i $g(\mathsf{N})$ ohraničená, tedy $|f(x)| < \alpha$, $|g(x)| < \alpha$ pro jisté racionální α a pro všechna x. Budiž ε libovolné, $\varepsilon' < \varepsilon$, ε' racionální. Pak pro dosti velká x a y je $f(x) \equiv f(y)$ $(< \varepsilon' : (2\alpha))$,

$g(x) \equiv g(y)$ $(< \varepsilon' : (2\alpha))$ a tedy dle cvičení 11,16 bis $f(x)$ . . $g(x) \equiv f(y)\,g(y)$ $(< \varepsilon')$ tedy $f \circ g$ je konvergentní.

III. Nechť $\circ$ značí dělení. Dle cvičení 11,14 je množina $f(\mathsf{N})$ i $g(\mathsf{N})$ ohraničená, tedy $|f(x)| < \alpha$, $|g(x)| < \alpha$ pro jisté racionální α a pro všechna x. Ježto $g(x) \neq 0$ a $\lim g \neq 0$, je $|g(x)| > \beta$ pro jisté racionální β a všechna x. [Ukáže se podobně jako ve cvičení 11,14.] Budiž ε libovolné, $\varepsilon' < \varepsilon$, ε' racionální. Pak $f(x) \equiv f(y)$ $(< \varepsilon'\beta^2 : (2\alpha))$, $g(x) \equiv g(y)$ $(< \varepsilon'\beta^2 : : (2\alpha))$ pro dosti velká x, y a tedy dle cvičení 11,16 bis $f(x) : : g(x) \equiv f(y) : g(y)$ $(< \varepsilon')$ tedy $f \circ g$ je konvergentní.

Cvičení 11,17. Každé přirozené číslo se dá psát přesně jedním způsobem ve tvaru $2k$ (pak se mu říká *sudé*) nebo $2k - 1$ (pak je *liché*), $k \in \mathsf{N}$.

(Z věty 7,1 plyne tvar $2k'$ a $2k' + 1$, kde $k' \in \mathsf{N}_0$, ale $k'=0$ se nehodí dobře, neboť $2 . 0 = 0$. Tedy místo k' vezmeme $k = k' + 1$; to už bude $k \in \mathsf{N}$ a $2k = 2(k' + 1)$ a $2k - 1 = = 2k' + 1$.)

Věta 11,3. *Nechť racionální posloupnosti f a f' mají stejnou limitu; nechť racionální posloupnosti g a g' mají stejnou limitu; pak posloupnosti $f \circ g$ a $f' \circ g'$ mají stejnou limitu.*

Důkaz. Z posloupností f a f' sestrojme novou posloupnost f'' takto: $f''(2k) = f(k)$, $f''(2k - 1) = f'(k)$. Je-li $f \to \mathfrak{a}$, $f' \to \mathfrak{a}$, pak tvrdím: $f'' \to \mathfrak{a}$.

[Pro $k > r$ buď $f(k) \equiv \mathfrak{a}(< \varepsilon)$ a $f'(k) \equiv \mathfrak{a}(< \varepsilon)$. Je-li $x > 2r$, pak $x = 2k$ nebo $x = 2k - 1$, $k > r$ a tedy $f''(x) \equiv \equiv \mathfrak{a}(< \varepsilon)$.] Obdobně buď $g''(2k) = g(k)$, $g''(2k - 1) = g'(k)$. Je-li $g \to \mathfrak{b}$, $g' \to \mathfrak{b}$, pak zase též $g'' \to \mathfrak{b}$.

Označíme-li $h = f \circ g$, $h' = f' \circ g'$, $h'' = f'' \circ g''$, pak podle věty 11,2 jest h'' konvergentní. Jest ovšem $h''(2k) = = h(k)$, $h''(2k - 1) = h'(k)$. Označíme $\mathfrak{c} = \lim h''$. Dáno-li ε, pak pro jisté r platí: je-li $x > r$, jest $h''(x) \equiv \mathfrak{c}(< \varepsilon)$. Pro $x > r$ je tedy $h(x) = h''(2x) \equiv \mathfrak{c}(< \varepsilon)$ (neboť $2x > r$) a podobně $h'(x) = h''(2x - 1) \equiv \mathfrak{c}(< \varepsilon)$ (neboť $2x - 1 > r$) a tedy $h \to \mathfrak{c}$ a $h' \to \mathfrak{c}$. Tedy h a h' mají stejnou limitu.

Cvičení 11,18. Je-li $\mathfrak{a} = \lim f$ racionální, $\mathfrak{b} = \lim g$ racionální, f a g racionální, pak $f \circ g \rightarrow \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$.

(f' buď posloupnost, jejíž všecky členy jsou $\mathfrak{a}$; g' buď posloupnost, jejíž všecky členy jsou $\mathfrak{b}$. Pak $f' \circ g'$ má všecky členy rovny $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$. Jest $f' \rightarrow \mathfrak{a}$, $g' \rightarrow \mathfrak{b}$, $f' \circ g' \rightarrow \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$ a tedy podle věty 11,3 též $f \circ g \rightarrow \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$.)

Cvičení 11,19. Ke každému $\mathfrak{a}$ se dá najít racionální posloupnost $f \rightarrow \mathfrak{a}$; možno voliti všecky členy $f(x) \neq 0$. Dokonce tu posloupnost lze volit tak, aby $f(x) \in {}_d Rac$. (Ke každému δ existuje $\mathfrak{a}' \in {}_d Rac$ takové, že $\mathfrak{a}' \equiv \mathfrak{a} (< \delta)$.)

(Ke každému $\eta = d^{-x}$ volme $\underline{\mathfrak{a}}$ a $\overline{\mathfrak{a}}$ podle cvičení 11,13. Mezi $\underline{\mathfrak{a}}$ a $\overline{\mathfrak{a}}$ volme od nuly různé racionální číslo a to označme $f(x)$.)

To nás vede k možnosti zavést početní úkony pro všecka reálná čísla. K $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ zvolíme racionální posloupnosti $f \rightarrow \mathfrak{a}$, $g \rightarrow \mathfrak{a}$, $g(x) \neq 0$ (k vůli dělení). Podle věty 11,1 a 11,2 má $f \circ g$ limitu a tu označíme $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$. Podle cvičení 11,18 to souhlasí se starou definicí pro racionální $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$.

Náš přítel si zvolí místo f a g jiné posloupnosti $f' \rightarrow \mathfrak{a}$ a $g' \rightarrow \mathfrak{a}$ a pro něho $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$ bude limita posloupnosti $f' \circ g'$; podle věty 11,3 mu ale vyjde totéž jako nám.

Cvičení 11,20. Platí pravidla ze cvičení 11,2, i když $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ a $\mathfrak{c}$ jsou libovolná reálná čísla.

(Volme $f \rightarrow \mathfrak{a}$, $g \rightarrow \mathfrak{b}$, $h \rightarrow \mathfrak{c}$; f, g, h racionální. Pak na př. $(f + g) + h = f + (g + h)$ podle cvičení 11,2 a v limitě $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$. Atd.)

11,21. Je-li $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, jest $\mathfrak{b} - \mathfrak{a}$ kladné a $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ záporné. (Vol $\mathfrak{a} < \mathfrak{c} < \mathfrak{b}$; racionální f a g, $f \rightarrow \mathfrak{a}$, $g \rightarrow \mathfrak{b}$, $f(x) < \mathfrak{c} < g(x)$ pro všecka x; $g(x) - f(x) > 0$ a limita $\mathfrak{b} - \mathfrak{a}$ tedy nemůže být záporná. A nula to též není, sic by bylo $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.)

Jest $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, když a jen když existuje kladné $\mathfrak{u}$ takové, že $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + \mathfrak{u}$.

11,22. Platí cvičení 11,7 pro libovolná reálná $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$.

11,23. Jest $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}(< \varepsilon)$, když a jen když $|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}| < \varepsilon$. (Je-li $|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}| < \varepsilon$ a na př. $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$; buď $\eta = \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon - (\mathfrak{b} - \mathfrak{a}))$; buď $\mathfrak{a}' < \mathfrak{a} < \mathfrak{b} < \mathfrak{b}'$, $\mathfrak{a}'$ a $\mathfrak{b}'$ racionální, $\mathfrak{a}' \equiv \mathfrak{a}(< \eta)$, $\mathfrak{b}' \equiv \mathfrak{b}(< \eta)$. Pak $\mathfrak{b}' - \mathfrak{a}' < \varepsilon$ a tedy $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}(< \varepsilon)$. Je-li $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}(< \varepsilon)$, pak se $|\mathfrak{a} - \mathfrak{b}| < \varepsilon$ dokáže jako ve cvičení 11,10.)

11,24. Jestli f a g konverguje, pak $f \circ g$ konverguje. (Důkaz jako věty 11,2; teď už umíme to udělat pro libovolná reálná čísla.)

11,25. Mají-li f a f' stejnou limitu a g a g' stejnou limitu, pak $f \circ g$ a $f' \circ g'$ mají stejnou limitu. (Srovnej větu 11,3.)

11,26. Je-li $f \rightarrow \mathfrak{a}$ a $g \rightarrow \mathfrak{b}$, pak $f \circ g \leftarrow \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$. (Srovnej cvičení 11,18.)

[To, co jsme nahoře mohli dělat jen pro racionální čísla, umíme už udělat pro libovolná reálná a to stejnou methodou, protože pravidla ze cvičení 11,2, 11,6 a 11,7 zůstala v platnosti.]

Princip aproximace. Dána reálná čísla $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ a kladné číslo ε. Pak lze najít kladné δ takové, že pro každá dvě čísla $\mathfrak{a}' \equiv \mathfrak{a}(< \delta)$ a $\mathfrak{b}' \equiv \mathfrak{b}(< \delta)$ jest $\mathfrak{a}' \circ \mathfrak{b}' \equiv \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}(< \varepsilon)$.

Důkaz. Nechť tomu tak není. Je-li $\delta = d^{-x}$, volme $\mathfrak{a}' \equiv \mathfrak{a}(< \delta)$ a $\mathfrak{b}' \equiv \mathfrak{b}(< \delta)$ tak, aby $\mathfrak{a}' \circ \mathfrak{b}'$ nebylo rovno $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$ s chybou menší než ε a označme $f(x) = \mathfrak{a}'$, $g(x) = \mathfrak{b}'$. Pak $f \rightarrow \mathfrak{a}$ a $g \rightarrow \mathfrak{b}$.

[Dáno-li totiž η, pak pro dost velká x jest $d^{-x} < \eta$ a tedy $f(x) \equiv \mathfrak{a}(< \eta)$ a $g(x) \equiv \mathfrak{b}(< \eta)$.] Tedy $f \circ g \rightarrow \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$. Pro dost velká x tedy $f(x) \circ g(x) \equiv \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}(< \varepsilon)$, tedy přece jen $\mathfrak{a}' \circ \mathfrak{b}' \equiv \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}(< \varepsilon)$.

A to je důležitá věc. Abychom vypočetli $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$ přibližně, a to s chybou menší než dané ε, nemusíme znát $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ přesně. Stačí místo $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ vzít jakási jiná čísla $\mathfrak{a}'$ a $\mathfrak{b}'$ lišící se od $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ o méně než jakési δ. Místo $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$ vypočteme prostě $\mathfrak{a}' \circ \mathfrak{b}'$. Chyba, které jsme se tím dopustili, je menší než ε. A to přibližná čísla $\mathfrak{a}'$ a $\mathfrak{b}'$, možno volit racionální anebo dokonce tak, aby za desetinnou čárkou měla od jistého místa počínaje samé nuly. (Viz cvičení 11,19.)

A to je obvyklý způsob počítání. Výsledek chceme jen na jistý počet desetinných míst; a v daných číslech se omezujeme také na jistý počet míst. Stejně při měření. Jistou veličinu chceme znát s chybou menší než ε; počítáme ji z naměřených veličin. K tomu ε si určíme napřed δ, které nám udává, jak přesně musíme dané veličiny naměřit, aby počítaná veličina byla zatížena chybou menší než ε.

Cvičení 11,27. Princip aproximace nám může $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$ definovat: Buď $\mathfrak{s}$ číslo takové, že pro každé ε existuje δ takové, že je-li $\mathfrak{a}' \equiv \mathfrak{a}(< \delta)$, $\mathfrak{b}' \equiv \mathfrak{b}(< \delta)$, pak $\mathfrak{a}' \circ \mathfrak{b}' \equiv \mathfrak{s}(< \varepsilon)$; při tom $\mathfrak{a}'$ a $\mathfrak{b}'$ bereme z *Rac* (nebo $_d\mathit{Rac}$). Pak $\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$.

(Volme $f \to \mathfrak{a}$, $g \to \mathfrak{b}$, $f(x)$ a $g(x) \in \mathit{Rac}$ (nebo $_d\mathit{Rac}$); pak se dokáže, že $f \circ g \to \mathfrak{s}$ a tedy vskutku $\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \odot \mathfrak{b}$.)

Tedy $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$ je to jediné číslo, které je aproximováno součty $\mathfrak{a}' \circ \mathfrak{b}'$.

2,12. Kardinální čísla. U konečných množin jsme si už počet prvků definovali. Bylo to přirozené číslo (nebo 0 pro množinu $\emptyset$). Teď budem mluvit o počtu prvků i ostatních, t. j. nekonečných množin. Stejný počet prvků budou mít dvě množiny, když budou ekvivalentní, což u konečných množin klape podle cvičení 5,2 a 5,3:

Buď $\mathfrak{a}$ počet prvků množiny A, $\mathfrak{b}$ počet prvků množiny B. Pak $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, když a jen když $\mathsf{A} \sim \mathsf{B}$.

Cvičení 12,1. Tato rovnost splňuje všecky požadavky na rovnost kladené:

(reflexivita) $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$;

(symetrie) je-li $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, pak také $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$;

(transitivita) je-li $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ a $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, pak také $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$.

Symbolům $\mathfrak{a}$ říkáme *kardinální čísla*. [Malá německá písmena budou značit kardinální čísla.]

Nechť A má $\mathfrak{a}$ prvků (t. j. počet prvků množiny A je $\mathfrak{a}$); nechť B má $\mathfrak{b}$ prvků.

Je-li $\mathsf{AB} = \emptyset$, pak počet prvků množiny $\mathsf{A} + \mathsf{B}$ označíme $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$.

$\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{b} = \mathfrak{ab}$ je počet prvků množiny $\mathsf{A} \times \mathsf{B}$.

$\mathfrak{b}^{\mathfrak{a}}$ je počet prvků množiny B^{A}.

Cvičení 12,2. Čísla $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{b}$ a $\mathfrak{b}^{\mathfrak{a}}$ jsou čísly $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ přesně určena. (Můj přítel, který užívá k jich výpočtu jiných množin A a B než já, přec jen dostane stejné výsledky. Srovnej cvičení 5,4, 5,5 a 5,6.)

12,3. Ke každým dvěma kardinálním $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ skutečně čísla $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{b}$ a $\mathfrak{b}^{\mathfrak{a}}$ lze nalézt. Jsou to zas kardinální čísla. (Má-li A' $\mathfrak{a}$ prvků a B' $\mathfrak{a}$ prvků, volme $\mathsf{A} = \mathsf{A}' \times \{1\}$, $\mathsf{B} = \mathsf{B}' \times \{2\}$; srovnej cvičení 5,3.)

12,4. Volíce A a B jako ve 12,3 a $\mathsf{C} = \mathsf{C}' \times \{3\}$, kde C' má $\mathfrak{c}$ prvků, odvodíme jako ve cvičení 5,8:

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} &= \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}),\\
\mathfrak{a} + \mathfrak{b} &= \mathfrak{b} + \mathfrak{a},\\
(\mathfrak{ab})\,\mathfrak{c} &= \mathfrak{a}(\mathfrak{bc}),\\
\mathfrak{ab} &= \mathfrak{ba},\\
1 \,.\, \mathfrak{a} &= \mathfrak{a},\\
\mathfrak{a}\,(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) &= \mathfrak{ab} + \mathfrak{ac},\\
\mathfrak{c}^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} &= \mathfrak{c}^{\mathfrak{a}} \,.\, \mathfrak{c}^{\mathfrak{b}},\\
\mathfrak{c}^{\mathfrak{ba}} &= (\mathfrak{c}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{a}},\\
\mathfrak{c}^{1} &= \mathfrak{c}
\end{aligned}
$$

a dále $0 + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, $0 \,.\, \mathfrak{a} = 0$.

Dále definujme nerovnost $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ takto: Především $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$, za druhé, má-li B $\mathfrak{b}$ prvků, pak existuje $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$, která má $\mathfrak{a}$ prvků.

Cvičení 12,5. Je-li $\mathsf{B} \sim \mathsf{B}'$, $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$, pak existuje $\mathsf{A}' \sim \mathsf{A}$, $\mathsf{A}' \subset \mathsf{B}'$. Tedy k rozhodnutí, zda $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, možno užít libovolné množiny B s $\mathfrak{b}$ prvky.

12,6. Nechť A má $\mathfrak{a}$ prvků; nechť B má $\mathfrak{b}$ prvků. Pak $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ znamená: A není ekvivalentní s B, ale A je ekvivalentní s jistou částí množiny B.

$\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ pak znamená: A je ekvivalentní s jistou částí množiny B. Je-li zvláště $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$, jest $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$. Má-li B $\mathfrak{b}$ prvků, pak $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ znamená, že jistá část množiny B má $\mathfrak{a}$ prvků.

12,7. Nechť A má $\mathfrak{a}$ prvků; nechť B má $\mathfrak{b}$ prvků. Pak $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ znamená: Existuje prosté zobrazení množiny A do B. Ze cvičení 8,20 tedy plyne:

Nechť spojitě uspořádaná B *má* $\mathfrak{b}$ *prvků, pak* $\aleph \leqq \mathfrak{b}$*, kde* $\aleph$ *je počet prvků kontinua* $\mathfrak{P}$.

Transitivita. *Je-li* $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ a $\mathfrak{b} < \mathfrak{c}$, *pak* $\mathfrak{a} < \mathfrak{c}$.

Důkaz. Nechť C má $\mathfrak{c}$ prvků, $\mathsf{B} \subset \mathsf{C}$ a nechť B má $\mathfrak{b}$ prvků, $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$ a nechť A má $\mathfrak{a}$ prvků. A není ekvivalentní s B a B není ekvivalentní s C.

Jest $\mathsf{A} \subset \mathsf{C}$ a tedy stačí dokázat, že A není ekvivalentní s C. Budeme naopak předpokládat, že $\mathsf{A} \sim \mathsf{C}$ a jde o to dostat spor. Buď tedy φ prosté zobrazení množiny C na A.

Ježto $\mathsf{A} \neq \mathsf{B}$ a $\mathsf{B} \neq \mathsf{C}$, jsou množiny $\omega_1 = \mathsf{A}$, $\omega_2 = \mathsf{B} - \mathsf{A}$, $\omega_3 = \mathsf{C} - \mathsf{B}$ neprázdné (ω_1 proto, že $\mathsf{A} \sim \mathsf{C}$). Aplikujeme princip definice indukcí. F bude množina všech částí množiny C.

Buď $z(y) \in \mathsf{F}$ pro $y < x$. Označíme $g(z) = \varphi[z(x-1)]$. Je to část množiny A, tedy množiny C.

A podle toho volíme-li v kapitole 3 za $\wp$ postupně ω_1, ω_2 a ω_3, dostáváme zobrazení f_1, f_2 a f_3 množiny N do F takové, že ($i = 1, 2, 3$).

(1) $f_i(1) = \omega_i$, $f_i(x) = \varphi[f_i(x-1)]$.

Položme ještě $f_1(0) = \mathsf{C}$. Jest

(2) $f_1(x-1) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$; při tom sčítanci jsou množiny po dvou disjunktní.

[Pro $x = 1$ to je pravda: $\mathsf{C} = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$. Nechť (2) už platí pro dané x. Podle cvičení 1,25 z toho plyne

$$\varphi[f_1(x-1)] = \varphi[f_1(x)] + \varphi[f_2(x)] + \varphi[f_3(x)]$$

se sčítanci po dvou disjunktními. Podle (1) tedy

$$f_1(\overline{x+1}-1) = f_1(x+1) + f_2(x+1) + f_3(x+1).$$

Tedy podle (E) platí (2) všeobecně.

(3) Každé dvě z množin $f_2(m)$ a $f_3(n)$ jsou disjunktní.

[Jest vždy podle (2): $f_i(n+1) \subset f_1(n)$ a tedy pro $u = 1$ platí

(3′) $f_i(n+u) \subset f_1(n)$ pro každé n.

Platí-li teď (3′) pro jisté u, pak $f_i(\overline{n+1}+u) \subset f_1(n+1) \subset$ $\subset f_1(n)$ podle (2), t. j. $f_i(\overline{n+u}+1) \subset f_1(n)$. Tedy podle principu indukce (E) platí (3′) pro každé u.

Pro $m = n$ jest $f_2(m) \,.\, f_3(n) = \emptyset$ podle (2). Je-li na př. $n < m$, pak podle (3′) $f_2(m) \subset f_1(n)$. Podle (2) však $f_1(n) \,.\, f_3(n) = \emptyset$ a tedy i $f_2(m)\, f_3(n) = \emptyset$. Pro $m < n$ to plyne stejně výměnou indexů 2 a 3.]

Pro pevné i označme J_i třídu všech množin $f_i(n)$.

(4) Jest vždy $f_2(n) \,.\, \Pi(\mathsf{J}_1) = f_3(n) \,.\, \Pi(\mathsf{J}_1) = \emptyset$.

[Je-li totiž $x \in f_2(n)$ nebo $x \in f_3(n)$, pak podle (2) x non $\in$ $\in f_1(n)$.]

(5) Jest $\mathsf{C} = \Pi(\mathsf{J}_1) + \Sigma(\mathsf{J}_2) + \Sigma(\mathsf{J}_3)$.

[Nechť totiž $x \in \mathsf{C} - \Pi(\mathsf{J}_1)$. Pak existuje *první* n takové, že x non $\in f_1(n)$. Pak $x \in f_1(n-1)$ a tedy z (2) plyne $x \in f_2(n)$ anebo $x \in f_3(n)$.] Z (3) a (4) plyne:

(6) Sčítanci v (5) jsou po dvou disjunktní.

Je-li $x \in \Pi(\mathsf{J}_1) + \Sigma(\mathsf{J}_2)$, položme $\psi(x) = x$. Je-li $x \in \Sigma(\mathsf{J}_3)$, budiž $\psi(x) = \varphi(x)$. ψ je zobrazení množiny C do C. Označím-li $\mathsf{U} = \Pi(\mathsf{J}_1) + \Sigma(\mathsf{J}_2)$, pak ovšem:

(7) $\psi(\mathsf{U}) = \mathsf{U}$.

Je-li $x \in \Sigma(\mathsf{J}_3)$, na př. tedy $x \in f_3(n)$, pak $\psi(x) = \varphi(x) \in$ $\in \varphi[f_3(n)] = f_3(n+1)$ podle (1). A je-li $y \in f_3(n+1)$, pak podle (1) $y = \psi(x)$, kde $x = \varphi^{-1}(y) \in f_3(n) \in \Sigma(\mathsf{J}_3)$. Tedy $\psi(x)$ jsou právě prvky množin $f_3(n+1)$, t. j. množin $f_3(m)$, kde $m > 1$. Buď J'_3 systém takových $f_3(m)$. Jest

(8) $\psi(\Sigma(J_3)) = \Sigma(J'_3)$.

Tedy z (5), (7) a (8) plyne

(9) $\psi(C) = U + \Sigma(J'_3)$.

Dále jest podle (2) $f_1(1) . f_3(1) = \emptyset$ a podle (3') tedy $f_3(m) . . f_3(1) = \emptyset$ pro $m > 1$. Tedy $\Sigma(J'_3) . f_3(1) = \emptyset$ a $\Sigma(J_3) = = \Sigma(J'_3) + f_3(1)$, tedy $\Sigma(J'_3) = \Sigma(J_3) - f_3(1)$. Podle (9) tedy $\psi(C) = U + [\Sigma(J_3) - f_3(1)] = C - f_3(1) = B$. Je tedy ψ zobrazení množiny C na B.

A ψ je zobrazení prosté. Neboť je-li $\psi(x) = \psi(y) = z$, je buďto $z \in U$ a pak $z = x = y$. Anebo $z \in \Sigma(J'_3)$, a pak $z = = \varphi(x) = \varphi(y)$, tedy zase $x = y$.

Celkem tedy $C \sim B$ a $\mathfrak{c} = \mathfrak{b}$, což je spor.

Máme-li dokázat, že $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, *pak stačí dokázat dvě věci: jednak že* $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$, *jednak že* $\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{a}$.

[Kdyby totiž $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$, pak by z $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ plynulo $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ a tedy podle transitivity $\mathfrak{a} < \mathfrak{a}$, tedy $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}$, což je spor. Podle cvičení 12,7 to znamená:

Nechť A *má* $\mathfrak{a}$ *prvků; nechť* B *má* $\mathfrak{b}$ *prvků; pak* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ *bude dokázáno, podaří-li se udat jednak prosté zobrazení množiny* A *do* B, *jednak prosté zobrazení množiny* B *do* A.

Počet prvků množiny N je zvykem označovat $\aleph_0$; počet prvků kontinua $\mathfrak{P}$ se značí $\aleph$.

Cvičení. 12,8. Množina má $\aleph_0$ prvků, když a jen když je nekonečná spočetná.

12,9. $\mathfrak{a} < \aleph_0$ když a jen když $\mathfrak{a}$ je počet prvků konečné množiny, t. j. $\mathfrak{a} = 0$ nebo $\mathfrak{a}$ přirozené.

12,10. Pro $n \in N$ buď $f(n) = n/1 \in \mathfrak{P}$. Pak f je prosté zobrazení množiny N do $\mathfrak{P}$. Podle cvičení 12,7 tedy $\aleph_0 \leqq \aleph$.

Ježto pak $\mathfrak{P}$ je nespočetná, jest $\aleph_0 \neq \aleph$. Tedy

$$\aleph_0 < \aleph.$$

12,11. Množina C nechť obsahuje dva prvky: nulu a $d-1$ ($d > 2$). Je-li $\mathfrak{f} \in \mathsf{C}^{\mathsf{N}}$, označme $\varphi(\mathfrak{f}) = 1{,}\mathfrak{f}$. Pak φ je prosté zobrazení množiny C^{N} do $\mathfrak{P}$.

(φ je prosté proto, že rozvoje $1{,}\mathfrak{f}$, kde $\mathfrak{f}(x)$ jsou nuly a „devítky" $d-1$, jsou jednoznačné: Při přechodu k jinému rozvoji téhož čísla se některá cifra $\mathfrak{f}(x)$ změní o 1 a to už za předpokladu $d > 2$ nebude ani 0 ani $d-1$.)

12,12. Buď f prosté zobrazení množiny N na $\mathfrak{R}$. Je-li $\alpha \in \mathfrak{P}$, pak buď $\mathfrak{g} = \psi(\alpha) \in \mathsf{C}^{\mathsf{N}}$ a to $\mathfrak{g}(x) = 0$, když $f(x) < \alpha$; jinak $\mathfrak{g}(x) = d-1$. Pak ψ je prosté zobrazení množiny $\mathfrak{P}$ na C^{N}.

(ψ je prosté vzhledem k hustotě množiny $\mathfrak{R}$. Je-li $\alpha < \alpha'$, $\mathfrak{g}' = \psi(\alpha')$, pak je jisté racionální $f(x)$ taková, že $\alpha < f(x) < \alpha'$; pak $\mathfrak{g}(x) = d-1$ a $\mathfrak{g}'(x) = 0$, tedy $\mathfrak{g}' \neq \mathfrak{g}$.)

$\mathfrak{P}$ má $\aleph$ prvků, C^{N} má $2^{\aleph_0}$ prvků; tedy z 12,11 a 12,12 plyne:

$$\aleph = 2^{\aleph_0}.$$

[Nechť $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{A}', \mathsf{B}'$ mají vždy resp. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}', \mathfrak{b}'$ prvků; nechť $\mathsf{A}' \subset \mathsf{A}$, $\mathsf{B}' \subset \mathsf{B}$.]

Cvičení 12,13. (1) Je-li $\mathsf{AB} = \emptyset$, pak $\mathsf{A}'\mathsf{B}' = \emptyset$ a $\mathsf{A}' + \mathsf{B}' \subset \mathsf{A} + \mathsf{B}$.

(2) $\mathsf{A}' \times \mathsf{B}' \subset \mathsf{A} \times \mathsf{B}$.

(3) Existuje prosté zobrazení φ množiny $\mathsf{B}'^{\mathsf{A}'}$ do B^{A}.

(Je-li $f' \in \mathsf{B}'^{\mathsf{A}'}$, buď $f = \varphi(f') \in \mathsf{B}^{\mathsf{A}}$ tak zvolené, že $f(x) = f'(x)$ pro $x \in \mathsf{A}$ a $f(x) = \omega$ pro $x \in \mathsf{A} - \mathsf{A}'$. Přitom ω je pevný, jednou pro vždy zvolený prvek množiny B.)

Ze cvičení 12,13 plyne ihned:

Je-li $\mathfrak{a}' \leqq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}' \leqq \mathfrak{b}$, *pak*

$$\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}' \leqq \mathfrak{a} + \mathfrak{b},$$
$$\mathfrak{a}'\mathfrak{b}' \leqq \mathfrak{a}\mathfrak{b},$$
$$\mathfrak{b}'^{\mathfrak{a}'} \leqq \mathfrak{b}^{\mathfrak{a}}.$$

Cvičení 12,14. $\mathsf{N}^{\mathsf{N}(n)}$ má $\aleph_0$ prvků, tedy $\aleph_0^n = \aleph_0$ pro $n \in \mathsf{N}$.

Z toho plyne ($n \in \mathsf{N}$):

$$\aleph_0 = 1 + \aleph_0 = n + \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = n \,.\, \aleph_0 = \aleph_0 \,.\, \aleph_0 = \aleph_0{}^n.$$

[Pro $n > 1$ platí totiž nerovnosti $\leqq$; kdyby někde platila ostrá nerovnost $<$, bylo by $\aleph_0 < \aleph_0{}^n$ proti cvičení 12,14. Pro $n = 1$ se nic nového neříká.]

Podobně

$$\aleph = 1 + \aleph = n + \aleph = \aleph_0 + \aleph = \aleph + \aleph = n \,.\, \aleph =$$
$$= \aleph_0 \,.\, \aleph = \aleph \,.\, \aleph = \aleph^n = \aleph^{\aleph_0}.$$

[Pro $n > 1$ zase platí nerovnosti $\leqq$. Kdyby někde bylo $<$, pak by $\aleph < \aleph^{\aleph_0}$. Avšak $\aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 . \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$. Pro $n = 1$ se nic nového neříká.]

Pro $n \geqq 2$ jest

$$2^{\aleph_0} = n^{\aleph_0} = \aleph_0{}^{\aleph_0} = \aleph^{\aleph_0}.$$

[Platí zas nerovnosti $\leqq$; kdyby někde bylo $<$, pak by $2^{\aleph_0} < \aleph^{\aleph_0}$, což není možné, neboť obě ta čísla jsou rovna $\aleph$.]

Cvičení 12,15. Vždy jest $\mathfrak{a} < 2^{\mathfrak{a}}$.

(A měj $\mathfrak{a}$ prvků. Je-li $a \in \mathsf{A}$, buď $\varphi(a) = f_a \in \mathsf{N}(2)^{\mathsf{A}}$, $f_a(a) = 1$ a jinak $f_a(x) = 2$. Pak φ je prosté zobrazení množiny A do $\mathsf{N}(2)^{\mathsf{A}}$, tedy $\mathfrak{a} \leqq 2^{\mathfrak{a}}$.

Kdyby $\mathfrak{a} = 2^{\mathfrak{a}}$, pak by existovalo prosté zobrazení φ množiny A na $\mathsf{N}(2)^{\mathsf{A}}$. $\varphi(x)$ jsou prvky množiny $\mathsf{N}(2)^{\mathsf{A}}$; jsou to tedy zobrazení množiny A do $\mathsf{N}(2)$. Buď $f \in \mathsf{N}(2)^{\mathsf{A}}$, $f(x) = 1$, když pro $f_x = \varphi(x)$ jest $f_x(x) = 2$ a buď $f(x) = 2$, když $f_x(x) = 1$. Jest $f = \varphi(a) = f_a$ pro jisté $a \in \mathsf{A}$. Jest $f(a) = f_a(a) \neq f(a)$ a to je spor.

Cvičení 12,16. Buď J libovolná množina kardinálních čísel. Pak existuje $\mathfrak{a}$ takové, že pro $\mathfrak{x} \in \mathsf{J}$ vždy $\mathfrak{x} < \mathfrak{a}$.

[Pro každé $\mathfrak{x}$ volme množinu X mající $\mathfrak{x}$ prvků. Buď J třída všech X. Pak vždy $\mathsf{X} \subset \Sigma(\mathsf{J})$. Má-li $\Sigma(\mathsf{J})$ $\mathfrak{s}$ prvků, je tedy vždy $\mathfrak{x} \leqq \mathfrak{s}$; je-li $\mathfrak{a} = 2^{\mathfrak{s}}$, pak tedy vždy $\mathfrak{x} < \mathfrak{a}$.

Ke každé množině kardinálních čísel tedy možno nalézt kardinální číslo, které v ní není. Žádná množina neobsahuje všecka kardinální čísla. Taková je spousta kardinálních čísel.]

Poznámka. Pro uspořádání kardinálních čísel jsme dokázali podle F. Bernsteina zákon transitivity. Bez zavádění dalších principů nelze tvrdit, že by platil zákon trichotomie. O dvou různých kardinálních číslech nemůžeme tvrdit, že by některé z nich musilo být menší než druhé.

A na konec:

Cvičení 12,17. *Intervalem* s koncovými body a a b rozumíme neprázdnou množinu všech reálných čísel x takových, že $a < x < b$. Interval je vždy kontinuum.

12,18. Každé kontinuum a tedy každý interval má $\aleph$ bodů (prvků). (Viz větu 8,5.)

Z toho znovu plyne, že úsečka má vždy $\aleph$ bodů. (Otevřená úsečka je interval a přidáním koncových bodů se počet bodů zvětší o 1 nebo o 2, t. j. zůstane roven $\aleph$.)

12,19. Každá spojitá uspořádaná množina obsahuje (podle cvičení 8,20) kontinuum a tedy má aspoň $\aleph$ bodů.